УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

ПРО МАКСИМАЛЬНІ СТАБІЛЬНІ ПОРЯДКИ НА ІНВЕРСНІЙ НАПІВГРУПІ СКІНЧЕННОГО РАНГУ З НУЛЕМ

Maximal stable orders on semigroups from a class of inverse semigroups of finite rank are considered.

Рассматриваются максимальные стабильные порядки на полугруппах, принадлежащих некоторому классу инверсных полугрупп конечного ранга.

Вступ. Нехай A — довільна множина, S — довільна напівгрупа бінарних відношень на множині A із звичайною операцією композиції. Легко перевірити, що відношення включення на напівгрупі S є стабільним порядком (тобто порядком, що узгоджується з операцією композиції). Це спостереження лягло в основу статті Є. С. Ляпіна [1], який довів такий результат.

Нехай $W(A)$ — напівгрупа всіх часткових перетворень довільної множини A. Напівгрупу всіх перетворень виду $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (де $a \in A$ і $b \in A$) разом з порожнім перетворенням позначимо через K. Якщо напівгрупа часткових перетворень S така, що $K \subseteq S \subseteq W(A)$, то для будь-якого стабільного порядку ρ на напівгрупі S має місце $\rho \subseteq \Omega$ або $\rho \subseteq \Omega^{-1}$, де Ω — відношення включення між перетвореннями.

В статті [2] одержано більш загальний результат. Сформулюємо його.

Нехай $(A_i)_{i \in I}$ — сім'я рівнопотужних множин, які містять спільний елемент 0, до того ж $A_i \bigcap A_j = 0$, якщо $i \neq j$. Позначимо через I інверсну напівгрупу часткових взаємно однозначних перетворень множини $A = \bigcup A_i$, яка має такі властивості:

а) для будь-якого $f \in I$ $af = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$;

б) якщо $f \in I$, то $f^{-1} \in I$;

в) якщо $f \in I$, то або $\operatorname{dom}(f)$ і $\operatorname{ran}(f)$ ($\operatorname{dom}(f)$ і $\operatorname{ran}(f)$ — відповідно область визначення і множина значень перетворення f) належать сім'ї $(A_i)_{i \in I}$, або $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

г) якщо множини A_k і A_m належать сім'ї $(A_i)_{i \in I}$, то існує перетворення $\varphi \in I$ таке, що $\operatorname{dom}(\varphi) = A_k$ і $\operatorname{ran}(\varphi) = A_m$.

Напівгрупа є інверсною напівгрупою Брандта і будь-яку напівгрупу Брандта з точністю до ізоморфізму можна подати в такому вигляді.

Тепер сформулюємо основний результат із статті [2].

Теорема [2, с. 15]. *Нехай S — напівгрупа бінарних відношень на множині $A = \bigcup A_i$ така, що напівгрупа Брандта I (її означено вище) є біідеалом у ній. Крім того, будемо вимагати, щоб стабільні порядки структурної групи напівгрупи I вичерпувались тривіальним порядком.*

Тоді якщо ρ — стабільне відношення порядку на напівгрупі S, то $\rho \subseteq \Omega$ або $\rho \subseteq \Omega^{-1}$ (де через Ω позначено відношення включення).

В даній статті продовжуються дослідження на цю тему. Основним результатом статті є теорема 3.

1. Основна термінологія і позначення. Напіврешітка E називається напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з E не перевищує n. Очевидно, що напіврешітка скінченної довжини має найменший елемент — нуль.

Нехай S — довільна напівгрупа, а N_0 — множина всіх невід'ємних цілих чисел. Функцію $\operatorname{rank}: S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких елементів a і $b \in S$ виконується нерівність

$$\operatorname{rank}(ab) \le \min\{\operatorname{rank}(a), \operatorname{rank}(b)\}.$$

Число $\operatorname{rank}(a)$ називається рангом елемента a.

Нехай S — інверсна напівгрупа, напіврешітка ідемпотентів якої має скінченну довжину. Функція $\operatorname{rank}(a) = h(aa^{-1})$, де $h(aa^{-1})$ — висота ідемпотента aa^{-1} в напіврешітці ідемпотентів напівгрупи S, є ранговою функцією (див. [3, с. 470]). Будемо говорити, що інверсна напівгрупа є інверсною напівгрупою скінченного рангу, якщо напіврешітка її ідемпотентів має скінченну довжину.

Напівгрупа називається Δ-напівгрупою, якщо її конгруенції утворюють ланцюжок відносно включення.

Напівгрупа називається переставною, якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно звичайної операції композиції бінарних відношень.

Нетривіальна інверсна напівгрупа з нулем називається примітивною, якщо будь-який її ненульовий ідемпотент є примітивним.

Всі інші необхідні означення можна знайти в [4].

2. Гомоморфізм інверсної напівгрупи скінченного рангу з нулем в глобальну наднапівгрупу примітивної інверсної напівгрупи. Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Легко перевірити, що $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le 1\}$ є примітивною інверсною напівгрупою. Позначимо через $P(I_1)$ глобальну наднапівгрупу напівгрупи I_1, тобто напівгрупу всіх непорожніх підмножин множини I_1 відносно звичайної операції глобального множення. Далі, нехай $b \in S$ — довільний елемент напівгрупи S. Позначимо через $R_1(b)$ множину $\{x \in S \mid x \le b \wedge \operatorname{rank}(x) \le 1\}$.

Теорема 1. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Функція $F: b \mapsto R_1(b)$ є гомоморфізмом напівгрупи в глобальну наднапівгрупу $P(I_1)$.*

Доведення. Для будь-яких b і $c \in S$ потрібно довести рівність $R_1(b \cdot c) = R_1(b) \cdot R_1(c)$.

Покажемо спочатку, що $R_1(b \cdot c) \subseteq R_1(b) \cdot R_1(c)$. Нехай $a \in R_1(b \cdot c)$.

Якщо $a = 0$, то немає що доводити. Нехай тепер $a \ne 0$, тобто $\operatorname{rank}(a) = 1$ і $a \le bc$. Помножимо останню нерівність зліва на aa^{-1}. Одержимо $a \le aa^{-1}bc$. Отриману нерівність справа помножимо на $a^{-1}a$. Тоді

$$a \le aa^{-1}bca^{-1}a. \tag{1}$$

Далі,

$$1 = \operatorname{rank}(a) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}bca^{-1}a) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}) = 1.$$

Отже, $\operatorname{rank}(aa^{-1}bca^{-1}a) = 1$. Звідси, враховуючи нерівність (1), одержуємо

$$a = aa^{-1}bca^{-1}a. \tag{2}$$

Далі, $\operatorname{rank}(aa^{-1}b) \le \operatorname{rank}(aa^{-1}) = 1$. Якщо припустити, що $\operatorname{rank}(aa^{-1}b) = 0$, то $\operatorname{rank}(a) = 0$. Суперечність. Отже, $\operatorname{rank}(aa^{-1}b) = 1$. Аналогічно $\operatorname{rank}(ca^{-1}a) = 1$. Далі, оскільки $aa^{-1}b \le b$ і $ca^{-1}a \le c$, то, враховуючи рівність (2), робимо висновок, що $a \in R_1(b) \cdot R_1(c)$, тобто $R_1(b \cdot c) \subseteq R_1(b) \cdot R_1(c)$.

Тепер покажемо, що виконується включення $R_1(b) \cdot R_1(c) \subseteq R_1(b \cdot c)$. Нехай $a \in R_1(b) \cdot R_1(c)$, тоді $a = a_1 \cdot a_2$ для деяких $a_1 \in R_1(b)$ і $a_2 \in R_1(c)$. Оскільки $a_1 \le b$ і $a_2 \le c$, то має місце нерівність $a_1 \cdot a_2 \le b \cdot c$. Отже, $a \in R_1(b \cdot c)$. Таким чином, $R_1(b \cdot c) = R_1(b) \cdot R_1(c)$. Тобто функція $F: b \mapsto R_1(b)$ є гомоморфізмом з інверсної напівгрупи S в глобальну наднапівгрупу $P(I_1)$.

Закономірно поставити питання: коли гомоморфізм $F: b \mapsto R_1(b)$ буде ін'єктивним? Перед тим як сформулювати теорему, яка дає відповідь на поставлене питання, нагадаємо означення щільного ідеалу (див. [5, с. 48]).

Ідеал I напівгрупи S називається щільним, якщо будь-який гомоморфізм напівгрупи S, ін'єктивний на ідеалі I, є ін'єктивним на S.

Теорема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Гомоморфізм $F: b \mapsto R_1(b)$ є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le 1\}$ є щільним.*

Доведення. Нехай ідеал I_1 є щільним. Очевидно, що гомоморфізм F є ін'єктивним на I_1, тому з означення щільності випливає, що F — ін'єктивний гомоморфізм.

Нехай тепер гомоморфізм F є ін'єктивним. Покажемо, що ідеал I_1 є щільним.

Отже, нехай Φ — гомоморфізм напівгрупи S, ін'єктивний на I_1. Покажемо, що Φ є ін'єктивним на S. Нехай $\Phi(b) = \Phi(c)$. Потрібно довести, що $b = c$. Виберемо довільний елемент $a \in R_1(b)$, тоді $\Phi(aa^{-1})\Phi(b) = \Phi(aa^{-1})\Phi(c)$, звідки $\Phi(aa^{-1}b) = \Phi(aa^{-1}c)$. Оскільки $a \in R_1(b)$, то $a \le b$, а отже, $aa^{-1}b = a$. Таким чином, $\Phi(a) = \Phi(aa^{-1}c)$. Оскільки $a \in I_1$ і $aa^{-1}c \in I_1$, то $aa^{-1}c = a$. Звідси $a^{-1}c = a^{-1}a$, тобто $a \le c$, а отже, $a \in R_1(c)$. Таким чином, $R_1(b) \subseteq R_1(c)$. Аналогічно можна показати, що $R_1(c) \subseteq R_1(b)$. Отже, $R_1(c) = R_1(b)$. Позаяк за умовою гомоморфізм $F: b \mapsto R_1(b)$ є ін'єктивним, то $b = c$.

Теорему доведено.

Лема 1. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем. Якщо ідеал I_1 напівгрупи S є щільним, то має місце еквівалентність $R_1(b) \subseteq R_1(c) \Leftrightarrow b \le c$.*

Доведення. Імплікація $b \le c \Rightarrow R_1(b) \subseteq R_1(c)$ є очевидною. Доведемо зворотну імплікацію, тобто $R_1(b) \subseteq R_1(c) \Rightarrow b \le c$. В статті [6] доведено таку теорему (твердження 2.18):

для ідеалу I інверсної напівгрупи S наступні властивості є еквівалентними:

1) I — щільний ідеал;

2) I — $\vee$-базисний ідеал;

3) I — редуктивний ідеал.

Друга властивість означає, що кожний елемент $b \in S$ можна подати у вигляді $b = \sup A$, де $A \subseteq I$.

Тепер перейдемо до доведення леми. Оскільки за умовою ідеал I_1 є щільним, то $b = \sup A$ для деякої множини A, яка включається в I_1. Отже, $A \subseteq R_1(b)$. Звідси $b = \sup A \le \sup R_1(b) \le b$, тоді $\sup R_1(b) = b$. Отже, якщо $R_1(b) \subseteq R_1(c)$, то $b = \sup R_1(b) \le \sup R_1(c) = c$, тобто $b \le c$.

Лему доведено.

3. Стабільні порядки на інверсній напівгрупі скінченного рангу з нулем. Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем, ідеали якої лінійно впорядковані відносно включення. Нехай Σ — стабільний квазіпорядок на S. Легко перевірити, що $I^l = \{x \in S \mid \langle x, 0\rangle \in \Sigma\}$ і $I^r = \{x \in S \mid \langle 0, x\rangle \in \Sigma\}$ є ідеалами напівгрупи S. Отже, стабільному квазіпорядку Σ відповідає впорядкована пара ідеалів $\langle I^l, I^r\rangle$. Легко показати, що $I^l \times I^r \subseteq \Sigma$. Згідно з теоремою 2 (див. [3]) кожний ідеал напівгрупи S є ранговим, отже, існують невід'ємні цілі числа k і m такі, що

$$I^l = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le k\} \quad \text{і} \quad I^r = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le m\}.$$

Пару чисел $\langle k, m\rangle$ назвемо індексом стабільного квазіпорядку Σ і позначимо через $\operatorname{ind}(\Sigma)$.

Лема 2. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем, ідеали якої лінійно впорядковані відносно включення.*

Якщо τ є стабільним порядком на напівгрупі S і $\operatorname{ind}(\tau) = \langle k, m\rangle$, то $k = 0$ або $m = 0$.

Доведення. Припустимо протилежне, тобто $k \ne 0$ і $m \ne 0$. Для конкретності нехай $k \le m$. Тоді $I^l \subseteq I^r$. Оскільки $k \ne 0$, то існує елемент $a \in I^l$ такий, що $a \ne 0$ і $\langle a, 0\rangle \in \tau$. Оскільки $I^l \subseteq I^r$, то $a \in I^r$, тобто $\langle 0, a\rangle \in \tau$. Позаяк τ — антисиметричне бінарне відношення, то $a = 0$. Суперечність.

Лему доведено.

Тепер сформулюємо і доведемо основну теорему статті.

Теорема 3. *Нехай S — інверсна напівгрупа скінченного рангу з нулем, ідеали якої лінійно впорядковані відносно включення. Нехай ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \le 1\}$ є напівгрупою Брандта, причому стабільні порядки структурної групи ідеалу I_1 вичерпуються тривіальним порядком. Крім того, ідеал I_1 є щільним.*

Якщо бінарне відношення Σ є стабільним порядком на напівгрупі S, до того ж $\operatorname{ind}(\Sigma) = \langle 0, m\rangle$, то $\Sigma \subseteq \omega$ (де ω — канонічний порядок на інверсній напівгрупі S).

Доведення. Нехай $\langle b, c\rangle \in \Sigma$. Покажемо, що $b \le c$ (де $\le$ — інше позначення канонічного порядку ω). З огляду на лему 1 нам потрібно довести, що $R_1(b) \subseteq R_1(c)$. Припустимо протилежне, тобто існує елемент a такий, що $a \in R_1(b)$ і $a \notin R_1(c)$. Тоді $a \ne 0$, а отже, $\operatorname{rank}(a) = 1$. Оскільки $a \in R_1(b)$, то $a \le b$. Звідси $aa^{-1}b = a$. Позаяк $\langle b, c\rangle \in \Sigma$, то $\langle aa^{-1}b, aa^{-1}c\rangle \in \Sigma$, тобто $\langle a, aa^{-1}c\rangle \in \Sigma$. З останнього співвідношення випливає

$$\langle a, aa^{-1}ca^{-1}a\rangle \in \Sigma. \tag{3}$$

Розглянемо елемент $aa^{-1}ca^{-1}a$. Можливі два випадки:

1) $aa^{-1}ca^{-1}a = 0$;

2) $\operatorname{rank}(aa^{-1}ca^{-1}a) = 1$.

Якщо $aa^{-1}ca^{-1}a = 0$, то $\langle a, 0\rangle \in \Sigma$. Крім того, вище зазначалося, що $a \ne 0$. Проте за умовою $\operatorname{ind}(\Sigma) = \langle 0, m\rangle$. Отже, прийшли до суперечності. Якщо ж $\operatorname{rank}(aa^{-1}ca^{-1}a) = 1$, то $\operatorname{rank}\left(aa^{-1}ca^{-1}a(aa^{-1}ca^{-1}a)^{-1}\right) = 1$. Крім того, має місце нерівність $aa^{-1}ca^{-1}a(aa^{-1}ca^{-1}a)^{-1} \le aa^{-1}$. Оскільки

$$\operatorname{rank}\left(aa^{-1}ca^{-1}a(aa^{-1}ca^{-1}a)^{-1}\right) = \operatorname{rank}(aa^{-1}) = \operatorname{rank}(a) = 1,$$

то

$$aa^{-1}ca^{-1}a(aa^{-1}ca^{-1}a)^{-1} = aa^{-1}. \tag{4}$$

Аналогічно

$$(aa^{-1}ca^{-1}a)^{-1}aa^{-1}ca^{-1}a = a^{-1}a. \tag{5}$$

Із співвідношень (3) – (5), а також з умови, що структурна група ідеалу I_1 допускає лише тривіальний стабільний порядок, випливає рівність $aa^{-1}ca^{-1}a = a$. Але $aa^{-1}ca^{-1}a \leq c$, тобто $a \leq c$. Отже, $a \in R_1(c)$. Суперечність. Таким чином, $R_1(b) \subseteq R_1(c)$. З останнього включення за лемою 1 випливає $b \leq c$, тобто $\langle b, c\rangle \in \omega$.

Теорему доведено.

4. Наслідки і приклади. В цьому пункті сформулюємо деякі наслідки теореми 3.

Наслідок 1. *Максимальні стабільні порядки інверсної напівгрупи S, що задовольняє умови теореми* 3, *вичерпуються відношеннями ω і ω^{-1}, де ω — канонічний порядок на інверсній напівгрупі S.*

Наслідок 2. *Нехай S — скінченна інверсна Δ-напівгрупа (означення див. в п.* 1*) з нулем. Тоді для будь-якого стабільного порядку Σ на S має місце $\Sigma \subseteq \omega$ або $\Sigma \subseteq \omega^{-1}$, де ω — канонічний порядок.*

Доведення. Очевидно, що ідеали Δ-напівгрупи впорядковані відносно включення. Крім того, за умовою напівгрупа S є скінченною. З цих двох зауважень легко випливає, що ідеал $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є напігрупою Брандта. Легко показати (і це зазначено, наприклад, в статті [7]), що будь-який ненульовий ідеал напігрупи S є щільним, крім того, відомо (див., наприклад, [8, c. 297]), що на скінченній групі існує лише тривіальний стабільний порядок. Таким чином, за теоремою 3 (а також лемою 2) робимо висновок, що $\Sigma \subseteq \omega$ або $\Sigma \subseteq \omega^{-1}$.

Наслідок доведено.

Далі, нехай E — напіврешітка скінченної довжини. Позначимо через T_E напівгрупу Манна, тобто напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки E відносно звичайної операції суперпозиції.

Наслідок 3. *Якщо Σ — стабільний порядок на переставній напівгрупі Манна T_E, то $\Sigma \subseteq \omega$ або $\Sigma \subseteq \omega^{-1}$, де ω — канонічний порядок.*

Доведення. Очевидно, що інверсна напівгрупа T_E містить нуль. Оскільки за умовою вона є переставною, то її ідеали утворюють ланцюжок відносно включення (див. [9], теорему 4). Крім того, будь-який ідемпотент ідеалу $I_1 = \{x \in S \mid \operatorname{rank}(x) \leq 1\}$ є примітивним. З цих зауважень легко випливає, що ідеал I_1 є напівгрупою Брандта. В статті [10] доведено, що будь-який ненульовий ідеал напівгрупи T_E є щільним. Крім того, очевидно, що структурна група ідеалу I_1 є одноелементною. Отже, всі умови теореми 3 для напівгрупи T_E виконуються. Таким чином, $\Sigma \subseteq \omega$ або $\Sigma \subseteq \omega^{-1}$.

Наслідок доведено.

Стабільний порядок ρ на напівгрупі S називається фундаментальним (див. [11]), якщо впорядкована напівгрупа $\langle S, \rho\rangle$ O-ізоморфна деякій напівгрупі перетворень, яка впорядкована відношенням включення.

Якщо ρ — фундаментальний стабільний порядок на напівгрупі S, то ρ^{-1} називають антифундаментальним стабільним порядком. Відомо (див. [12, с. 303]), що відношення стабільного порядку τ на інверсній напівгрупі є фундаментальним тоді і тільки тоді, коли $\tau \subseteq \omega$ (де ω — канонічний порядок).

***Наслідок* 4.** *Нехай S — інверсна напівгрупа, що задовольняє умови теореми* 3. *Тоді будь-який стабільний порядок на S є фундаментальним або антифундаментальним.*

Нехай V — скінченновимірний векторний простір над скінченним полем. Позначимо через $\mathrm{Aut}_p(V)$ інверсну напівгрупу всіх часткових автоморфізмів між підпросторами векторного простору V. Легко перевірити, що всі умови теореми 3 для інверсної напівгрупи $\mathrm{Aut}_p(V)$ виконуються.

***Наслідок* 5.** *Для будь-якого стабільного порядку Σ на інверсній напівгрупі $\mathrm{Aut}_p(V)$ має місце $\Sigma \subseteq \omega$ або $\Sigma \subseteq \omega^{-1}$, де ω — канонічний порядок.*

(Зазначимо, що цей наслідок також випливає з основної теореми статті [2].)

5. Щільність ідеалу і переставимість конгруенцій. Як було зазначено вище, будь-який ненульовий ідеал Δ-напівгрупи є щільним. Очевидно, що Δ-напівгрупа є переставною. При доведенні наслідку 2 було зазначено, що будь-який ненульовий ідеал переставної інверсної напівгрупи Манна T_E (де E — напіврешітка скінченної довжини) є щільним. До переставних інверсних напівгруп, у яких будь-який ненульовий ідеал є щільним, також належать скінченні симетричні інверсні напівгрупи та напівгрупи часткових автоморфізмів скінченновимірного векторного простору. Закономірно виникає питання: якщо S є переставною інверсною напівгрупою скінченного рангу з нулем, чи буде її кожний нетривіальний ідеал щільним? Відповідь — ні. Покажемо це на прикладі.

Приклад. На множині $\{1, 2, 3, 4\}$ розглянемо множину перетворень

$$S = \left\{\varnothing, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}\right\}.$$

Легко перевірити, що S є інверсною напівгрупою, яка має рівно три лінійно впорядковані ідеали, а саме: $\varnothing \subset S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}S \subset S$. Крім того, очевидно, виконується умова 2 теореми 1 (див. [13]). Таким чином, за теоремою 1 (див. [13]) напівгрупа S є переставною. Тепер покажемо, що ідеал $S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}S$ не є щільним. Позначимо через G групу оборотних елементів напівгрупи S. Очевидно,

$$G = \left\{\begin{pmatrix}1234\\1234\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1234\\1243\end{pmatrix}\right\}.$$

Оскільки

$$S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}S = \left\{\varnothing, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\},$$

то

$$S\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}S = \{x \in S \mid \mathrm{rank}(x) \le 1\}.$$

Останній ідеал, як і раніше, позначимо через I_1. Розглянемо бінарне відношення $\Sigma = G \times G \bigcup \Delta_{I_1}$, де Δ_{I_1} — тотожне перетворення на ідеалі I_1. Легко перевірити, що Σ — конгруенція, яка до того ж тотожна на I_1. Але вона не тотожна на всій напівгрупі S. Отже, ідеал I_1 не є щільним.

1. *Ляпин Е. С.* О максимальных двусторонне стабильных упорядоченностях в полугруппах // Изв. вузов. Математика. – 1963. – **34**, № 3. – С. 88 – 94.
2. *Дереч В. Д.* О максимальных стабильных порядках на некоторых биидеальных расширениях полугруппы Брандта // Полугруппы и их гомоморфизмы. – Ленинград, 1991. – С. 12 – 18.
3. *Дереч В. Д.* Конгруенції переставної інверсної напівгрупи скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 469 – 473.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.
5. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York etc.: John Wiley and Sons, 1984. – 674 p.
6. *Schein B. M.* Completions, translational hulls and ideal extensions of inverse semigroups // Czech. Math. J. – 1973. – **23.** – P. 575 – 610.
7. *Nagy A., Jones Peter R.* Permutative semigroups whose congruences form a chain // Semigroup Forum. – 2004. – **69**, № 3. – P. 446 – 456.
8. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Наука, 1973. – 399 с.
9. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10.** – P. 55 – 66.
10. *Дереч В. Д.* Структура переставної напівгрупи Манна скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 6. – С. 742 – 746.
11. *Шайн Б. М.* Представление упорядоченных полугрупп // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 2. – С. 188 – 197.
12. *Goberstein S. M.* Fundamental order relations on inverse semigroups and on their generalizations // Semigroup Forum. – 1980. – **21.** – P. 285 – 328.
13. *Derech V.* On permutable inverse semigroups of finite rank // 5th Int. Algebr. Conf. in Ukraine: Abstrs (Odessa, July 20 - 27, 2005). – P. 57.

Одержано 20.09.06