УДК 621.291.8

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОТОКІВ У БАГАТОПОЛЮСНІЙ МЕРЕЖІ

Тихонова Олена

ОНАЗ ім. О.С. Попова

Анотація

Розглядається задача пошуку максимального потоку у багатополюсній транспортній мережі та відповідного розподілу його складових по комунікаційних каналах. Введені поняття "триджету" та "триплету" як структурних елементів графу мережі. Узагальнений алгоритм оптимального розподілу потоків проілюстровано на прикладі повнозв'язного триполюсного мережевого фракталу з шести вузлів.

Abstract

The maxflow task is considered in multi-pole transport network as well as the corresponding flows distribution over communication channels. The concepts of "triget" and "triplet" are introduced as structural elements of the network graph. A generalized algorithm of optimal flows distribution is illustrated by the case of a six-node fully connected three-pole network fractal.

Вступ

Сучасні телекомунікаційні мережі стикаються зі зростаючим попитом на послуги Інтернет. Поряд з удосконаленням телекомунікаційного обладнання і технологій, оптимізація використання наявної мережевої інфраструктури дозволяє додатково підвищити доходи постачальників телекомунікаційних послуг та доступність послуг для споживача. Зокрема, це надає можливість збільшити кількість задоволених вимог на обслуговування мережею за існуючої пропускної здатності комунікаційних каналів. Тому актуальною є задача пошуку максимального потоку у транспортній мережі, а також конкретного розподілу загального максимального потоку по транспортній інфраструктурі.

Традиційний підхід до вирішення задачі про максимальний потік передбачає існування двох виділених вузлів мережі, один з яких - джерело потоку, а інший - його кінцева точка [1]. Також відомі узагальнення задачі максимального потоку для багатополюсного орієнтованого графа, наприклад графа двосторонньої структури з декількома витоками та декількома стоками [2], або для багатополюсного направленого збалансованого графа [3]. В роботі [4] авторами зазначено, що загальноприйняті графові моделі не в повній мірі відображують сучасні мережеві технології; наприклад, відоме представлення зв'язку між двома мережевими вузлами направленим або неорієнтованим «ребром» мережевого графа (з фіксованою вагою у кожному напрямку) не враховує здатність гнучкої реконфігурації сучасних оптичних систем зв'язку. У зв'язку з цим, в роботі [4] була запропонована розширена постановка задачі про максимальний потік для багатополюсної відкритої вільно-орієнтованої транспортної мережі, де фіксованою залишається лише загальна потужність зв'язку між кожною парою вузлів, а її співвідношення у прямому та зворотному напрямках може змінюватись в залежності від поточних потреб мережі. *Метою* даної роботи є побудова алгоритму оптимального розподілу потоків багатополюсної мережі за критерієм максимізації загального сумарного потоку та з урахуванням вільної орієнтації каналів зв'язку.

Запропонований узагальнений алгоритм полягає в поетапному накопиченні значення максимального потоку на зростаючих логічних відстанях між всіма полюсами мережі; при подібній декомпозиції вихідного графу мережі утворюються типові структурні елементи, названі "триджет" та "триплет", для яких вже вважається відомим попередньо розроблений метод розрахунку максимального потоку.

Розрахунок максимального потоку для структурних елементів графу

Як відомо з теорії графів, вузол з трьома ребрами є мінімальним структурним «примітивом», за допомогою якого можна утворити складний неорієнтований граф довільної топології [5]. Даний примітив запропоновано визначати як "триджет", рис. 1.

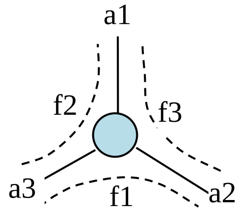


Рисунок 1 – Структурний елемент типу "триджет"

Через відкриті ребра триджету *a1, a2, a3* циркулюють три зовнішніх потоки: *f1, f2, f3*. Повний потік триджету, за визначенням, дорівнює сумі $f_\Sigma = f1 + f2 + f3$. В роботі [6] обґрунтовано алгоритм розрахунку максимальної величини $f_{\Sigma max}$ і відповідних *f1, f2* та *f3*, який залежить від співвідношення ваги відкритих ребер *a1, a2, a3* наступним чином.

1. Якщо вага жодного з відкритих ребер *a1, a2, a3* не перевищує ваги двох інших (тобто виконується правило трикутника):

$$\begin{aligned} f_{\Sigma\max} &= (a1 + a2 + a3)/2, \\ f1 &= (a2 + a3 - a1)/2, \\ f2 &= (a1 + a3 - a2)/2, \\ f3 &= (a1 + a2 - a3)/2. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Якщо правило трикутника не виконується, максимальний потік $f_{\Sigma max}$ дорівнює:

$$f_{\Sigma\max} = (a1 + a2 + a3) - \max(a1, a2, a3), \tag{2}$$

а складові максимального потоку проходять по двом ребрам мінімальної сумарної ємності, які відіграють роль мінімального розрізу на триджеті.

Визначений вище базовий структурний елемент триджет на рис.1 застосуємо для аналізу потоків у відкритому зваженому вільно-орієнтованому графі більш складної топології. Структурний фрейм наступного (другого) рівня, який запропоновано визначати як "триплет", побудуємо шляхом об'єднання трьох триджетів, рис. 2.

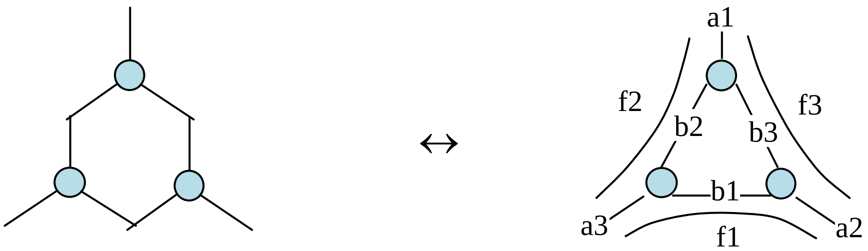


Рисунок 2 – Структурний елемент типу "триплет"

Алгоритм пошуку максимального потоку для триплету полягає у наступному.

1. Якщо жодне з внутрішніх ребер триплету *b1, b2, b3* не є вузьким місцем для відповідних потоків *f1, f2* та *f3*, то максимальний потік та його складові розраховується як у триджеті, тобто за формулами (1), (2).

2. Якщо усі внутрішні ребра триплету є вузькими місцями, тобто обмежують відповідні потоки *f1, f2 та f3*, то максимальний потік дорівнює мінімальному "внутрішньому" перетину $f_{\Sigma max} = b1 + b2 + b3$, а складові максимального потоку дорівнюватимуть вагам обмежуючих ребер $f1 = b1$; $f2 = b2$; $f3 = b3$.

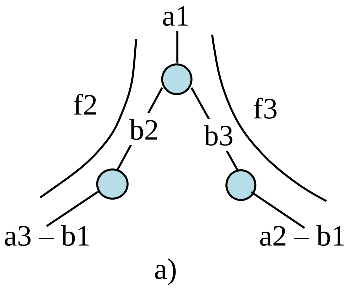
3. У випадках, якщо одне або два внутрішніх ребра з (*b1, b2, b3*) є вузьким місцем для відповідних потоків *f1, f2 та f3* (рис. 3):

- дані потоки приймаються рівними вагам обмежуючих внутрішніх ребер триплету;

- обчислюється остаточний граф триплету;

3.1) якщо триплет містить одне обмежуюче внутрішнє ребро, наприклад b1 (рис. 3-а), максимальний потік становить $f_{\Sigma max} = b1 + min\{a1, min(b2,a3-b1) + min(b3,a2-b1)\}$. При цьому потоки $f1$, $f2$ можуть розподілятися довільним чином в межах не перевищення пропускної здатності ребер графу;

3.2) якщо триплет містить два обмежуючих внутрішніх ребра, наприклад b1 та b2 (рис. 3-б), очевидно що $f3=min\{a1-b2,b3,a2-b1\}$, а максимальний потік становить $f_{\Sigma max} = b1 + b2 + min\{a1-b2,b3,a2-b1\}$.



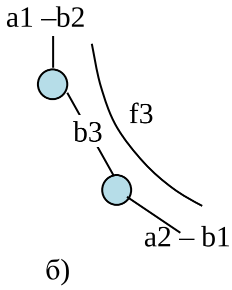


Рисунок 3 – Остаточний граф триплету: а) з двома обмежуючими ребрами; б) з одним обмежуючим ребром

Запропонований алгоритм розраховує максимальний потік триджету та його складові з точністю до 3-крокових потоків. Застосовуючи принцип масштабування триджетів і триплетів, можна конструювати все більш складні топології графу. Структурний елемент наступного (третього) рівня будемо називати "фракталом". В даній роботі створена комп’ютерна програма на мові Python, яка реалізує узагальнений алгоритм пошуку максимального потоку для повнозв’язного триполюсного мережевого фракталу з шести вузлів.

Висновки

На основі розширеної постановки задачі про максимальний потік для багатополюсної відкритої неорієнтованої транспортної мережі, розроблено узагальнений алгоритм пошуку максимального потоку, який полягає у декомпозиції вихідного графу мережі на спрощені типові структурні елементи. Визначено структурні елементи "триджет" та "триплет", для яких розроблено алгоритми розрахунку максимального потоку. Створено комп’ютерну програму, яка реалізує узагальнений алгоритм для повнозв’язного триполюсного мережевого фракталу з шести вузлів.

Список використаних джерел:

1.Ford L.R. Flows in Networks / L.R.Ford, D.R.Fulkerson // A report prepared for United States air force project RAND. – 1962. – 332 p.

2.Bela Bollobas. Modern Graph Theory. – New York: Springer Science & Business Media, 1998. – 394 p.

3.Christian Fremuth-Paeger. Balanced Network Flows. I. A Unifying Framework for Design and Analysis of Matching Algorithms / Christian Fremuth-Paeger, Dieter Jungnickel // Networks. – 1999. – vol.3, issue 1. – p.1-28.

4.Tykhonova O.V. The maxflow problem statement for multi-pole software defined network / O.V.Tykhonova, V.I.Tikhonov // матеріали XVII міжнародної НТК ВОТТП-17-2017 (08-13 червня 2017 р.). – Одеса: ОНАЗ ім. О.С.Попова, 2017. – с. 161-164.

5.Vasudev C. Graph Theory with Applications. – New Age International, 2006. – 466 p.

6.Тихонова Е.В. Обобщенный алгоритм расчета максимального потока для многополюсной транспортной сети: матеріали 72-ї НТК професорсько-викладацького складу, науковців, аспірантів та студентів (Одеса, 13-15 грудня 2017 р.). – О.: ОНАЗ ім. О.С.Попова, 2017. – с. 69-72.