ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА

УДК 388.26

С. М. Левицька[1]
А. Т. Дудикевич[1]
А. І. Кардаш[1]

РОЗПАРАЛЕЛЕННЯ АЛГОРИТМУ МЕТОДУ ПРОСТОЇ ІТЕРАЦІЇ НА СИСТОЛІЧНИХ СТРУКТУРАХ

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглядається можливість розпаралелення методу простої ітерації — найпростішого серед ітераційних методів розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь. Побудовано однорідне обчислювальне середовище — систолічний масив реалізації цього алгоритму.

Ключові слова: система лінійних алгебричних рівнянь, розпаралелення, систолічні масиви.

Вступ

Складні багатовимірні задачі, які необхідно розв'язати протягом досить обмеженого часу, вимагають забезпечення великої швидкодійності, наприклад, задачі електростатики, магнітостатики, електрофізики пружності, прогнозу погоди.

Паралельні системи характеризуються: різноплановістю задач, типом опрацювання (векторне, скалярне), різними операційними системами, різними конфігураціями систем, одночасністю виконання операцій, складністю взаємодії між елементами системи. Для розподіленого розпаралелювання основною задачею є зменшення часових затрат на передачу інформації між комп'ютерами. Найпростішою є комунікаційна мережа, в якій нема комутаторів, всі пристрої з'єднані безпосередньо один з одним і довжини ліній зв'язку мінімальні.

Тому актуальним є побудова спеціалізованих обчислювальних систем, так званих систолічних масивів. Завдяки простій структурі і простій комунікаційній мережі, вони ефективні за швидкодією, хоч орієнтовані на розв'язування достатньо вузького класу задач.

Більшість прикладних задач математичної фізики зводяться до систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) часто з розрідженими матрицями високого порядку. Ці задачі виникають у сіткових методах скінченних різниць, скінченних елементів тощо. Розв'язування таких систем є самостійною задачею.

В роботі розглядається алгоритм розпаралелення методу простої ітерації — найпростішого серед ітераційних методів розв'язування СЛАР. Правильний розв'язок цей метод дає як результат нескінченної одноманітності процесу ітерацій. Привабливою є властивість самовиправлення ітераційного процесу. Їхня збіжність залежить від елементів матриці, швидкість збіжності кожного ітераційного методу — від вдалого вибору вектора початкових наближень.

Постановка задачі

Розглянемо СЛАР

$$Ax = b, \tag{1}$$

де A — матриця розмірності $n \times n$; b — рядок вільних членів; x — невідомі змінні.

Будуємо ітераційний процес за формулою

$$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + d\,, \tag{2}$$

де k — номер ітерації (k = 1, 2,…), $\|C\| < 1$. За початкове наближення доцільно вибрати стовпець вільних членів. Ітераційний процес припиняється за виконання умови

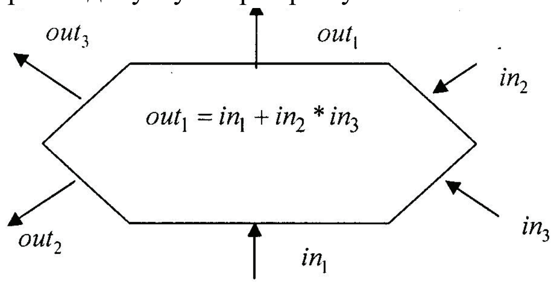
$$\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Побудова систолічного масиву

В роботі наведена схема систолічного масиву для розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь третього порядку методом простої ітерації:

$$\begin{cases} x_1^{(k)}=d_1+c_{11}x_1^{(k-1)}+c_{12}x_2^{(k-1)}+c_{13}x_3^{(k-1)}; \\ x_2^{(k)}=d_2+c_{21}x_1^{(k-1)}+c_{22}x_2^{(k-1)}+c_{23}x_3^{(k-1)}; \\ x_3^{(k)}=d_3+c_{31}x_1^{(k-1)}+c_{32}x_2^{(k-1)}+c_{33}x_3^{(k-1)}. \end{cases} \qquad (4)$$

Систолічна структура будується у вигляді шестикутників, які виконують операцію обчислення скалярного добутку і перевірки умови закінчення ітераційного процесу.

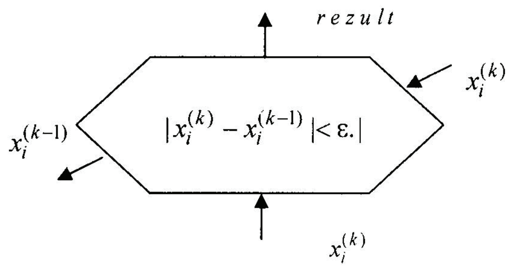


В комірці обчислюється значення скалярного добутку: перемножується інформація, що надходить справа знизу і справа зверху і додається до значень, що надходять знизу. Результат передається вверх.

Крім того, здійснюється транспортна пересилка інформації

$$out_2 = in_2;$$

$$out_3 = in_3.$$



Комірка здійснює перевірку на завершення обчислень за однією із шуканих змінних.

Результат передається через шину на комірку у вигляді овалу, в якій перевіряється умова (3). Якщо ця умова виконується, то процес обчислень завершений, якщо ж ні, то систолічний масив працює знову, лише на вхід подається нове наближення розв'язку.

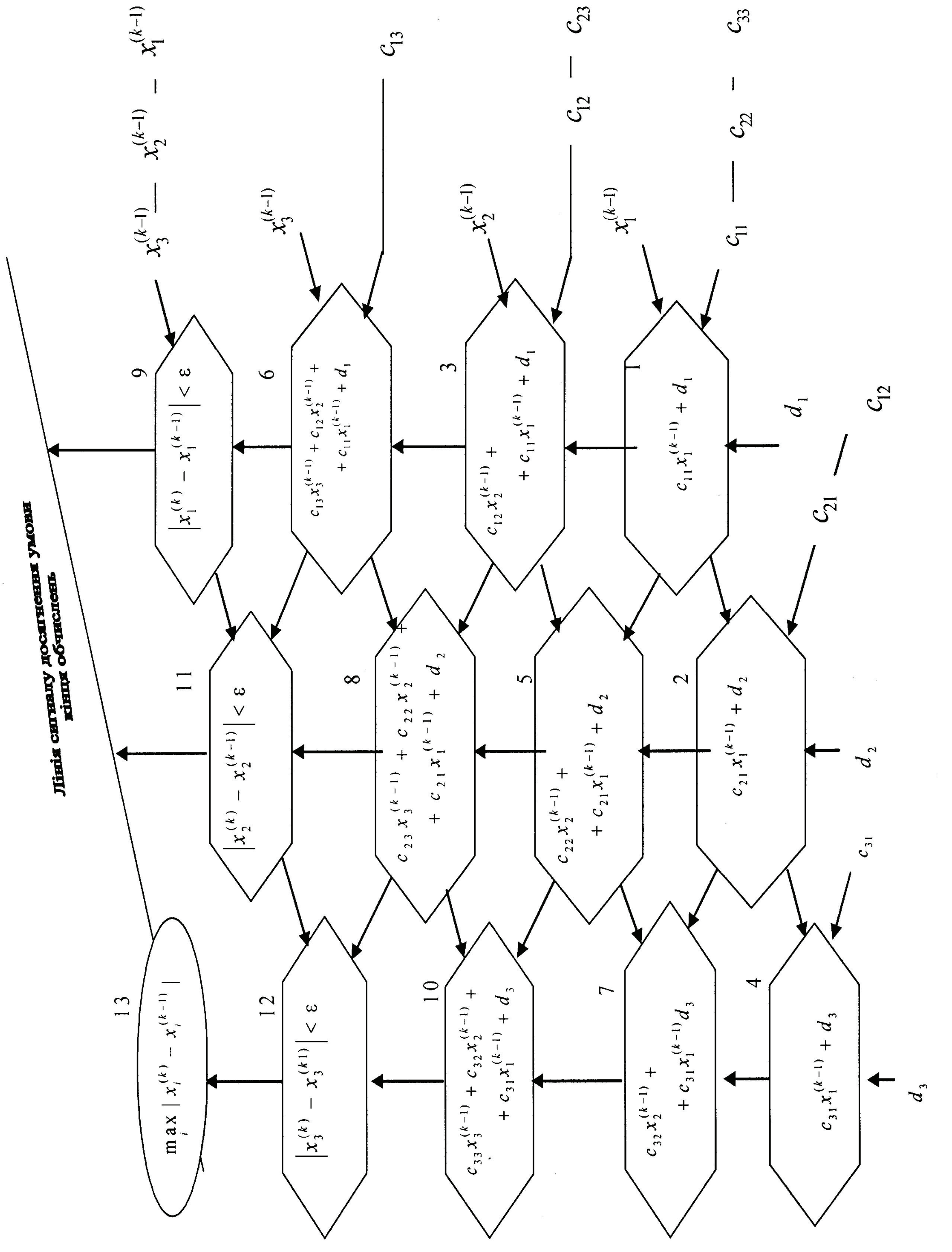
Відмітимо основну особливість побудови систолічного масиву — це його робота за тактами. Тому дуже важливо передбачити надходження вхідної інформації через транспортний зв'язок у відповідний момент до відповідної комірки. Тобто коефіцієнти матриці C та значення $x_i^{(k-1)}$ надходять на вхід систолічного масиву лише в певні такти його роботи. На рис. 1 показана робота систолічного масиву.

Опишемо роботу систолічного масиву.

На 1 *такті* спрацьовує комірка № 1. На вхід надходять коефіцієнт c_{11}, вільний член d_1 і компонента $x_1^{(k-1)}$, обчислюється величина $d_1 + c_{11}\cdot x_1^{(k-1)}$. Результат пересилається вверх на комірку № 3, а $x_1^{(k-1)}$ транспортним зв'язком переходить в комірку № 2.

На 2 *такті* спрацьовують комірки № 1 та № 3. В комірку № 2 надходить коефіцієнт c_{21}, d_2 та з першої комірки $x_1^{(k-1)}$.

Обчисляється величина $d_2 + c_{21}\cdot x_1^{(k-1)}$. Результат подається в комірку № 5, $x_1^{(k-1)}$ пересилається в комірку № 4. Робота комірки № 3 така: на вхід надходить коефіцієнт матриці c_{12}, значення $x_2^{(k-1)}$ і результат попереднього такту з комірки № 3. Обчислюється величина $d_1 + c_{11}\cdot x_1^{(k-1)} + c_{12}\cdot x_2^{(k-1)}$, яка передається в комірку № 6. Величина $x_2^{(k-1)}$ пересилається в комірку № 5. На вхід комірки № 1 надходить коефіцієнт c_{22} для подальшого використання в наступному такті в комірці № 5.



Робота систолічного масиву

На 3 *такті* працюють комірки № 4, № 5 та № 6:

№ 4. На вхід надходять величини $c_{31}, d_3, x_1^{(k-1)}$. Обчислюється $d_3 + c_{31} \cdot x_1^{(k-1)}$. Результат передається в комірку № 7;

№ 5. На вхід із № 1 надходить коефіцієнт c_{22}. З комірки № 3 — $x_2^{(k-1)}$, з № 2 — результат. Обчислюється вираз $d_2 + c_{21} \cdot x_1^{(k-1)} + c_{22} \cdot x_2^{(k-1)}$;

№ 6. На вхід подається коефіцієнт матриці c_{13} та $x_3^{(k-1)}$; з комірки № 3 надходить результат попереднього такту і обчислюється вираз $d_1 + c_{11} \cdot x_1^{(k-1)} + c_{12} \cdot x_2^{(k-1)} + c_{13} \cdot x_3^{(k-1)}$. Результат засилається в № 9 як наступне наближення $x_1^{(k-1)}$. На цьому ж такті коефіцієнти c_{33}, c_{23}, c_{32} надходять в комірки, відповідно, № 1, № 2, № 3 для подальшої пересилки;

4 *такт*. Працюють комірки № 7, № 8, № 9.

№ 7. На вхід із № 2 надходить c_{32}, з № 5 — $x_2^{(k-1)}$ і з № 4 — результат третього такту. В ній обчислюється $d_3 + c_{31} \cdot x_1^{(k-1)} + c_{32} \cdot x_2^{(k-1)}$. Результат пересилається в комірку № 10;

№ 8. Надходить із № 6 $x_3^{(k-1)}$ і з № 3 — c_{23}. Використовуючи результат попереднього такту № 5, отримаємо

$$d_1 + c_{21} \cdot x_1^{(k-1)} + c_{22} \cdot x_2^{(k-1)} + c_{23} \cdot x_3^{(k-1)}.$$

Цей результат, як подальше наближення розв'язку $x_2^{(k)}$, передається в № 11.

№ 9. Перевіряється умова $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| < \varepsilon$. Якщо умова виконується, то результат подається через шину в комірку № 13.

5 *такт*. Працюють комірки № 10, № 11:

№ 10. Обчислюється

$$x_3^{(k)} = d_3 + c_{31} \cdot x_1^{(k-1)} + c_{32} \cdot x_2^{(k-1)} + c_{33} \cdot x_3^{(k-1)}.$$

№ 11. Здійснюється умовна перевірка на точність обчислення $x_2^{(k)}$.

6 *такт*. Працює комірка №12, яка перевіряє точність обчислення $x_3^{(k)}$.

Результати спрацювань комірок № 9, № 11, № 12 передаються в комірку № 13, яка визначає закінчення чи повторення ітераційного процесу. Наступна ітерація завжди починається з першого такту, на входи подаються $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$.

Аналогічно будується систолічний масив для СЛАР вищих порядків із розширенням комірок вліво і вгору.

Висновки

Побудована схема однорідного обчислювального середовища (спеціалізованої багатопроцесорної обчислювальної машини) для знаходження розв'язку системи лінійних алгебричних рівнянь методом простої ітерації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Воеводин В. В. Математические модели и методы в параллельных процессах / В. В. Воеводин. — М. : Наука, 1986. — 296 с.

2. Левицкая С. М. Построение параллельных алгоритмов решения многомерных задач математической физики / С. М. Левицкая, А. Т. Дудыкевич / Pattern Recognition and Image Analysis. — 1994. — Vol. 4, № 3.

3. Левицька С. М. Розпаралелення алгоритму простої ітерації / С. М. Левицька, А. І. Кардаш, А. Т. Дудикевич. // Контроль і управління в складних системах (КУСС–2014): XII Міжнародна конференція, Вінниця, 14—16 жовтня 2014 : тези доп. — С. 25.

Рекомендована кафедрою захисту інформації ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 20.02.2015

Левицька Софія Михайлівна — старший викладач кафедри програмування, e-mail: sofialev.m@gmail.com;
Дудикевич Анна Теодорівна — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики;
Кардаш Андрій Іванович — канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри програмування;
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

S. M. Levytska[1]
A. T. Dudykevych[1]
A. I. Kardash[1]

Parallelization of the fixed-point iteration method on systolic structures

[1]Ivan Franko Lviv National University

The chart of homogeneous calculable environment (specialized multiprocessor calculable machine) is built for decision making of the systems of linear algebraic equalizations by the method of simple iteration.

Key words: system of linear equations, parallelization, systolic arrays.

Levytska Sofiia M. — Senior Lecturer of the Chair of Programming, e-mail: sofialev.m@gmail.com;
Dudykevych Anna T. — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor of the Chair of Calculus Mathematics;
Kardash Andrii I. — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor of the Chair of Programming.

С. М. Левицкая[1]
А. Т. Дудыкевич[1]
А. И. Кардаш[1]

Распараллеливание алгоритма метода простой итерации на систолических структурах

[1]Львовский национальный университет им. Ивана Франко

Построена схема однородной вычислительной среды (специализированной многопроцессорной вычислительной машины) для нахождения решения систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации.

Ключевые слова: система линейных алгебраических уравнений, распараллеливание, систолические массивы.

Левицкая София Михайловна — старший преподаватель кафедры программирования, e-mail: sofialev.m@gmail.com;
Дудыкевич Анна Теодоровна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики;
Кардаш Андрей Иванович — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры программирования.