

# НЕРУЙНІВНИЙ МЕТОД ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТИ КОРОТКОГО ЗАМИКАННЯ В ОДНОВИМІРНИХ СИСТЕМАХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Вінницький національний технічний університет

## Анотація

В роботі на прикладі довгої лінії запропоновано та аналітично обґрунтовано неруйнівний метод локалізації місцезнаходження короткого замикання в одновимірних системах електричних кіл з розподіленими параметрами. В основу метода покладено лінійне перетворення координати короткого замикання в аварійній системі у її вхідний електричний опір.

**Ключові слова:** теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, довга лінія, аварійний режим роботи, коротке замикання, вхідний опір, рівняння перетворення

## Abstract

In this paper, using the example of a long line, a method for determining the location of a short circuit in one-dimensional systems of electrical circuits with defined parameters is proposed and analytically justified. The method is based on the linear transformation of the short circuit coordinates in the emergency system to its input resistance.

**Keywords:** electrical engineering theory, electric circuit, continuous system, long line, emergency operation, short circuit, input resistance, transformation equation

## 1. Вступ

В одновимірних системах електричних кіл з розподіленими параметрами, які на сьогодні надзвичайно поширені в усіх важливих галузях промисловості, характерною ознакою є залежність їх електричних параметрів не тільки від часу, але і від просторової координати. Це створює додаткові і унікальні можливості встановлювати математичні зв'язки (взаємозалежності) між фізичними величинами принципово різної природи, через що доволі часто такі математичні моделі отримують суттєві переваги порівняно з відомими.

В наявній роботі пропонується метод вхідного опору, який дозволяє визначати координату місцезнаходження аварійного вияву (наразі короткого замикання) в довгих лініях за значеннями вхідного опору цієї системи. Увага авторів, і це є метою роботи, насамперед зосереджена на побудові рівняння перетворення запропонованого методу та можливості його оптимізації за запропонованими нижче критеріями. Важливими перевагами методу є можливість здійснювати процедуру вимірювання (або контролю) у неруйнівний спосіб та на відстані від об'єкту вимірювання, а також – лінійний характер рівняння перетворення.

## 2. Побудова рівняння перетворення методу вхідного опору

1) Як відомо [1-7], електричні (електромагнітні) процеси в довгій лінії з лінійними параметрами  $R_0$ ,  $G_0$ ,  $L_0$  та  $C_0$  підпорядковуються телеграфним рівнянням – системі диференціальних рівнянь в частинних похідних виду:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_0 i + L_0 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_0 u + C_0 \frac{\partial u}{\partial t}, \end{cases} \quad (1)$$

розв'язками якої в усталеному синусоїдному режимі роботи лінії є функції

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U_m(x) \sin[\omega t + \psi_u(x)], \\ i(t, x) &= I_m(x) \sin[\omega t + \psi_i(x)], \end{aligned} \quad (2)$$

де  $U_m(x)$  та  $I_m(x)$  – амплітудні значення розподілених вздовж довгої лінії миттєвих напруги та струму, а  $\psi_u(x)$  та  $\psi_i(x)$  – їх початкові фази, в обох випадках залежні від просторової координати  $x$ .

Синусоїдний характер розв'язків дозволяє скористатися символічним методом і переписати систему рівнянь довгої лінії в комплексній формі, склавши цю систему відносно комплексів діючих значень напруги  $\underline{U}(x) = \frac{U_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_u(x)}$  та струму  $\underline{I}(x) = \frac{I_m(x)}{\sqrt{2}} e^{j\psi_i(x)}$ , надалі  $\underline{U}$  та  $\underline{I}$  відповідно:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = \underline{Z}_0 \underline{I}, \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Y}_0 \underline{U}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\underline{Z}_0 = R_0 + j\omega L_0$  – повздовжній комплексний опір лінії, а  $\underline{Y}_0 = G_0 + j\omega C_0$  – її поперечна комплексна провідність.

Вилучимо з системи (3) комплексний струм  $\underline{I}$ , що зробити неважко, і отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку, складене виключно відносно комплексної напруги,

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma} \underline{U}, \quad (4)$$

яке за заданих крайових або в інших, наприклад,  $\underline{U}(x_{к2})$  та  $\underline{I}(x_{к2})$ , умов і визначатиме закон розподілу цієї напруги, а відтак і її діючого значення  $U(x)$  та початкової фази  $\psi_u(x)$ , вздовж довгої лінії в функції координати  $x$ .

В формулі (4) коефіцієнт  $\underline{\gamma}$  – це стала поширення, яку визначаємо через первинні параметри довгої лінії

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_0 \underline{Y}_0} = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)} \quad (5)$$

і яка, в свою чергу, визначає коефіцієнт згасання  $\alpha$  та коефіцієнт фази  $\beta$ , оскільки

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta. \quad (6)$$

Загальним розв'язком диференціального рівняння (4) є сума двох складових

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{np}(x) + \underline{U}_{зв}(x), \quad (7)$$

перша з яких

$$\underline{U}_{np}(x) = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \quad (8)$$

це комплекс прямої хвилі напруги, а друга

$$\underline{U}_{зв}(x) = \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} - \quad (9)$$

комплекс зворотної хвилі напруги.

В формулах  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  – це сталі інтегрування рівняння (4).

У схожий спосіб визначаємо розподіл комплексного струму з системи (3) вздовж довгої лінії. Для нього маємо

$$\underline{I}(x) = \underline{I}_{np}(x) - \underline{I}_{зв}(x), \quad (10)$$

де

$$\underline{I}_{np}(x) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_C} e^{-\underline{\gamma}x} - \quad (11)$$

це комплекс прямої хвилі струму, а друга

$$\underline{I}_{зв}(x) = \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_C} e^{\underline{\gamma}x} - \quad (12)$$

комплекс його зворотної хвилі.

В обох останніх співвідношеннях  $\underline{Z}_C$  – хвильовий опір довгої лінії, який визначається через первинні параметри лінії

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{\underline{Z}_0}{\underline{Y}_0}} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}. \quad (13)$$

2) Отже, відносно початку довгої лінії (вхідних її полюсів), де значення просторової координати в обраній системі координат  $x = 0$ , для комплексу діючого значення напруги  $\underline{U}$  відповідно до співвідношень (7) та (10) з урахуванням (8), (9), (11), (12) записуємо

$$\underline{U}(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2, \quad (14)$$

а для струму –

$$\underline{I}(0) = \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_C}. \quad (15)$$

3) Математичний зв'язок комплексного вхідного опору  $\underline{Z}_{ex}$  зі сталими інтегрування  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  виявимо, скориставшись законом Ома в комплексній формі та співвідношеннями (14) та (15):

$$\underline{Z}_{ex} = \frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = \underline{Z}_C \frac{\underline{A}_1 + \underline{A}_2}{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}. \quad (16)$$

4) Водночас встановимо математичний зв'язок обидвох сталих інтегрування  $\underline{A}_1$  і  $\underline{A}_2$  з координатою короткого замикання  $x_{кз}$ .

Оскільки сталі інтегрування можна визначати не тільки через крайові умови – значення комплексних напруг та струмів на початку або в кінці довгої лінії, але і через їх значення в будь-яких інших точках довгої лінії, розглянемо місце короткого замикання з актуальною для нас невідомою координатою  $x_{кз}$ .

Сталі інтегрування визначимо відносно цієї (!) координати.

а) Отже, в точці короткого замикання напруга дорівнює нулю  $\underline{U}(x_{кз}) = 0$ .

Тому у відповідності з формулами (7)-(9) можемо записати

$$\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x_{кз}} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x_{кз}} = 0, \quad (17)$$

звідки співвідношення поміж самими сталими інтегрування має вигляд

$$\frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} = -\frac{e^{-\underline{\gamma}x_{кз}}}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}}. \quad (18)$$

б) Для суми сталих інтегрування з урахуванням співвідношення (18) можемо записати

$$\underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}_1 \left( 1 + \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} \right) = \underline{A}_1 \left( 1 - \frac{e^{-\underline{\gamma}x_{кз}}}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} \right) = \underline{A}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x_{кз}} - e^{-\underline{\gamma}x_{кз}}}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} = \frac{2\underline{A}_1}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} \operatorname{sh} \underline{\gamma}x_{кз}. \quad (19)$$

Аналогічно – і для їх різниці

$$\underline{A}_1 - \underline{A}_2 = \underline{A}_1 \left( 1 - \frac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} \right) = \underline{A}_1 \left( 1 + \frac{e^{-\underline{\gamma}x_{кз}}}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} \right) = \underline{A}_1 \frac{e^{\underline{\gamma}x_{кз}} + e^{-\underline{\gamma}x_{кз}}}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} = \frac{2\underline{A}_1}{e^{\underline{\gamma}x_{кз}}} \operatorname{ch} \underline{\gamma}x_{кз}. \quad (20)$$

в) Відтак з рівнянь (19) та (20) випливає, що

$$\frac{\underline{A}_1 + \underline{A}_2}{\underline{A}_1 - \underline{A}_2} = \operatorname{th} \underline{\gamma}x_{кз}. \quad (21)$$

5) Підставимо в формулу (16) співвідношення (21). В результаті отримаємо шуканий математичний зв'язок між комплексним вхідним опором довгої лінії  $\underline{Z}_{ex}$  з наявним в ній коротким замиканням та координатою місця короткого замикання  $x_{кз}$

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma}x_{кз}. \quad (22)$$

6) Варто додати, що отримане рівняння перетворення цілком узгоджується з відомою в теоретичній електротехніці формулою, яка визначає вхідний опір  $\underline{Z}_{ex}$  довільно навантаженої довгої лінії довжиною  $l$

$$\underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_C \frac{\underline{Z}_H + \underline{Z}_C \operatorname{th} \underline{\gamma}l}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_H \operatorname{th} \underline{\gamma}l}, \quad (23)$$

оскільки за виконання водночас двох умов:  $\underline{Z}_n \rightarrow 0$  і  $l \rightarrow x_{кз}$ , формула (23) сходиться до формули (22), що робить допустимою можливість розглядати короткозамкнену в кінці довгу лінію як електричний еквівалент довгої лінії з коротким замиканням в довільному місці, якщо тільки довжина першої буде відповідати локалізації місця короткого замикання другої лінії  $l = x_{кз}$ , також буде забезпечена усталеність синусоїдного режиму роботи лінії.

### 3. Рівняння перетворення методу вхідного опору для лінії без втрат

Якщо в довгій лінії виконуються умови

$$R_0 \ll \omega L_0; G_0 \ll \omega C_0, \quad (24)$$

таку лінію допустимо вважати лінією без втрат (електромагнітної енергії).

Оскільки співвідношення між електричними параметрами для ліній без втрат зазнають суттєвих спрощень, тому скористаємося цією обставиною і перепишемо рівняння перетворення (22) методу вхідного опору за умов чинності нерівностей (24).

В цьому випадку гіперболічний тангенс вироджується в тригонометричний тангенс

$$\text{th } \underline{\gamma} x_{кз} = j \text{tg } \beta x_{кз}, \quad (25)$$

позаяк відповідно до (5) та (6) коефіцієнт поширення допустимо вважати рівним нулю  $\alpha = 0$ , а стала поширення стає рівною

$$\underline{\gamma} = j\beta = j\omega\sqrt{L_0 C_0}. \quad (26)$$

Хвильовий опір лінії, в свою чергу, відповідно до (13) буде визначено лише над полем дійсних чисел

$$\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (27)$$

Таким чином, рівняння перетворення методу вхідного опору (22) з урахуванням співвідношень (25)-(27) набуває вигляду

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_C \text{tg } \beta x_{кз}, \quad (28)$$

де  $\beta = \omega\sqrt{L_0 C_0}$ ,  $\underline{Z}_C = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$ .

### 4. Лінеаризація рівняння перетворення методу вхідного опору

1) Відомо, що функція тригонометричного тангенса є нелінійною періодичною функцією. Однак в певній області свого визначення і з певним ступенем апроксимації її значення лінійно залежать від аргументу. Навіть більше того – за таких умов з'являється можливість функцію тангенса від аргументу прирівняти до самого аргументу, водночас наклавши жорсткі умови, по-перше, щодо робочої області значень аргументу і, по-друге, відносного відхилення цього аргументу від функції тангенса!

Отже, зазначена обставина створює для нас практичну можливість сформулювати лінійне (!) рівняння перетворення, яке у разі виконання наперед заданих передумов (обмежень), пов'язаних з вищезазначеним, відповідно до (28) набуває вигляду

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_C \beta x_{кз}, \quad (29)$$

або

$$\underline{Z}_{вх} \approx K x_{кз} \quad (30)$$

з лінійною залежністю між вхідним опором  $\underline{Z}_{вх}$  довгої лінії та координатою  $x_{кз}$  місця короткого замикання, де коефіцієнт пропорційності з урахуванням співвідношень (26) та (27) дорівнює

$$K = \underline{Z}_C \beta = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \omega\sqrt{L_0 C_0} = \omega L_0. \quad (31)$$

2) Визначимося з додатковими умовами, які забезпечать лінійність рівняння перетворення (31).

Оскільки перехід від рівняння перетворення з нелінійною функцією тангенса (28) до рівняння перетворення з лінійною функцією (30) супроводжувався внесенням методичної похибки, то за основу візьмемо її максимально допустиме значення  $\delta_{max}$ .

Тоді відповідно до зазначеного має виконуватися нерівність

$$\frac{|\operatorname{tg} \beta l - \beta l|}{\beta l} \leq \delta_{\max}, \quad (32)$$

де  $l$  – довжина довгої лінії, на ділянці якої сталося коротке замикання, тобто  $x_{\text{кз}} \leq l$  або  $\beta x_{\text{кз}} \leq \beta l$ .

Задамо умову, відповідно до якої

$$\delta_{\max} = 0,03 \text{ (3\%)} \quad (33)$$

Для аргументу тангенса  $\beta l$  за область допустимих значень оберемо проміжок від 0 до  $0,5\pi$ . Тоді в цій області за заданого значення максимально допустимої відносної похибки  $\delta_{\max}$  розв'язком трансцендентної нерівності (32) відносно добутку  $\beta l$  буде нерівність  $\beta l \leq 0,295$  рад.

В цьому випадку неважко показати, що довжина електромагнітної хвилі  $\lambda$  в довгій лінії, в свою чергу, має відповідати умові:

$$\lambda \geq \frac{2\pi}{0,295} l = 21,3 l. \quad (34)$$

Нерівність (34) дозволяє розрахувати робочу частоту  $f$  джерела е.р.с. синусоїдних коливань в лінії, яка забезпечить виконання нерівності (34), оскільки довжина електромагнітної хвилі пов'язана з частотою співвідношенням  $\lambda = \frac{v_{\phi}}{f}$ , де  $v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta}$  – фазова швидкість руху електромагнітної хвилі в довгій лінії. За першого наближення значенню фазової швидкості допустимо надати швидкість світла у вакуумі.

### Висновки

В роботі на прикладі довгої лінії запропоновано та аналітично обґрунтовано неруйнівний метод локалізації місцезнаходження короткого замикання в одновимірних системах електричних кіл з розподіленими параметрами. В основу метода покладено лінійне перетворення координати короткого замикання аварійної системи у її вхідний електричний опір.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехнік: У 3 т. / В. С. Бойко, В. В. Бойко, Ю. Ф. Видолоб та ін. — К.: ІВЦ “Видавництво «Політехніка»”, 2004. — Т. 1: Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими параметрами. — 272 с.
2. Перхач В. С. Теоретична електротехніка / В. С. Перхач. — К.: Вища школа, 1992. — 439 с.
3. Електричні апарати / В. О. Бржезицький, В. Ц. Зелінський, П. Д. Лежнюк, О. Є. Рубаненко, Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2016. — 602 с.
4. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацев. — Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. — 456 с.
5. Теоретичні основи електротехніки. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацев, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький. — Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. — 326 с.
6. Теоретичні основи електротехніки. Електромагнітне поле / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Херсон: ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. — 392 с.
7. Теоретические основы электротехники: В 3-х т. Том 1. / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. — СПб.: Питер, 2003. — 463 с.

**Юрій Григорович Ведміцький** — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, wjg@ukr.net.

**Yurii G. Vedmitskyi** — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net

**Ілля Олександрович Гненний** — учень 10ІТ класу Подільського науково-технічного ліцею для обдарованих дітей, м. Вінниця.

**Илья О. Gnenny** — the pupil 10IT class of Podolskogo of scientific and technical lycée for exceptional children, Vinnytsia.