УДК 512.534.5

В. Д. Дереч (Вінниц. нац. техн. ун-т)

СТРУКТУРА ПЕРЕСТАВНОЇ НАПІВГРУПИ МАННА СКІНЧЕННОГО РАНГУ

A semigroup any two congruences of which commute as binary relations is called a permutable semigroup. We describe the structure of a permutable Munn semigroup of a finite rank.

Напівгрупа, будь-які дві конгруенції якої переставні як бінарні відношення, називається переставною. В статті описується будова переставної напівгрупи Манна скінченного рангу.

Вступ. Серед задач, які розглядаються в теорії напівгруп, важливе місце займає проблематика пошуку взаємозв'язків між властивостями решітки конгруенцій і властивостями самої напівгрупи. Зокрема, цікавою є задача встановлення структури тієї чи іншої напівгрупи, будь-які дві конгруенції якої комутують відносно звичайної операції композиції. До таких напівгруп належать групи, напівгрупи Брандта та ін.

У цій статті саме така задача розглядається для напівгрупи Манна (див. [1]), тобто напівгрупи всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки відносно операції композиції перетворень. Напівгрупи Манна відіграють важливу роль у теорії зображень інверсних напівгруп [2, с. 170], тому їх класифікація за тією чи іншою ознакою є цілком актуальною задачею.

Основним результатом даної статті є теорема 1, в якій у термінах базисної напіврешітки з'ясовується будова відповідної переставної (див. п. 1) напівгрупи Манна скінченного рангу. В п. 3 також показано, що будь-який ненульовий ідеал переставної напівгрупи Манна скінченного рангу є щільним.

1. Термінологія і позначення. Нехай S — довільна напіврешітка. Позначимо через $\Phi(S)$ напівгрупу Манна, тобто напівгрупу всіх ізоморфізмів між головними ідеалами напіврешітки S відносно звичайної операції суперпозиції бінарних відношень.

Напіврешітку S називають напіврешіткою скінченної довжини, якщо існує натуральне число n таке, що довжина будь-якого ланцюжка з S не перевищує n. Очевидно, що напіврешітка скінченної довжини має найменший елемент — нуль.

Висоту елемента a напіврешітки S позначимо через $\operatorname{rank}(a)$. Нехай $f \in \Phi(S)$. Якщо $d(f) = aS$ (тут $d(f)$ — область визначення перетворення f), то, за означенням, $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(a)$. У роботі [3] (лема 4, п. 1) доведено, що функція $\operatorname{rank}: \Phi(S) \to N_0$ є ранговою, тобто для будь-яких $f, \varphi \in \Phi(S)$ виконується нерівність $\operatorname{rank}(f \circ \varphi) \le \min(\operatorname{rank}(f), \operatorname{rank}(\varphi))$.

Всі інші необхідні поняття з теорії напівгруп і теорії інверсних напівгруп можна знайти відповідно в монографіях [2] і [4].

2. Основний результат. Зрозуміло, що будова напівгрупи $\Phi(S)$ цілком визначається будовою напіврешітки S, яка, очевидно, ізоморфна напівгрупі всіх ідемпотентів напівгрупи $\Phi(S)$. Тому основний результат статті буде сформульовано в термінах напіврешітки S. Нехай S — напіврешітка скінченної довжини. Будемо говорити, що S задовольняє умову D, коли виконується така вимога: якщо $a < b$ (причому $\operatorname{rank}(a) \ge 1$), то існує елемент c такий, що $c \neq a$, $c < b$, $\operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(a)$. Тепер сформулюємо умову R: для будь-якого $e \in S$ $(\operatorname{rank}(e) \ge 2)$ існують елементи $b, c \in S$ такі, що $b \neq c$, $b < e$, $c < e$, $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(e) - 1$.

Лема 1. *Для напіврешітки S скінченної довжини умови D і R є еквівалентними.*

Доведення. Припустимо, що виконується умова D. Нехай $e \in S$, причому

$\operatorname{rank}(e) \geq 2$. Зрозуміло, що існує елемент b такий, що $b < e$ і $\operatorname{rank}(b) = \operatorname{rank}(e) - 1$. За умовою D існує елемент c такий, що $c \neq b$, $c < e$, $\operatorname{rank}(c) = \operatorname{rank}(b)$. Отже, виконується умова R.

Навпаки, нехай виконується умова R. Виберемо $a < b$ (тут $\operatorname{rank}(a) \geq 1$).

Випадок А. Елемент a належить максимальному (за кількістю елементів) ланцюжку, що з'єднує 0 і b. В цьому ланцюжку виберемо елемент s такий, що $a \prec s$ (де $\prec$ — значок покриття), тоді $\operatorname{rank}(s) = \operatorname{rank}(a) + 1$. За умовою R існують елементи x і y такі, що $x \neq y$, $x < s$, $y < s$, $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(y) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(s) - 1$. Зрозуміло, що $x \neq a$ або $y \neq a$. Нехай, наприклад, $x \neq a$, крім того, $x < b$ і $\operatorname{rank}(x) = \operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(s) - 1$. Отже, виконується умова D.

Випадок В. Елемент a не належить жодному максимальному (за кількістю елементів) ланцюжку, що з'єднує 0 і b. Нехай L — такий максимальний ланцюжок. Існує елемент $u \in L$ такий, що $\operatorname{rank}(u) = \operatorname{rank}(a) + 1$. За умовою R знайдуться елементи z і ν такі, що $z \neq \nu$, $z < u$, $\nu < u$ і $\operatorname{rank}(z) = \operatorname{rank}(\nu) = \operatorname{rank}(u) - 1 = \operatorname{rank}(a)$. Зрозуміло, що $z \neq a$ або $\nu \neq a$. Нехай, наприклад, $z \neq a$. Крім цього $z < b$ і $\operatorname{rank}(z) = \operatorname{rank}(a)$. Отже, виконується умова D.

Тепер сформулюємо і доведемо основну теорему статті.

Теорема 1. *Нехай S — напіврешітка скінченної довжини.*

Напівгрупа Манна $\Phi(S)$ переставна тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

1) *якщо $a \in S$ і $b \in S$, причому* $\operatorname{rank}(a) = \operatorname{rank}(b)$, *то* $aS \cong bS$;

2) *для будь-якого $e \in S$* $(\operatorname{rank}(e) \geq 2)$ *існують $f \in S$ і $\omega \in S$ такі, що $f \neq \omega$, $f < e$, $\omega < e$ і* $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\omega) = \operatorname{rank}(e) - 1$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли для будь-якого $a \in S$ $\operatorname{rank}(a) \leq 1$. В цьому випадку напівгрупа $\Phi(S)$ або одноелементна, або є напівгрупою Брандта. Відомо, що будь-які дві конгруенції напівгрупи Брандта є переставними.

Далі будемо розглядати випадок, коли в напіврешітці S існує елемент, ранг якого не менший за 2. Спочатку доведемо *достатність,* тобто нехай для напіврешітки S скінченної довжини виконуються умови (1) і (2). Умова (1) забезпечує лінійну впорядкованість (відносно включення) ідеалів напівгрупи $\Phi(S)$ (див. [3], теорема 1). Покажемо тепер, що будь-яка конгруенція Θ напівгрупи $\Phi(S)$ має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи $\Phi(S)$, а $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна).

Нехай Θ — конгруенція на напівгрупі $\Phi(S)$. Легко перевірити, що $I_\Theta = \{ f \in \Phi(S) \mid \langle f; 0 \rangle \in \Theta \}$ є ідеалом напівгрупи $\Phi(S)$. Оскільки кожний ідеал напівгрупи $\Phi(S)$ є ранговим (див. [3], теорема 1), то існує натуральне число k таке, що $I_\Theta = I_k = \{ f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \leq k \}$. Нехай $\langle f; \varphi \rangle \in \Theta$ і $\operatorname{rank}(f) > k$, тоді, очевидно, і $\operatorname{rank}(\varphi) > k$. Покажемо спочатку, що $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi)$. Припустимо протилежне, тобто $\operatorname{rank}(f) \neq \operatorname{rank}(\varphi)$. Нехай для конкретності $\operatorname{rank}(f) < \operatorname{rank}(\varphi)$. Оскільки $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$, то $\left\langle f \circ f^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1} \right\rangle \in \Theta$. Звідси $\left\langle f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1} \right\rangle \in \Theta$.

Розглянемо можливі випадки.

Перший випадок: $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \leq k$.

Тоді $(0, \varphi \circ \varphi^{-1}) \in \Theta$. Звідси $\varphi \circ \varphi^{-1} \in I_k$, тобто $\operatorname{rank}(\varphi \circ \varphi^{-1}) \leq k$. Але $\operatorname{rank}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{rank}(\varphi) > k$. Суперечність.

Другий випадок: $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) > k$.

Зрозуміло, що має місце включення $f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$, а оскільки $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \leq \operatorname{rank}(f \circ f^{-1}) = \operatorname{rank}(f) < \operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}(\varphi \circ \varphi^{-1})$, то

$f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \subset \varphi \circ \varphi^{-1}$ (строге включення). За умовою 2 (тобто умовою R, яка за лемою 1 еквівалентна умові D) існує ідемпотент $\omega \in \Phi(S)$ такий, що $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = \operatorname{rank}(\omega)$, $\omega \subset \varphi \circ \varphi^{-1}$ і $\omega \neq f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}$. Оскільки $\langle f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \varphi^{-1} \rangle \in \Theta$, то $\langle f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \omega, \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \omega \rangle \in \Theta$ або $\langle f \circ f^{-1} \circ \omega, \omega \rangle \in \Theta$. Якщо $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \omega) \leq k$, то $\langle 0, \omega \rangle \in \Theta$. Звідси $\operatorname{rank}(\omega) \leq$ $\leq k$. Суперечність.

Якщо ж $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \omega) > k$, то застосовуємо до впорядкованої пари $\langle f \circ f^{-1} \circ \omega, \omega \rangle$ такі самі міркування, що і вище. Продовжуючи цей процес (а він, очевидно, є скінченним), для деякого елемента $\psi \in \Phi(S)$ маємо $\langle 0, \psi \rangle \in$ $\in \Theta$, причому $\operatorname{rank}(\psi) > k$. Суперечність. Таким чином, $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi)$.

Тепер покажемо, що $f \circ f^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}$ і $f^{-1} \circ f = \varphi^{-1} \circ \varphi$, тобто $\langle f, \varphi \rangle \in H$.

Оскільки $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$, то $\langle f, f \circ f^{-1} \circ \varphi \rangle \in \Theta$. Очевидно, має місце включення $f \circ f^{-1} \circ \varphi \subseteq \varphi$. Якщо припустити, що $f \circ f^{-1} \circ \varphi \subset \varphi$ (строге включення), то $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi) < \operatorname{rank}(\varphi)$. З іншого боку, $\langle \varphi, f \circ f^{-1} \circ \varphi \rangle \in \Theta$, тому $\operatorname{rank}(\varphi) =$ $= \operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ \varphi)$. Суперечність. Таким чином, $f \circ f^{-1} \circ \varphi = \varphi$. Звідси $f \circ f^{-1} \circ$ $\circ \varphi \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}$, отже, $\varphi \circ \varphi^{-1} \subseteq f \circ f^{-1}$. Якщо припустити, що $\varphi \circ \varphi^{-1} \subset$ $\subset f \circ f^{-1}$, то $\operatorname{rank}(\varphi) < \operatorname{rank}(f)$. Суперечність. Отже, $f \circ f^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}$. Аналогічно доводиться, що $f^{-1} \circ f = \varphi^{-1} \circ \varphi$. Таким чином, $\langle f, \varphi \rangle \in H$.

Отже, ідеали напівгрупи $\Phi(S)$ лінійно впорядковані і будь-яка конгруенція Θ має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$ (де I — ідеал, а $\Omega \subseteq H$). Таким чином, за теоремою з п. 5 [3] напівгрупа $\Phi(S)$ є переставною.

Доведемо *необхідність*. Нехай напівгрупа $\Phi(S)$ є переставною, тоді (див. [5], теорема 4) її ідеали утворюють ланцюжок відносно включення, а отже (див. [3], теорема 1), виконується умова 1 теореми.

Тепер будемо доводити, що виконується й умова 2. Доведення проведемо від супротивного, тобто припустимо, що існує ідемпотент $\omega \in \Phi(S)$, для якого умова 2 не виконується. Нехай $\operatorname{rank}(\omega) = k + 1$, де $k + 1 \geq 2$. Розглянемо на $\Phi(S)$ бінарне відношення $\Theta = I_{k-1} \times I_{k-1} \cup \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta$, де $I_{k-1} = \{ f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \leq k - 1 \}$, $\Delta = \{ \langle f, f \rangle \mid f \in \Phi(S) \}$, $\rho = \{ \langle f, \varphi \rangle \in \Phi(S) \mid f \subset \varphi \wedge \operatorname{rank}(f) =$ $= k \wedge \operatorname{rank}(\varphi) = k + 1 \}$. Очевидно, що бінарне відношення Θ є рефлексивним і симетричним. Далі будемо доводити двосторонню стабільність бінарного відношення Θ. Доведення розіб'ємо на кілька лем.

Лема 2. *Нехай* $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$, *причому* $f \subset \varphi$, $\operatorname{rank}(f) = k$ *і* $\operatorname{rank}(\varphi) = k + 1$.
Якщо $\operatorname{rank}(f \circ \psi) = k$, *то* $\langle f \circ \psi, \varphi \circ \psi \rangle \in \Theta$.
Якщо ж $\operatorname{rank}(\psi \circ f) = k$, *то* $\langle \psi \circ f, \psi \circ \varphi \rangle \in \Theta$.

Доведення. Оскільки за умовою $f \subset \varphi$, то $f \circ \psi \subseteq \varphi \circ \psi$. Якщо $f \circ \psi =$ $= \varphi \circ \psi$, то $\langle f \circ \psi, \varphi \circ \psi \rangle \in \Theta$. Якщо ж $f \circ \psi \subset \varphi \circ \psi$, то $k = \operatorname{rank}(f \circ \psi) <$ $< \operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) \leq \operatorname{rank}(\varphi) = k + 1$. Отже, $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) = k + 1$. Таким чином, $\langle f \circ \psi,$ $\varphi \circ \psi \rangle \in \rho \subset \Theta$.

Друга частина леми доводиться аналогічно.

Лема 3. *Якщо* $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(f \circ \varphi) = k$, *то* $f^{-1} \circ f \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Доведення. Можливі три випадки: а) $\varphi \circ \varphi^{-1} \subset f^{-1} \circ f$; б) $\varphi \circ \varphi^{-1} \not\equiv f^{-1} \circ f$; в) $f^{-1} \circ f \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Припустимо, що $\varphi \circ \varphi^{-1} \subset f^{-1} \circ f$, тоді $k = \operatorname{rank}(f \circ \varphi) = \operatorname{rank}(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \leq$

$\leq \operatorname{rank}(\varphi \circ \varphi^{-1}) < \operatorname{rank}(f \circ f^{-1}) = k$. Суперечність.

Нехай тепер $\varphi \circ \varphi^{-1} \not\equiv f^{-1} \circ f$, тоді $f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \subset f^{-1} \circ f$. Покажемо, що $\operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = k$. Справді,

$$k = \operatorname{rank}(f \circ \varphi) = \operatorname{rank}(f \circ f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \leq \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}).$$

Отже, $k \leq \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) \leq k$, тобто $\operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) = k$. Але $f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \subset f^{-1} \circ f$, тому $k = \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) < \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f) = k$. Суперечність.

Залишається одна можливість $f^{-1} \circ f \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Лема 4. *Якщо* $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi \circ f)$, *то* $f \circ f^{-1} \subseteq \varphi^{-1} \circ \varphi$.

Доведення аналогічне доведенню попередньої леми.

Лема 5. *Нехай* $f \subset \varphi$, *крім того*, $\operatorname{rank}(f) = k$ *і* $\operatorname{rank}(\varphi) = k + 1$. *Якщо* $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) = k + 1$, *то* $\operatorname{rank}(f \circ \psi) = k$.

Доведення. Оскільки $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) = \operatorname{rank}(\varphi)$, то за лемою 3 $\varphi^{-1} \circ \varphi \subseteq \psi \circ \psi^{-1}$. Звідси $f^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \subseteq f^{-1} \circ f \circ \psi \circ \psi^{-1}$. Але $f^{-1} \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \subseteq f^{-1} \circ f$, тому $f^{-1} \circ f \subseteq \subseteq f^{-1} \circ f \circ \psi \circ \psi^{-1}$. Отже, $k = \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f) \leq \operatorname{rank}(f^{-1} \circ f \circ \psi \circ \psi^{-1}) \leq \operatorname{rank}(f \circ \psi)$. З іншого боку, $\operatorname{rank}(f \circ \psi) \leq \operatorname{rank}(f) = k$. Таким чином, $\operatorname{rank}(f \circ \psi) = k$.

Лема 6. *Нехай* $f \subset \varphi$, *причому* $\operatorname{rank}(f) = k$ *і* $\operatorname{rank}(\varphi) = k + 1$. *Якщо* $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) = k + 1$, *то* $\operatorname{rank}(\psi \circ f) = k$.

Доведення аналогічне доведенню попередньої леми.

Перейдемо до доведення правосторонньої стабільності бінарного відношення Θ.

Нехай $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$. Якщо $\langle f, \varphi \rangle \in I_{k-1} \times I_{k-1}$ або $f = \varphi$, то доводити немає чого.

Розглянемо випадок, коли $\langle f, \varphi \rangle \in \rho$, тобто $f \subset \varphi$, $\operatorname{rank}(f) = k$, $\operatorname{rank}(\varphi) = = k + 1$.

Нехай $\psi \in \Phi(S)$.

A. Якщо $\operatorname{rank}(f \circ \psi) = k$, то за лемою 2 $\langle f \circ \psi, \varphi \circ \psi \rangle \in \Theta$.

B. Нехай тепер $\operatorname{rank}(f \circ \psi) < k$, тоді за лемою 5 $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) \leq k$. Припустимо, що $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) = k$. Розглянемо ідемпотенти $f \circ f^{-1}$, $\varphi \circ \varphi^{-1}$, $\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Зрозуміло, що мають місце строгі включення $f \circ f^{-1} \subset \varphi \circ \varphi^{-1}$ і $\varphi \circ \psi \circ \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} \subset \varphi \circ \varphi^{-1}$, крім того, $\operatorname{rank}(f \circ f^{-1}) = \operatorname{rank}(\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) = k$ і $\operatorname{rank}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = k + 1$.

Якщо припустити, що $\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} \neq f \circ f^{-1}$, то, використовуючи умову 1 (див. формулювання теореми) і наше основне припущення (про те, що для ідемпотента $\omega \in \Phi(S)$ умова 2 теореми не виконується), одержуємо суперечність.

Тепер припустимо, що $\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = f \circ f^{-1}$. Оскільки $f \subset \varphi$, то $f = = f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$ і $f \circ \varphi^{-1} = f \circ f^{-1}$. Звідси $f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi = f \circ f^{-1} \circ \varphi = f$. Домноживши рівність $\varphi \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = f \circ f^{-1}$ зліва на $f \circ f^{-1}$, одержимо $f \circ f^{-1} \circ \varphi \circ \psi \circ \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = f \circ f^{-1}$ або $f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1} = f \circ f^{-1}$.

Отже, $k = \operatorname{rank}(f \circ f^{-1}) = \operatorname{rank}(f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ \varphi^{-1}) \leq \operatorname{rank}(f \circ \psi) < k$. Суперечність. Таким чином, $\operatorname{rank}(\varphi \circ \psi) < k$. Звідси $\langle f \circ \psi, \varphi \circ \psi \rangle \in I_{k-1} \times I_{k-1} \subseteq \Theta$, тобто бінарне відношення Θ є стабільним справа.

Аналогічно доводиться стабільність зліва.

Отже, бінарне відношення Θ є рефлексивним, симетричним і стабільним.

Далі, позначимо через Θ^t транзитивне замикання бінарного відношення Θ.

Легко переконатися, що Θ^t — конгруенція. З [3] (теорема 3 з п. 5) відомо, що напівгрупа $\Phi(S)$ переставна тоді і тільки тоді, коли її ідеали лінійно впорядковані і кожна конгруенція має форму $\Theta = I \times I \cup \Omega$, де I — ідеал напівгрупи $\Phi(S)$, а $\Omega \subseteq H$ (H — відношення Гріна). Конгруенція Θ^t, яку ми сконструювали виходячи з припущення, що умова 2 (див. формулювання теореми) не виконується, не підпадає під наведену вище форму конгруенції переставної напівгрупи Манна. Справді, $\{\rho \in \Phi(S) \mid \langle \rho, 0 \rangle \in \Theta^t\} = I_{k-1}$, крім того, існує пара $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta^t$ така, що $\operatorname{rank}(f) = k$ і $\operatorname{rank}(\varphi) = k+1$, тобто $\langle f, \varphi \rangle \notin H$.

Одержана суперечність і завершує доведення теореми.

3. Про щільне ідеальне розширення. Ідеальне розширення S напівгрупи V називається щільним, якщо будь-яка конгруенція на S, обмеження якої на V є рівністю, також є відношенням рівності.

Теорема 2. *Нехай S — напіврешітка скінченної довжини така, що напівгрупа Манна $\Phi(S)$ є переставною.*

Якщо конгруенція Θ напівгрупи $\Phi(S)$ тотожна на ідеалі $I_{k-1} = \{f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \le k-1\}$ (де $k \ge 2$), то вона тотожна і на ідеалі $I_k = \{f \in \Phi(S) \mid \operatorname{rank}(f) \le k\}$.

Доведення. Оскільки за умовою напівгрупа $\Phi(S)$ є переставною, то з теореми п. 5 (див. [3, с. 350]) безпосередньо випливає, що $\Theta \subseteq H$ (де H — відношення Гріна). Покажемо, що конгруенція Θ є тотожною на ідеалі I_k.

Нехай $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$, причому $\operatorname{rank}(f) = k$. Оскільки $\langle f, \varphi \rangle \in H$, то $\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(\varphi) = k$. Більш того, $d(f) = d(\varphi)$ і $r(f) = r(\varphi)$ (тут $d(f)$ і $r(f)$ — відповідні область визначення і множина значень перетворення f). Нехай $d(f) = d(\varphi) = aS$ і $r(f) = r(\varphi) = bS$. Оскільки f і φ — ізоморфізми між головними ідеалами aS і bS, то $af = a\varphi = b$.

Нехай тепер $c < a$, тоді $\operatorname{rank}(c) < \operatorname{rank}(a)$. Звідси $\operatorname{rank}(\Delta_{cS}) \le k-1$ (через Δ_{cS} ми позначаємо тотожний автоморфізм головного ідеалу cS). Далі, $\langle \Delta_{cS} \circ f, \Delta_{cS} \circ \varphi \rangle \in \Theta$, тому що $\langle f, \varphi \rangle \in \Theta$. Оскільки $\operatorname{rank}(\Delta_{cS} \circ f) \le k-1$ і $\operatorname{rank}(\Delta_{cS} \circ \varphi) \le k-1$, то $\Delta_{cS} \circ f = \Delta_{cS} \circ \varphi$. Звідси $cf = c\varphi$, тобто $f = \varphi$.

Наслідок. *Якщо S — напіврешітка скінченної довжини така, що напівгрупа $\Phi(S)$ є переставною, то $\Phi(S)$ є щільним ідеальним розширенням будь-якого свого ідеалу, відмінного від нуля.*

1. *Munn W. D.* Fundamental inverse semigroups // Quart. J. Math. – 1970. – **21**. – P. 157–170.
2. *Petrich M.* Inverse semigroups. – New York etc.: John Willey and Sons, 1984. – 674 p.
3. *Деречь В. Д.* Про переставні конгруенції на антигрупах скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 3. – С. 346–351.
4. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 286 с.
5. *Hamilton H.* Permutability of congruences on commutative semigroups // Semigroup Forum. – 1975. – **10**, № 1. – P. 55–66.

Одержано 10.12.2004,
після доопрацювання — 15.02.2006