УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

ПРО ОДИН КЛАС РОЗКЛАДНИХ І ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ІНВЕРСНИХ МОНОЇДІВ

Let G be an arbitrary group of bijections on a finite set. Let $I(G)$ denote the set of all partial injective transformations each of which is included in a bijection from G. The set $I(G)$ is a fundamental factorizable inverse semigroup. We investigate different properties of the semigroup $I(G)$. In particular, we describe automorphisms of $I(G)$ and obtain necessary and sufficient conditions for each stable order on $I(G)$ to be fundamental or antifundamental.

Пусть G — произвольная группа биекций на конечном множестве. Обозначим через $I(G)$ множество всех частичных инъективных преобразований, каждое из которых включается в биекцию из G. $I(G)$ является фундаментальной и разложимой инверсной полугруппой. В данной статье изучаются различные свойства полугруппы $I(G)$. В частности, описаны автоморфизмы $I(G)$ и найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы каждый стабильный порядок на $I(G)$ был фундаментальным или антифундаментальным.

Інверсний моноїд S називається розкладним, якщо $S = GE$, де G і E — відповідно група оборотних елементів і напіврешітка ідемпотентів моноїда S. Відомо, що інверсний моноїд є розкладним тоді і лише тоді, коли для довільного елемента x існує елемент $g \in G$ такий, що $x \leq g$. Систематичне вивчення розкладних інверсних моноїдів започатковано у статті [1]. На сьогодні це досить розвинена галузь теорії інверсних напівгруп, основні результати якої можна знайти в оглядовій статті [2]. Нехай S_n — симетрична група на n-елементній множині $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Розглянемо множину всіх ін'єкцій на $\mathbf{N}$, кожна з яких включається в деяку бієкцію множини $\mathbf{N}$. Зрозуміло, що таким чином (відносно звичайної операції композиції) ми одержуємо симетричну інверсну напівгрупу $\mathcal{IS}_n$. Очевидно, що ця проста конструкція легко узагальнюється на довільну групу G перестановок скінченної множини. Відповідний інверсний моноїд далі позначатимемо через $I(G)$. Очевидно, що моноїд $I(G)$ є розкладним. У статті [3] досліджуються властивості інверсної напівгрупи $I(A_n)$, де A_n — альтернативна група. У статті [2] викладено загальний метод одержання багатьох типів розкладних моноїдів у вигляді гомоморфного образу напівпрямого добутку напіврешітки і групи. Зокрема, напівгрупу $I(G)$ теж можна одержати таким чином. Конкретизуючи (з деякими відмінностями) загальні викладки зі статті [2], покажемо як це робиться. Отже, нехай X — скінченна множина. Позначимо через $\mathcal{B}_X$ напівгрупу всіх бінарних відношень на множині X. Нехай G — довільна група бієкцій множини X. Через Δ_A позначимо відношення рівності на множині A ($A \subseteq X$), а через E — множину $\{\Delta_A \colon A \subseteq X\}$. Очевидно, що E — напіврешітка відносно звичайної операції композиції бінарних відношень, яка, зрозуміло, ізоморфна напіврешітці всіх підмножин множини X відносно операції перетину $\cap$. Далі, визначимо дію групи G на напіврешітці E. А саме, нехай $\Delta_A \in E$ і $f \in G$. За означенням $\Delta_A f = f^{-1} \circ \Delta_A \circ f$, де через $\circ$ позначено звичайну операцію композиції бінарних відношень. Легко перевірити, що для будь-яких A та B ($A \subseteq X, B \subseteq X$) і довільних $f, \varphi \in G$ виконуються такі властивості:

1) $\Delta_A \Delta_X = \Delta_A$;

2) $\Delta_A f \circ \varphi = (\Delta_A f)\varphi$;

3) $(\Delta_A \circ \Delta_B)f = \Delta_A f \circ \Delta_B f$.

Дія групи G на напіврешітці E дозволяє нам звичайним чином визначити напівпрямий добуток $G \ltimes E$, а саме, $(f, \Delta_A)(\xi, \Delta_B) = (f \circ \xi, \xi^{-1} \circ \Delta_A \circ \xi \circ \Delta_B)$. Легко перевірити, що функція $F\colon (f, \Delta_A) \mapsto f \circ \Delta_A$ є гомоморфізмом моноїда $G \ltimes E$ на інверсний моноїд $I(G)$. В даній статті ми вивчаємо деякі властивості напівгрупи $I(G)$. Зокрема, в пункті 2 з'ясовуються умови, за яких будь-який стабільний порядок на $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним. У пункті 3 дано опис групи автоморфізмів моноїда $I(G)$.

1. Фундаментальність інверсного моноїда $\boldsymbol{I(G)}$. Інверсна напівгрупа називається *фундаментальною*, якщо будь-яка конгруенція, яка включається в H-відношення Гріна, є відношенням рівності. Нехай $\mathcal{IS}_X$ — симетрична інверсна напівгрупа на множині X. Позначимо через A множину примітивних ідемпотентів напівгрупи $\mathcal{IS}_X$, тобто $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in X \right\}$.

Твердження 1. *Якщо інверсна піднапівгрупа S напівгрупи $\mathcal{IS}_X$ містить множину A, то S — фундаментальна інверсна напівгрупа.*

Доведення. Нехай Θ — довільна конгруенція на S, яка включається в H-відношення Гріна. Нехай $(\varnothing, \eta) \in \Theta$, де $\varnothing$ — порожнє перетворення. Оскільки $\Theta \subseteq H$, то $\mathrm{dom}(\varnothing) = \mathrm{dom}(\eta)$. Звідси $\eta = \varnothing$. Якщо ж $(f, \varphi) \in \Theta$ і $f \neq \varnothing$, $\varphi \neq \varnothing$, то $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varphi) \neq \varnothing$ і $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(\varphi)$. Нехай $a \in \mathrm{dom}(f)$ і $af = b$. Оскільки $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \in S$, то $\left(\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ f, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \circ \varphi \right) \in \Theta$. Звідси $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a\varphi \end{pmatrix} \right) \in \Theta$. Позаяк $\Theta \subseteq H$, то $a\varphi = b$. Отже, $f \subseteq \varphi$. Аналогічно доводиться, що $\varphi \subseteq f$. Таким чином, $f = \varphi$, тобто напівгрупа S є фундаментальною.

Наслідок 1. *Нехай G — довільна підгрупа симетричної групи S_n, тоді $I(G)$ є фундаментальною інверсною напівгрупою.*

Зазначимо, що фундаментальність симетричної інверсної напівгрупи доведено в [1] (лема 3.2).

2. Фундаментальні порядки на інверсному моноїді $\boldsymbol{I(G)}$. В цьому пункті ми знайдемо необхідні і достатні умови для того, щоб кожний стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$ був фундаментальним або антифундаментальним. Спочатку наведемо кілька означень. Частковий порядок ψ на довільній напівгрупі S називається *стабільним*, якщо з умови $(x, y) \in \psi$ випливає $(zx, zy) \in \psi$ і $(xz, yz) \in \psi$ для будь-якого $z \in S$. Частковий порядок Ω на довільній напівгрупі S називається *фундаментальним* (див. [4] і [5] або [6]), якщо існує гомоморфізм ξ напівгрупи S у напівгрупу $\mathcal{PT}(X)$ усіх часткових перетворень деякої множини X такий, що виконується еквівалентність $(a, b) \in \Omega \Leftrightarrow (a)\xi \subseteq (b)\xi$. Легко показати, що за цих умов частковий порядок Ω є стабільним, а гомоморфізм ξ — ізоморфізмом. Далі частковий порядок будемо називати просто порядком. Якщо ζ — фундаментальне відношення порядку на напівгрупі S, то відношення порядку ζ^{-1} називається антифундаментальним. Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми. Кажуть, що елемент $b \in E$ є об'єднанням атомів, якщо існує підмножина C множини атомів така, що $\sup C = b$. Тепер сформулюємо потрібний результат.

Твердження 2 (див. [7], теорема 1)**.** *Нехай S — скінченна інверсна напівгрупа з нулем. Наступні умови є еквівалентними*:

1) *будь-який стабільний порядок на S є фундаментальним або антифундаментальним*;

2) *ідеал* $I_1 = \{x \in S\colon \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ *є напівгрупою Брандта і кожний ненульовий ідемпотент напівгрупи* S *є об'єднанням атомів у напіврешітці* $E(S)$;

3) *максимальні стабільні порядки на* S *вичерпуються* ω *і* ω^{-1} (*де* ω — *канонічний порядок на* S).

Далі, нехай G — підгрупа симетричної групи S_n.

Твердження 3. *Довільний порядок на інверсному моноїді* $I(G)$ *є фундаментальним або антифундаментальним тоді і лише тоді, коли група* G *є транзитивною.*

Доведення. Нехай G — транзитивна група. Розглянемо ідеал $I_1 = \{\varphi \in I(G)\colon \operatorname{rank}(\varphi) \leq \leq 1\}$. Зрозуміло, що кожний ненульовий елемент ідеалу I_1 має форму $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Оскільки за умовою група G є транзитивною, то для будь-яких $x, y \in \mathbf{N}$ існує перестановка $\beta \in G$ така, що $(x)\beta = y$. Звідси $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in I_1$. Тепер зрозуміло, що кожний ненульовий ідемпотент ідеалу I_1 є примітивним. До того ж I_1 є 0-простою напівгрупою. Отже, ідеал I_1 є напівгрупою Брандта. Крім того, кожний ненульовий ідемпотент моноїда $I(G)$ є об'єднанням атомів. Таким чином, згідно з твердженням 2 будь-який порядок на $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним.

Нехай тепер група G така, що будь-який стабільний порядок на інверсному моноїді $I(G)$ є фундаментальним або антифундаментальним. Нехай $a, b \in \mathbf{N}$ — довільні елементи множини $\mathbf{N}$. Оскільки одиниця групи G є відношенням рівності на $\mathbf{N}$, то $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \in I_1$ і $\begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \in I_1$. Згідно з твердженням 2 ідеал I_1 є напівгрупою Брандта, тобто цілком 0-простою інверсною напівгрупою. Тому $I_1 \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \circ I_1 = I_1$, а отже, $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \in I_1 \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \circ I_1$. Звідси випливає, що існують $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \in I_1$ і $\begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \in I_1$ такі, що $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix}$. Оскільки $\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \neq \varnothing$, то $x = b$. Таким чином, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in I_1$, а отже, існує перестановка $\rho \in G$ така, що $(a)\rho = b$, тобто група G є транзитивною.

***Наслідок* 2.** *Максимальні стабільні порядки на інверсному моноїді* $I(G)$ *вичерпуються* ω *і* ω^{-1} (*де* ω — *канонічний порядок на* $I(G)$) *тоді і тільки тоді, коли група* G *є транзитивною.*

3. Група автоморфізмів інверсного моноїда $I(G)$. В роботі [8] запропоновано загальний підхід до опису групи автоморфізмів напівгруп. Зокрема, в розділі 3.3 цієї статті показано як загальна теорема використовується для опису групи автоморфізмів фундаментальної інверсної напівгрупи. В даному пункті ми не намагаємося виводити твердження з результатів статті [8], а діємо, безпосередньо ґрунтуючись на ідеї, яку вперше було застосовано в [9] для знаходження автоморфізмів симетричної напівгрупи усіх повних перетворень довільної множини і аналог якої в подальшому використовувався неодноразово (див., наприклад, [10–12]). Слід зазначити, що вищезгадані результати [9–12] щодо групи автоморфізмів симетричних напівгруп і напівгрупи усіх бінарних відношень є наслідками більш загальних теорем, доведених у [13]. Найбільш загальні результати щодо групи автоморфізмів скінченної напівгрупи часткових ендоморфізмів нещодавно одержано в [14].

Нехай S — моноїд. Позначимо через S^* групу оборотних елементів моноїда S. Нехай T — піднапівгрупа моноїда S. Якщо елемент $g \in S^*$ такий, що $g^{-1}Tg \subseteq T$, то автоморфізм $f_g\colon t \mapsto g^{-1}tg$ (де $t \in T$) називають внутрішнім автоморфізмом піднапівгрупи T. Позначимо через $N(T)$ нормалізатор піднапівгрупи T в групі S^*, тобто $N(T) = \{g \in S^*\colon gT = Tg\}$.

Наша подальша задача — показати, що група автоморфізмів моноїда $I(G)$ ізоморфна $N(G)$ — нормалізатору групи G в симетричній групі S_n. Це твердження ми доведемо як наслідок більш загального твердження (див. твердження 4). Для цього доведемо кілька лем.

Лема 1. *Нехай G — довільна підгрупа симетричної групи S_n, тоді $N\big(I(G)\big) = N(G)$.*

Нехай $h \in N\big(I(G)\big)$, тобто $h \circ I(G) = I(G) \circ h$. Нехай $g \in G$, тоді $g \in I(G)$. У цьому випадку існує перетворення $\mu \in I(G)$ таке, що $h \circ g = \mu \circ h$. Звідси $\mu = h \circ g \circ h^{-1}$. Отже, μ — бієкція, до того ж $\mu \in I(G)$. Таким чином, $\mu \in G$. Звідси ми одержуємо включення $h \circ G \subseteq G \circ h$. Аналогічно можна довести, що $G \circ h \subseteq h \circ G$. Отже, $h \circ G = G \circ h$, тобто $h \in N(G)$. Іншими словами, $N\big(I(G)\big) \subseteq N(G)$.

Доведемо тепер зворотне включення. Нехай $\alpha \in N(G)$, тобто $\alpha \circ G = G \circ \alpha$. Нехай τ — довільний елемент, що належить моноїду $I(G)$. З означення інверсного моноїда $I(G)$ випливає існування бієкції $\tau^* \in G$ такої, що $\tau \subseteq \tau^*$. Звідси $\alpha \circ \tau \subseteq \alpha \circ \tau^* = \eta \circ \alpha$ для деякого $\eta \in G$. Оскільки $\alpha \circ \tau \subseteq \eta \circ \alpha$, то знайдеться ідемпотент $\varepsilon \in \mathcal{IS}_n$ такий, що $\alpha \circ \tau = \varepsilon \circ \eta \circ \alpha$. Але ж $\varepsilon \circ \eta \subseteq \eta$. Отже, $\varepsilon \circ \eta \in I(G)$. Таким чином,

$$\alpha \circ I(G) \subseteq I(G) \circ \alpha. \tag{1}$$

Доведемо зворотне включення. Нехай $\beta \in I(G)$. Існує бієкція $\beta^* \in G$ така, що $\beta \subseteq \beta^*$. Оскільки $\alpha \in N(G)$, то $\beta^* \circ \alpha = \alpha \circ \lambda$ для деякого $\lambda \in G$. Позаяк $\beta \subseteq \beta^*$, то $\beta \circ \alpha \subseteq \beta^* \circ \alpha = \alpha \circ \lambda$. Отже, існує ідемпотент $\sigma \in \mathcal{IS}_n$ такий, що $\beta \circ \alpha = \alpha \circ \lambda \circ \sigma$. Оскільки $\lambda \in G$ і $\lambda \circ \sigma \subseteq \lambda$, то $\lambda \circ \sigma \in I(G)$. Отже,

$$I(G) \circ \alpha \subseteq \alpha \circ I(G). \tag{2}$$

З (1) і (2) маємо $\alpha \circ I(G) = I(G) \circ \alpha$, тобто $\alpha \in N\big(I(G)\big)$. Отже, $N(G) \subseteq N(I(G))$. Оскільки зворотне включення вже доведено вище, то $N\big(I(G)\big) = N(G)$.

Лему 1 доведено.

Якщо $\alpha \in I(G)$, то число $|\operatorname{im}(\alpha)|$ називають рангом перетворення α і позначають через $\operatorname{rank}(\alpha)$. Це стандартне означення рангу має один суттєвий недолік, а саме, взагалі кажучи, ранг перетворення не зберігається при автоморфізмі. Це легко показати на простих прикладах. Далі, нехай S — інверсна піднапівгрупа симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Як і вище, позначимо через A множину $\left\{\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbf{N}\right\}$. Якщо $\delta \in S$, то через $R_1(\delta)$ позначимо множину $\big\{\xi \in S\colon \xi \subseteq \delta \wedge \operatorname{rank}(\xi) = 1\big\}$.

Лема 2. *Нехай S — інверсна піднапівгрупа симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ така, що $A \subseteq S$. Якщо $F \in \operatorname{Aut}(S)$ і $\alpha \in S$, то $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{rank}((\alpha)F)$.*

Доведення. Нехай $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix}$ — довільний ідемпотент напівгрупи S. За умовою $\begin{pmatrix} b_i \\ b_i \end{pmatrix} \in S$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тому $R_1(\beta) = \left\{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} b_k \\ b_k \end{pmatrix}\right\}$. Отже, $|R_1(\beta)| = \operatorname{rank}(\beta) = k$. Далі розглянемо напіврешітки $\beta \circ E(S) = \big\{\xi \in E(S)\colon \xi \subseteq \beta\big\}$ і $(\beta)F \circ E(S) = \big\{\xi \in E(S)\colon \xi \subseteq (\beta)F\big\}$. Легко довести, що вони ізоморфні. Отже, кількість атомів напіврешітки $\beta \circ E(S)$ дорівнює кількості атомів напіврешітки $(\beta)F \circ E(S)$, тобто $\big|R_1(\beta)\big| = \Big|R_1\big((\beta)F\big)\Big|$. Звідки випливає, що $\operatorname{rank}(\beta) = \big|R_1(\beta)\big| = \Big|R_1\big((\beta)F\big)\Big| = \operatorname{rank}\big((\beta)F\big)$. Таким чином, $\operatorname{rank}(\alpha) = \operatorname{rank}(\alpha \circ \alpha^{-1}) = \operatorname{rank}\big((\alpha \circ \alpha^{-1})F\big) = \operatorname{rank}\Big((\alpha)F \circ \big((\alpha)F\big)^{-1}\Big) = \operatorname{rank}\big((\alpha)F\big)$.

Лему 2 доведено.

Далі, нехай $F \in \mathrm{Aut}(S)$. Легко показати, що $(A)F = A$. Таким чином, автоморфізм F на множині $\mathbf{N}$ визначає бієкцію ξ_F, а саме, $(x)\xi_F = y$ тоді і лише тоді, коли $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$.

Лема 3. *Якщо* $\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} \in S$, *то* $\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} (s)\xi_F \\ (z)\xi_F \end{pmatrix}$.

Доведення. Оскільки $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix}\right) = 1$, то згідно з лемою 2 $\mathrm{rank}\left(\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F\right) = 1$. Отже, існують $u,\, v \in \mathbf{N}$ такі, що $\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Далі, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F = \left(\begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix}\right) F = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} F \circ \begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F = $ $= \begin{pmatrix} (s)\xi_F \\ (s)\xi_F \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Звідси $u = (s)\xi_F$. Аналогічно доводиться рівність $v = (z)\xi_F$. Таким чином, $\begin{pmatrix} s \\ z \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} (s)\xi_F \\ (z)\xi_F \end{pmatrix}$.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай S — інверсна піднапівгрупа симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$ така, що $A \subseteq S$. Якщо $F \in \mathrm{Aut}(S)$, то для будь-якого* $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix} \in S$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix} F =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1)\xi_F & (a_2)\xi_F & \ldots & (a_k)\xi_F \\ (b_1)\xi_F & (b_2)\xi_F & \ldots & (b_k)\xi_F \end{pmatrix} = \xi_F^{-1} \circ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix} \circ \xi_F.$$

Доведення. Згідно з лемою 2 ранг перетворення, що належить напівгрупі S, зберігається при автоморфізмі. Тому

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_i & \ldots & b_k \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots & x_k \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_k \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи лему 3, маємо

$$\begin{pmatrix} (a_i)\xi_F \\ (b_i)\xi_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} F = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_i & \ldots & b_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_i \\ b_i \end{pmatrix}\right) F =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_i & \ldots & a_k \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_i & \ldots & b_k \end{pmatrix} F \circ \begin{pmatrix} b_i \\ b_i \end{pmatrix} F =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots & x_k \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_i & \ldots & y_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} (b_i)\xi_F \\ (b_i)\xi_F \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що $\begin{pmatrix}(a_i)\xi_F\\(b_i)\xi_F\end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_k\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_k\end{pmatrix}$. Крім того, ξ_F — бієкція множини $\mathbf{N}$. Звідси робимо остаточний висновок:

$$\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_k\\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k\end{pmatrix} F = \begin{pmatrix}(a_1)\xi_F & (a_2)\xi_F & \ldots & (a_k)\xi_F\\ (b_1)\xi_F & (b_2)\xi_F & \ldots & (b_k)\xi_F\end{pmatrix}.$$

Рівність

$$\begin{pmatrix}(a_1)\xi_F & (a_2)\xi_F & \ldots & (a_k)\xi_F\\ (b_1)\xi_F & (b_2)\xi_F & \ldots & (b_k)\xi_F\end{pmatrix} = \xi_F^{-1} \circ \begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \ldots & a_k\\ b_1 & b_2 & \ldots & b_k\end{pmatrix} \circ \xi_F$$

перевіряється безпосередньо.

Лему 4 доведено.

Щойно доведену лему можна вивести з леми 2.2 (див. [14]).

Твердження 4. *Нехай S — інверсна піднапівгрупа симетричної інверсної напівгрупи $\mathcal{IS}_n$. Якщо $A \subseteq S$, то* $\mathrm{Aut}(S) \cong N(S)$.

Доведення. Нехай $\alpha \in N(S)$. Визначимо відповідне перетворення Φ_α на S, а саме, $(\eta)\Phi_\alpha = \alpha^{-1} \circ \eta \circ \alpha$ для будь-якого $\eta \in S$. Легко перевірити, що Φ_α — автоморфізм напівгрупи S. Покажемо, що $\Omega\colon \alpha \mapsto \Phi_\alpha$ є ізоморфізмом груп $N(S)$ і $\mathrm{Aut}(S)$. Рівність $(\alpha\circ\beta)\Omega = (\alpha)\Omega\circ(\beta)\Omega$ легко перевіряється. Доведемо, що Ω — взаємно однозначне відображення. Нехай $\alpha \neq \beta$. Покажемо, що $\Phi_\alpha \neq \Phi_\beta$. Припустимо протилежне, тобто $\Phi_\alpha = \Phi_\beta$. Для довільного $x \in \mathbf{N}$ маємо $\begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \in S$. Отже, $\alpha^{-1} \circ \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \circ \alpha = \beta^{-1} \circ \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix} \circ \beta$, тобто $\begin{pmatrix}(x)\alpha\\(x)\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x)\beta\\(x)\beta\end{pmatrix}$. Звідси $(x)\alpha = (x)\beta$. Отримали суперечність. Таким чином, відображення Ω є взаємно однозначним. До того ж за лемою 4 кожний автоморфізм напівгрупи S має форму Φ_τ для деякого $\tau \in N(S)$. Таким чином, $N(S) \cong \mathrm{Aut}\,(S)$.

Твердження 4 доведено.

Твердження 5. *Нехай G — довільна підгрупа симетричної групи S_n, тоді* $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong N(G)$.

Доведення. Очевидно, що інверсна напівгрупа $I(G)$ задовольняє всі умови твердження 4. Отже, $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong N\big(I(G)\big)$. А згідно з лемою 1 $N\big(I(G)\big) = N(G)$.

Твердження 5 доведено.

Природним чином виникають два питання:

1) для яких груп G $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong S_n$?

2) для яких груп G $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong G$?

Твердження 6. *Якщо $n \geq 3$ і $n \neq 4$, то* $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong S_n$ *для таких і лише таких підгруп симетричної групи S_n :*

1) Δ — *одинична підгрупа*;

2) A_n — *альтернативна підгрупа*;

3) S_n — *симетрична група*.

При $n = 4$ до вищенаведених груп додається група Клейна.

Доведення. Це твердження безпосередньо випливає з попереднього твердження, а також із відомого опису нормальних підгруп симетричної групи S_n. Зокрема, якщо $G = \Delta$, то $I(\Delta)$ — напівгрупа, яка ізоморфна булеану $\mathcal{B}(N)$ відносно операції перетину $\cap$.

Твердження 6 доведено.

Щодо другого питання, то тут ми можемо навести лише приклади. Отже, нехай G — максимальна підгрупа симетричної групи S_n, відмінна від альтернативної підгрупи. Тоді $\mathrm{Aut}\,\big(I(G)\big) \cong$ $\cong G$.

1. *Chen S. Y., Hsieh S. C.* Factorizable inverse semigroups // Semigroup Forum. – 1974. – **8**. – P. 283 – 297.
2. *FitzGerald D. G.* Factorizable inverse monoids // Semigroup Forum. – 2010. – **80**. – P. 484 – 509.
3. *Lipscomb S. L.* The alternating semigroups: generators and congruences // Semigroup Forum. – 1992. – **44**. – P. 96 – 106.
4. *Вагнер В. В.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1956. – **38**, № 2. – С. 203 – 240.
5. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 2. – С. 188 – 197.
6. *Goberstein S. M.* Fundamental order relations on inverse semigroups and on their generalizations // Semigroup Forum. – 1980. – **21**. – P. 285 – 328.
7. *Дереч В. Д.* Структура скінченної інверсної напівгрупи з нулем, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 1. – С. 29 – 39.
8. *Araújo J., Konieczny J.* General theorems on automorphisms of semigroups and their applications // J. Aust. Math. Soc. – 2009. – **87**. – P. 1 – 17.
9. *Schreier J.* Üder Abbildungen einer abstrakten Menge Auf ihre Teilmengen // Fund. Math. – 1937. – **28**. – P. 261 – 264.
10. *Либер А. Е.* О симметрических обобщенных группах // Мат. сб. – 1953. – **33**, № 3. – С. 531 – 544.
11. *Глускин Л. М.* Идеалы полугрупп преобразований // Мат. сб. – 1959. – **47**, № 2. – С. 111 – 130.
12. *Зарецкий К. А.* Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им А. И. Герцена. – 1958. – **183**. – С. 251 – 263.
13. *Schein B. M.* Ordered sets, semilattices, distributive lattices and Boolean algebras with homomophic endomorphism semigroups // Fund. Math. – 1970. – **68**. – P. 31 – 50.
14. *Araújo J., Fernandes V., Jesus M., Maltcev V., Mitchell J.* Automorphisms of partial endomorphism semigroups // Publ. Math. Debrecen. – 2011. – **79**. – P. 23 – 39.

Одержано 16.05.12,
після доопрацювання — 12.11.12