УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

СТРУКТУРА НАПІВГРУПИ МАННА СКІНЧЕННОГО РАНГУ, КОЖНИЙ СТАБІЛЬНИЙ ПОРЯДОК ЯКОЇ Є ФУНДАМЕНТАЛЬНИМ АБО АНТИФУНДАМЕНТАЛЬНИМ

We describe the structure of a Munn semigroup of finite rank whose every stable order is fundamental or antifundamental.

Описывается структура полугруппы Манна конечного ранга, каждый стабильный порядок которой фундаментальный или антифундаментальный.

Напівгрупа Манна (див. [1]), тобто інверсна напівгрупа всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки відносно звичайної операції композиції бінарних відношень, відіграє фундаментальну роль у теорії зображень інверсних напівгруп (див. [2, с. 170]). Тому різнобічне вивчення таких напівгруп і їх класифікація є цілком актуальною задачею.

В даній роботі ми з'ясовуємо структуру напівгрупи Манна скінченного рангу, кожний стабільний порядок якої є фундаментальним або антифундаментальним (означення див. в п. 1). Основним результатом статті є теорема 1.

1. Основні означення і термінологія. Напіврешітка E називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з E не перевищує числа n.

Нехай E — напіврешітка скінченної довжини. Очевидно вона містить найменший елемент, який позначаємо через 0. Через T_E позначимо напівгрупу Манна, тобто інверсну напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки E відносно звичайної операції композиції бінарних відношень. Зрозуміло, що перетворення $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ є найменшим елементом напівгрупи T_E. Область визначення і множину значень перетворення $f \in T_E$ будемо відповідно позначати через $\mathrm{dom}(f)$ і $\mathrm{im}(f)$.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\mathrm{rank}: S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких $a, b \in S$ виконується нерівність $\mathrm{rank}(ab) \leq \min(\mathrm{rank}(a), \mathrm{rank}(b))$. Число $\mathrm{rank}(x)$ називають рангом елемента x.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\mathrm{rank}(a) = h\left(aa^{-1}\right)$, де $h\left(aa^{-1}\right)$ — висота ідемпотента aa^{-1} у напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [3]). Будемо говорити, що інверсна напівгрупа є напівгрупою скінченного рангу, якщо напіврешітка її ідемпотентів має скінченну довжину.

Нехай $f \in T_E$. Якщо $\mathrm{dom}(f) = aE$, то, за означенням, $\mathrm{rank}(f) = \mathrm{rank}(a)$ (де $\mathrm{rank}(a)$ — висота елемента a в напіврешітці E). В статті [4] доведено, що функція $\mathrm{rank}: T_E \to N_0$ є ранговою.

Відношення порядку τ на довільній напівгрупі S називається фундаментальним (див. [5] або [6, с. 289]), якщо впорядкована напівгрупа $(S; \tau)$ O-ізоморфна деякій напівгрупі часткових перетворень множини, яка впорядкована відношенням включення. Якщо τ — фундаментальне відношення порядку на напівгрупі S, то відношення порядку τ^{-1} називають антифундаментальним. Огляд результатів про фундаментальні порядки на інверсних напівгрупах можна знайти в [6].

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми. Кажуть, що елемент $b \in E$ є об'єднанням атомів, якщо існує підмножина C множини атомів така, що $\sup C = b$.

Ідеал I напівгрупи S називають щільним, якщо будь-який гомоморфізм напівгрупи S, ін'єктивний на ідеалі I, є ін'єктивним на всій напівгрупі S.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп можна знайти в [7].

2. Основний результат. Зрозуміло, що структура напівгрупи Манна T_E цілком однозначно визначається структурою напіврешітки E. Тому основний результат статті ми сформулюємо в термінах напіврешітки E.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок, а саме, нехай для будь-якого елемента $b \in E$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(b) \le 1$. Якщо $\operatorname{rank}(b) = 0$ для будь-якого елемента $b \in E$, то напіврешітка E тривіальна, а отже, напівгрупа Манна T_E теж тривіальна. Якщо ж у напіврешітці E існує елемент, ранг якого 1, то напівгрупа T_E, очевидно, є напівгрупою Брандта, причому її структурна група одноелементна. Стабільні порядки напівгрупи Брандта з тривіальною структурною групою дуже легко описуються (див. наступну лему). Цей результат можна вважати математичним фольклором.

Лема 1. *Якщо B є напівгрупою Брандта, структурна група якої тривіальна, то стабільні порядки напівгрупи B вичерпуються такими*: Δ, $\{0\} \times B \bigcup \Delta$, $B \times \{0\} \bigcup \Delta$, *де* 0 — *нуль напівгрупи Брандта, а* Δ — *тотожне перетворення на ній.*

Доведення. Легко перевіряється.

Ситуація значно ускладнюється, якщо в напіврешітці E існує принаймні один елемент x такий, що $\operatorname{rank}(x) \ge 2$. Надалі будемо розглядати саме такі напіврешітки.

Тепер сформулюємо основний результат статті.

Теорема 1. *Нехай E — напіврешітка скінченної довжини, T_E — відповідна напівгрупа Манна.*

Наступні умови є еквівалентними:

1) *будь-який стабільний порядок на напівгрупі T_E є фундаментальним або антифундаментальним*;

2) *кожний ненульовий елемент напіврешітки E є об'єднанням атомів*;

3) *ідеал $I_1 = \{f \in T_E \mid \operatorname{rank}(f) \le 1\}$ є щільним у напівгрупі T_E.*

Для доведення теореми нам знадобляться декілька лем.

Лема 2. *Нехай у напіврешітці P елементи a, b, c такі, що $a \prec c$, $b \prec c$ і $a \ne b$, тоді $c = \sup\{a, b\}$.*

Доведення. Нехай елемент $m \in P$ такий, що $a \le m$ і $b \le m$, тоді $am = a$, $bm = b$, крім того, за умовою $ac = a$ і $bc = b$. Звідси $acm = am = a$. Тобто $a \le$ $\le cm$. Припустимо, що $a = cm$. Оскільки $bc = b$, то $bcm = bm = b$ або $ba = b$, тобто $b \le a$.

1. Якщо $a = b$, то це суперечить умові.

2. Якщо $b < a$, то $b < a < c$, що суперечить умові.

Отже, $a < cm$, але ж $cm \le c$. Оскільки $a \prec c$, то $cm = c$. Остання рівність означає, що $c \le m$. Таким чином, $c = \sup\{a, b\}$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Якщо в напіврешітці P скінченної довжини існує ненульовий елемент, який не є об'єднанням атомів, то існує елемент $c \in P$, який покриває точно один ненульовий елемент.*

Доведення. Позначимо через K множину ненульових елементів, кожний з яких не можна подати як об'єднання атомів. Виберемо у множині K елемент (позначимо його через c), ранг якого найменший серед усіх елементів множини K. Очевидно, що $\operatorname{rank}(c) \geq 2$. Покажемо, що елемент c покриває точно один ненульовий елемент. Припустимо протилежне, тобто елемент c покриває два різних елементи (скажімо, x і y). Оскільки $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(c)$ і $\operatorname{rank}(y) < \operatorname{rank}(c)$, то кожний з елементів x і y є об'єднанням атомів. За попередньою лемою $c = \sup\{x, y\} = x \vee y$. Оскільки $x = \sup A_1$ і $y = \sup A_2$, де $A_1 \subseteq A$ і $A_2 \subseteq A$ (тут через A ми позначаємо множину всіх атомів напіврешітки P), то $c = x \vee y = \sup A_1 \vee \sup A_2 = \sup\left(A_1 \cup A_2\right)$. Тобто елемент c є об'єднанням атомів. Суперечність.

Лему 3 доведено.

Лема 4. *Нехай E — напіврешітка скінченної довжини. Якщо елемент c покриває точно один ненульовий елемент b, то $A(c) = A(b)$ (де $A(c)$ і $A(b)$ — атоми елементів c і b відповідно).*

Доведення. Оскільки $b \prec c$, то $A(b) \subseteq A(c)$. Нехай $a \in A(c)$, тоді $a < c$. Розглянемо будь-який максимальний ланцюжок, що з'єднує a і c. У цьому ланцюжку є елемент m такий, що $m \neq 0$ і $m \prec c$. За умовою елемент c покриває точно один ненульовий елемент (а саме, елемент b), тому $m = b$. Звідси $a \leq b$. Отже, $A(c) \subseteq A(b)$. Таким чином, $A(c) = A(b)$.

Лему 4 доведено.

Далі, нехай E — напіврешітка скінченної довжини, яка містить ненульовий елемент, що не є об'єднанням атомів. Тоді за лемою 3 існує елемент c ($\operatorname{rank}(c) \geq 2$), який покриває точно один елемент b. Позначимо через Δ_c і Δ_b відповідно тотожні перетворення головних ідеалів cE і bE. Очевидно, що $\Delta_b \subset \Delta_c$. На напівгрупі Манна T_E будемо розглядати бінарне відношення $\rho = \{\langle f \circ \Delta_c \circ \varphi,\ f \circ \Delta_b \circ \varphi \rangle \mid f, \varphi \in T_E\}$. Позначимо через ρ^t транзитивне замикання бінарного відношення ρ.

Лема 5. *Якщо* $(\alpha, \beta) \in \rho^t$, *то* $\beta \subseteq \alpha$.

Доведення. Оскільки ρ^t є транзитивним замиканням бінарного відношення ρ, то існують $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in T_E$ такі, що $(\alpha, \tau_1) \in \rho$, $(\tau_1, \tau_2) \in \rho, \ldots, (\tau_{n-1}, \tau_n) \in \rho$ і $(\tau_n, \beta) \in \rho$. Оскільки $\Delta_b \subset \Delta_c$, то $f \circ \Delta_b \circ \varphi \subseteq f \circ \Delta_c \circ \varphi$ для будь-яких $f, \varphi \in T_E$. Отже, $\beta \subseteq \tau_n \subseteq \tau_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq \tau_2 \subseteq \tau_1 \subseteq \alpha$. Таким чином, $\beta \subseteq \alpha$.

Лему 5 доведено.

Тепер ми можемо довести імплікацію $1 \rightarrow 2$. Отже, нехай будь-який стабільний порядок на напівгрупі T_E є фундаментальним або антифундаментальним. Нам треба довести, що будь-який ненульовий елемент напіврешітки E є об'єднанням атомів. Припустимо протилежне, тобто в напіврешітці E існує ненульовий елемент, який не можна подати у вигляді об'єднання атомів. Тоді за лемою 3 існує елемент c, який покриває точно один ненульовий елемент (скажімо, b). Тобто $b \prec c$, причому $\operatorname{rank}(c) \geq 2$. Розглянемо на T_E бінарне відношення $\Sigma = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} \times I_1 \cup \rho^t \cup \Delta$, де $\rho = \{\langle f \circ \Delta_c \circ \varphi,\ f \circ \Delta_b \circ \varphi \rangle \mid f, \varphi \in T_E\}$, $I_1 = \{f \in T_E \mid \operatorname{rank}(f) \leq 1\}$, $\Delta = \{\langle \psi, \psi \rangle \mid \psi \in T_E\}$. Очевидно, що бінарне відношення Σ є рефлексивним. Далі, бінарне відношення ρ, очевидно, є стабільним. Легко показати, що транзитивне замикання стабільного бінарного відношення теж є стабільним. Отже, ρ^t — стабільне бінарне відношення. Звідси випливає, що Σ є також стабільним бінарним відношенням. Тепер покажемо транзитивність бінарного відношення Σ. Розглянемо можливі випадки.

Випадок 1. $(\alpha, \beta) \in \rho^t$ і $(\beta, \gamma) \in \rho^t$.

Оскільки ρ^t — транзитивне бінарне відношення, то $(\alpha, \gamma) \in \rho^t$.

***Випадок* 2.** $(\alpha, \beta) \in \rho^t$ і $(\beta, \gamma) \in \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \times I_1$.

Тоді $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Покажемо, що $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оскільки $(\alpha, \beta) \in \rho^t$, то існують $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in T_E$ такі, що $(\alpha, \tau_1) \in \rho$, $(\tau_1, \tau_2) \in \rho, \ldots, (\tau_{n-1}, \tau_n) \in \rho$, $(\tau_n, \beta) \in \in \rho$. Оскільки $(\tau_n, \beta) \in \rho$, то існують $f, \varphi \in T_E$ такі, що $\tau_n = f \circ \Delta_c \circ \varphi$ і $\beta = = f \circ \Delta_b \circ \varphi$. Нехай $\operatorname{im}(f) = mE$ і $\operatorname{dom}(\varphi) = kE$. Покажемо, що $mE \cap bE \cap kE = = mbkE = \{0\}$. Припустимо протилежне, тобто існує елемент z такий, що $z \neq 0$ і $z \in mE \cap bE \cap kE$. Звідси випливає, що існують ненульові елементи x, $y \in E$ такі, що $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in f$, $\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} \in \Delta_b$ і $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \in \varphi$. Отже, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f \circ \Delta_b \circ \varphi$, причому $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Суперечність. Таким чином, $mE \cap bE \cap kE = mbkE = \{0\}$, звідки $mbk = = 0$. Оскільки $b \prec c$, причому елемент c покриває єдиний елемент, то звідси легко випливає, що $mck = 0$ і $mE \cap cE \cap kE = \{0\}$. Отже, $f \circ \Delta_c \circ \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = = \tau_n$. Оскільки $(\tau_{n-1}, \tau_n) \in \rho$ і $\tau_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то, як і вище, доводимо, що $\tau_{n-1} = = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогічно $\tau_{n-1} = \ldots = \tau_2 = \tau_1 = \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Таким чином, у другому випадку $\alpha = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Отже, $(a, \gamma) \in \Sigma$.

***Випадок* 3.** $(\alpha, \beta) \in \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \times I_1$ і $(\beta, \gamma) \in \rho^t$.

Тоді $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\beta \in I_1$. Якщо $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то, як легко показати, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Нехай тепер $\beta = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$, де a_1 і a_2 — атоми напіврешітки E. Оскільки $(\beta, \gamma) \in \rho^t$, то існують $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n \in T_E$ такі, що $(\beta, \mu_1) \in \rho$, $(\mu_1, \mu_2) \in \rho, \ldots$ $\ldots, (\mu_{n-1}, \mu_n) \in \rho$, $(\mu_n, \gamma) \in \rho$. Далі, $(\beta, \mu_1) \in \rho$ і $\beta = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$. Покажемо, що $\mu_1 = \beta$. Оскільки $(\beta, \mu_1) \in \rho$, то існують $f, \varphi \in T_E$ такі, що $\beta = f \circ \Delta_c \circ \varphi$ і $\mu_1 = f \circ \Delta_b \circ \varphi$. Оскільки $\Delta_b \subset \Delta_c$, то $\mu_1 \subseteq \beta$. Далі, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = f \circ \Delta_c \circ \varphi$, тому існує атом $a \in E$ такий, що $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq f$, $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq \Delta_c$, $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \subseteq \varphi$. Очевидно, $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ є атомом напіврешітки $E(T_E)$, причому $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq \Delta_c$. Оскільки $\Delta_b \prec \Delta_c$, то за лемою 4 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq \Delta_b$. Звідси випливає, що $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \subseteq \mu_1$. Крім того, як вже зазначалося, $\mu_1 \subseteq \beta$, тому $\mu_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \beta$. Оскільки $(\mu_1, \mu_2) \in \in \rho$, $(\mu_2, \mu_3) \in \rho, \ldots, (\mu_n, \gamma) \in \rho$, то, міркуючи аналогічним чином, одержуємо $\mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = \gamma = \beta$. Отже, $(\alpha, \gamma) \in \Sigma$.

Лему 5 доведено.

Тепер покажемо, що бінарне відношення Σ є антисиметричним.

Розглянемо можливі випадки.

***Випадок* А.** $(\alpha, \beta) \in \rho^t$ і $(\beta, \alpha) \in \rho^t$.

Тоді за лемою 5 $\beta \subseteq \alpha$ і $\alpha \subseteq \beta$. Звідси $\alpha = \beta$.

***Випадок* В.** $(\alpha, \beta) \in \rho^t$ і $(\beta, \alpha) \in \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \times I_1$. Оскільки $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то, як було доведено вище, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тобто $\alpha = \beta$. Таким чином, бінарне відношення Σ є стабільним порядком на T_E. Відомо [6, с. 303], що стабільний порядок Ω на інверсній напівгрупі є фундаментальним тоді і тільки тоді, коли $\Omega \subseteq \omega$ (де ω — канонічний порядок). Але очевидно, що $\Sigma \not\subset \omega$ і $\Sigma \not\subset \omega^{-1}$. Суперечність.

Далі обґрунтуємо імплікацію $2 \rightarrow 1$. А саме, нехай будь-який ненульовий елемент напіврешітки E є об'єднанням атомів. Нам треба довести, що будь-який стабільний порядок на інверсній напівгрупі T_E є фундаментальним або антифундаментальним. Перед тим як перейти до доведення сформулюємо кілька потрібних результатів.

Результат 1 [8, с. 564]. Для ідеалу I інверсної напівгрупи наступні властивості є еквівалентними:

1) I — ліворедуктивний ідеал;
2) I — праворедуктивний ідеал;
3) I — редуктивний ідеал.

Результат 2 [8, с. 564]. Для ідеалу I інверсної напівгрупи S наступні властивості є еквівалентними:

1) I є щільним ідеалом;
2) I є $\vee$-базисним ідеалом;
3) I є редуктивним ідеалом.

(Друга властивість означає, що кожний елемент $b \in S$ можна подати у вигляді $b = \sup A$, де $A \subseteq I$).

Далі, нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем 0, $b \in S$ — довільний елемент напівгрупи S. Позначимо через $R_1(b)$ множину $\{x \in S \mid x \leq \leq b \wedge \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$.

Результат 3 [9]. Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Гомоморфізм $F\colon b \mapsto R_1(b)$ є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є щільним.

Результат 4 [9]. Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Якщо ідеал $I_1 = \{f \in T_E \mid \operatorname{rank}(f) \leq 1\}$ є щільним, то має місце еквівалентність $R_1(b) \subseteq R_1(c) \Leftrightarrow b \leq c$ для будь-яких $b, c \in S$.

Спочатку покажемо, що ідеал $I_1 = \{f \in T_E \mid \operatorname{rank}(f) \leq 1\}$ є щільним. Для обґрунтування цього факту доведемо низку лем.

Лема 6. *Нехай E — напіврешітка скінченної довжини, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів. Якщо $\varphi \in T_E$ такий, що $R_1(\varphi) \subseteq E(T_E)$, то $\varphi \in E(T_E)$.*

Доведення проведемо індукцією за рангом. Якщо $\operatorname{rank}(\varphi) = 1$, то, очевидно, що $\varphi \in E(T_E)$. Нехай будь-який елемент α напівгрупи T_E, ранг якого $\leq k$ і $R_1(\alpha) \subseteq E(T_E)$, є ідемпотентом. Доведемо, що будь-який елемент ψ, ранг якого $k+1$ і $R_1(\psi) \subseteq E(T_E)$, теж є ідемпотентом. Нехай $\operatorname{dom}(\psi) = bE$. Оскільки будь-який ненульовий елемент напіврешітки E є об'єднанням атомів і, крім того, $\operatorname{rank}(b) \geq 2$, то елемент b покриває принаймні два різних елементи (скажімо, x і y). Виберемо будь-який елемент z такий, що $z < b$. Тоді

$\operatorname{rank}(\Delta_z) \le k$, а отже, $\operatorname{rank}(\Delta_z \circ \psi) \le k$. Оскільки $\Delta_z \circ \psi \subset \psi$, то $R_1(\Delta_z \circ \circ\, \psi) \subseteq R_1(\psi) \subseteq E(T_E)$. Звідси, за індуктивним припущенням, $\Delta_z \circ \psi$ є ідемпотентом. Отже, $z\psi = z$. Доведемо тепер, що $b\psi = b$. Припустимо протилежне, тобто $b\psi \ne b$. Нехай $b\psi = c$. Цілком очевидно, що відношення покриття зберігається при ізоморфізмі. Отже, оскільки $x \prec b$ і $y \prec b$, то $x \prec c$ і $y \prec c$. Звідси випливає, що $bc = x$ і водночас $bc = y$. Суперечність. Таким чином, $b\psi = b$. Отже, ψ — ідемпотент.

Лему 6 доведено.

Далі, нехай P — напіврешітка скінченної довжини. Для елемента $b \ne 0$ позначимо через $A(b)$ множину $\{x \in P \mid x \le b \wedge \operatorname{rank}(x) = 1\}$.

Лема 7. *Нехай P — напіврешітка скінченної довжини, будь-який ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів. Тоді для будь-якого елемента $b \ne 0$ $\sup A(b) = b$.*

Доведення. Оскільки за умовою будь-який елемент напіврешітки P є об'єднанням атомів, то $b = \sup B$, де B — деяка підмножина множини атомів. Очевидно, що $B \subseteq A(b)$. Нехай елемент c такий, що для будь-якого $x \in A(b)$ виконується нерівність $x \le c$, тоді c — верхня межа множини B. Оскільки $b = \sup B$, то $b \le c$. Отже, $b = \sup A(b)$.

Лему 7 доведено.

Лема 8. *Нехай E — напіврешітка скінченної довжини, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів, T_E — відповідна напівгрупа Манна. Нехай $f, \varphi \in T_E$ такі, що $R_1(f) = R_1(\varphi)$, тоді $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(\varphi)$, $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(\varphi)$.*

Доведення. Нехай $\operatorname{dom}(f) = bS$ і $\operatorname{dom}(\varphi) = cS$. Покажемо, що $A(b) = A(c)$. Нехай $a \in A(b)$, тоді $a \le b$, звідки $a \in \operatorname{dom}(f)$. Нехай $af = a_1$. Оскільки a — атом, то a_1 теж є атомом, тому $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \in T_E$ і $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \in R_1(f)$. Оскільки $R_1(f) = R_1(\varphi)$, то $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \in R_1(\varphi)$. Звідси $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \subseteq \varphi$, тоді $a \in \operatorname{dom}(\varphi)$, тобто $a \in cE$, а отже, $a \le c$. Крім того, $\operatorname{rank}(a) = 1$. Отже, $a \in A(c)$. Таким чином, $A(b) \subseteq A(c)$. Аналогічно доводимо, що $A(c) \subseteq A(b)$. Звідси $A(c) = A(b)$. Тоді за лемою 7 $b = c$. Отже, $bS = cS$, тобто $\operatorname{dom}(f) = \operatorname{dom}(\varphi)$. Аналогічно можна довести, що $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(\varphi)$.

Лему 8 доведено.

Лема 9. *Нехай E — напіврешітка скінченної довжини, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів, T_E — відповідна напівгрупа Манна.*

Якщо $f, \varphi \in T_E$ такі, що $R_1(f) = R_1(\varphi)$, то $f \circ \varphi^{-1}$ — ідемпотент.

Доведення. Нехай $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \subseteq f \circ \varphi^{-1}$, де a_1 і a_2 — атоми напіврешітки E. Тоді існує атом $a \in E$ такий, що $\begin{pmatrix} a_1 \\ a \end{pmatrix} \in f$ і $\begin{pmatrix} a \\ a_2 \end{pmatrix} \in \varphi^{-1}$, звідки $\begin{pmatrix} a_2 \\ a \end{pmatrix} \in \varphi$. Отже, $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R_1(f)$ і $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in R_1(\varphi)$. Оскільки $R_1(f) = R_1(\varphi)$, то $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \in R_1(\varphi)$, тому $\begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq \varphi$. Позаяк $\begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \subseteq \varphi$, то з останніх двох включень маємо $a_1 = a_2$. Отже, $R_1(f \circ \varphi^{-1}) \subseteq E(T_E)$, тому за лемою 6 $f \circ \varphi^{-1}$ — ідемпотент.

Лему 9 доведено.

Лема 10. *Нехай* S — *довільна інверсна напівгрупа. Якщо для елементів* b *і* c *виконуються рівності* $bb^{-1} = cc^{-1}$, $b^{-1}b = c^{-1}c$ *і* $bc^{-1} \in E(S)$, *то* $b = c$.

Доведення. За умовою $bc^{-1}bc^{-1} = bc^{-1}$, тому $bc^{-1}bc^{-1}c = bc^{-1}c$, звідки $bc^{-1}bb^{-1}b = bb^{-1}b$ або $bc^{-1}b = b$. З останньої рівності маємо $bc^{-1}bb^{-1} = bb^{-1}$. Звідси (враховуючи рівність $bb^{-1} = cc^{-1}$) $bc^{-1}cc^{-1} = cc^{-1}$, отже, $bc^{-1} = cc^{-1}$, тому $bc^{-1}c = cc^{-1}c = c$. Крім того, $bc^{-1}c = bb^{-1}b = b$. Звідси $b = c$.

Лему 10 доведено.

Лема 11. *Нехай* E — *напіврешітка скінченної довжини, будь-який ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів,* T_E — *відповідна напівгрупа Манна. Якщо* $f, \varphi \in T_E$ *такі, що* $R_1(f) = R_1(\varphi)$, *то* $f = \varphi$.

Доведення. За лемою 8 $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varphi)$ і $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(\varphi)$. За лемою 9 $f \circ \circ \varphi^{-1}$ є ідемпотентом. Тоді за лемою 10 $f = \varphi$.

Лему 11 доведено.

Тепер ми можемо перейти до доведення імплікації $2 \to 1$. Отже, нехай E — напіврешітка скінченної довжини, кожний ненульовий елемент якої є об'єднанням атомів. Нехай Ω — стабільний порядок на напівгрупі T_E, відмінний від рівності. Враховуючи результат (див. [6, с. 303]), нам слід довести, що $\Omega \subseteq \omega$ або $\Omega \subseteq \omega^{-1}$ (де ω — канонічний порядок на T_E). Оскільки бінарне відношення Ω відмінне від рівності, то існують $\alpha, \lambda \in T_E$ такі, що $(\alpha, \lambda) \in \Omega$ і $\alpha \neq \neq \lambda$. В статті [9] у загальній формі доведено, що функція $F: \sigma \mapsto R_1(\sigma)$ (де $\sigma \in T_E$) — гомоморфізм із напівгрупи T_E в наднапівгрупу $P(I_1)$, тобто напівгрупу всіх непорожніх підмножин ідеалу $I_1 = \{f \in T_E \mid \mathrm{rank}(f) \leq 1\}$ відносно звичайного глобального множення. За лемою 11 цей гомоморфізм є ін'єктивним, а отже (див. результат 3 у в цій статті), ідеал I_1 є щільним. З результату 2 випливає, що ідеал I_1 є редуктивним, а отже, згідно з результатом 1 право- і ліворедуктивним. Оскільки $\alpha \neq \lambda$, то існує $\beta \in I_1$ такий, що $\beta \circ \alpha \neq \beta \circ \lambda$. Очевидно, що ідеал I_1 є напівгрупою Брандта з тривіальною структурною групою, тому за лемою 1 можливі лише два випадки:

1) $\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\mathrm{rank}(\beta \circ \lambda) = 1$;

2) $\mathrm{rank}(\beta \circ \alpha) = 1$ і $\beta \circ \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Нехай для конкретності має місце перший випадок, тоді

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \circ \lambda\right) \in \Omega. \tag{1}$$

Доведемо, що в цьому випадку $\Omega \subseteq \omega$ (де ω — канонічний порядок на інверсній напівгрупі T_E). Отже, нехай $(\varphi, \eta) \in \Omega$. Нам треба довести, що $\varphi \subseteq \eta$, або, враховуючи результат 4, потрібно показати, що $R_1(\varphi) \subseteq R_1(\eta)$. Припустимо протилежне, тобто існує елемент $\psi \in R_1(\varphi)$ і $\psi \notin R_1(\eta)$. Тоді $\psi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а отже, $\mathrm{rank}(\psi) = 1$. Оскільки $\psi \in R_1(\varphi)$, то $\psi \subseteq \varphi$. Звідси $\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi = \psi$. Позаяк $(\varphi, \eta) \in \Omega$, то $(\psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi, \psi \circ \psi^{-1} \circ \eta) \in \Omega$. Тобто $(\psi, \psi \circ \psi^{-1} \circ \eta) \in \in \Omega$. Звідси

$$\left(\psi, \psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi\right) \in \Omega. \tag{2}$$

Розглянемо елемент $\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi$. Можливі два випадки:

1) $\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

2) $\operatorname{rank}(\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi) = 1$.

Якщо $\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $\left(\psi, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \Omega$, причому, як вже зазначалося вище, $\psi \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Оскільки ідеал I_1 є 0-простою напівгрупою, то $I_1 \circ \psi \circ \circ I_1 = I_1$. Отже, знайдуться елементи $\tau, \xi \in T_E$ такі, що $\beta \circ \lambda = \tau \circ \psi \circ \xi$. Таким чином, $\left(\beta \circ \lambda, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \in \Omega$ і $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta \circ \lambda\right) \in \Omega$ (див. співвідношення (1)). Звідси $\beta \circ \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Суперечність.

Нехай тепер $\operatorname{rank}(\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi) = 1$. З леми 1 (враховуючи співвідношення (2)) випливає $\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi = \psi$. Але $\psi \circ \psi^{-1} \circ \eta \circ \psi^{-1} \circ \psi \subseteq \subseteq \eta$, тобто $\psi \subseteq \eta$. Отже, $\psi \in R_1(\eta)$. Суперечність. Таким чином, $R_1(\varphi) \subseteq \subseteq R_1(\eta)$. Звідси (див. результат 4) $\varphi \subseteq \eta$, тобто $(\varphi, \eta) \in \omega$.

Отже, ми довели еквівалентність умов 1 і 2 (див. теорему 1).

Імплікація $2 \to 3$ безпосередньо випливає з леми 11 і результату 3. Тепер обґрунтуємо імплікацію $3 \to 2$. Для цього доведемо ще одне твердження.

Лема 12. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченної довжини і ідемпотенти b та c такі, що $R_1(b) = R_1(c)$. Тоді для будь-якого x, що належить ідеалу $I_1 = \{z \in S \mid \operatorname{rank}(z) \leq 1\}$, має місце рівність $xb = xc$.*

Доведення. Нехай $x \in I_1$, тоді, очевидно, $x^{-1}xb \in R_1(b)$. Оскільки за умовою $R_1(b) = R_1(c)$, то $x^{-1}xb \in R_1(c)$. Звідси $x^{-1}xbc = x^{-1}xb$. Отже,

$$xb = xx^{-1}xb = xx^{-1}xbc = xbc. \tag{3}$$

Аналогічно, оскільки $x^{-1}xc \in R_1(c)$ і $R_1(b) = R_1(c)$, то $x^{-1}xc \in R_1(b)$. Звідси $x^{-1}xcb = x^{-1}xc$. Отже,

$$xc = xx^{-1}xc = xx^{-1}xcb = xbc. \tag{4}$$

З (3) і (4) випливає, що $xb = xc$.

Лему 12 доведено.

Тепер імплікацію $3 \to 2$ доведемо від супротивного. Припустимо, що в напіврешітці є ненульовий елемент, який не можна подати як об'єднання атомів. Тоді за лемою 3 існує елемент (позначимо його через c) такий, що покриває точно один ненульовий елемент (скажімо, b), до того ж $\operatorname{rank}(c) \geq 2$. Розглянемо Δ_b і Δ_c, які належать $E(T_E)$. Оскільки напіврешітка E ізоморфна напіврешітці $E(T_E)$, то Δ_c покриває точно один ідемпотент, а саме, Δ_b. З леми 4 випливає, що $R_1(\Delta_b) = R_1(\Delta_c)$. За лемою 12 робимо висновок, що для будь-якого $\alpha \in I_1 = \{f \in S \mid \operatorname{rank}(f) \leq 1\}$ має місце рівність $\alpha \circ \Delta_b = \alpha \circ \Delta_c$. Але ж $\Delta_b \neq \Delta_c$. Таким чином, ідеал I_1 не є ліворедуктивним, а отже (див. результати 1 і 2), ідеал I_1 не є щільним. Суперечність.

Імплікацію $3 \to 2$ доведено.

Далі, напівгрупу S називають переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень. Як і раніше, через E позначимо напіврешітку скінченної довжини (довжина не менша 2). У статті [10, с. 746] доведено, що кожний ненульовий ідеал переставної напівгрупи Манна T_E є щільним. Звідси одержуємо наслідки теореми 1.

***Наслідок* 1**. *Кожний стабільний порядок на переставній напівгрупі Манна є фундаментальним або антифундаментальним.*

***Наслідок* 2**. *Кожний ненульовий ідемпотент переставної напівгрупи Манна є об'єднанням атомів.*

1. *Munn W. D.* Fundamental inverse semigroups // Quart. J. Math. Oxford. – 1970. – **21**. – P. 157 – 170.
2. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.
3. *Денеч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
4. *Денеч В. Д.* Про переставні конгруенції на антигрупах скінченного рангу // Там же. – 2004. – **56**, № 3. – С. 346 – 351.
5. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 2. – С. 188 – 197.
6. *Goberstein S. M.* Fundamental order relations on inverse semigroups and on their generalizations // Semigroup Forum. – 1980. – **21**. – P. 285 – 328.
7. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1, 2.
8. *Schein B. M.* Completions, translational hulls and ideal extensions of inverse semigroups // Czech. Math. J. – 1973. – **98**. – P. 575 – 610.
9. *Денеч В. Д.* Про максимальні стабільні порядки на інверсній напівгрупі скінченного рангу з нулем // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 8. – С. 1035 – 1041.
10. *Денеч В. Д.* Структура переставної напівгрупи Манна скінченного рангу // Там же. – 2006. – **58**, № 6. – С. 742 – 746.

Одержано 29.01.08