



НАУКОВИЙ ЧАСОПИС

НАЦІОНАЛЬНОГО
ПЕДАГОГІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ІМЕНІ М.П. ДРАГОМАНОВА

СЕРІЯ 5

ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ:
РЕАЛІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ

ВИПУСК 22

здоров'я, сформованість оптимальної стратегії професійного здоров'я, високий рівень стресостійкості.

Визначені компоненти готовності майбутніх учителів до збереження і зміцнення професійного здоров'я, розроблені показники і рівні їх сформованості лягли в основу обґрунтування діагностичної методики та вивчення сучасного стану проблеми у практиці роботи вищих навчальних закладів. Висвітленню цих питань будуть присвячені наші наступні публікації. Лише зазначимо, що виявлений низький рівень готовності майбутніх учителів до діяльності в означеному аспекті яскраво засвідчує необхідність активізації роботи з визначення нових граней забезпечення психічного, фізичного, духовного здоров'я студентів – майбутніх учителів, формування у них здатності долати професійні труднощі, протистояти професійним стресам, емоційному вигоранню, професійним деструкціям і деформаціям, професійним кризам, професійним хворобам, озброєння механізмами і технологіями самодопомоги, самооздоровлення, розробки життєвих і професійних стратегій.

Література

- 1 Кулоткин Ю.Н. Моделирование педагогических ситуаций / Ю.Н. Кулоткин, Г.С. Сухобская. — Л.: ЛГУ, 1984. — 156 с.
- 2 Мешко Г.М. Фактори професійного здоров'я – нездоров'я педагогів / Г.М. Мешко // Сприяння здоров'ю дітей та молоді: теоретично-методичні аспекти: матеріали IV Міжнародної соціально-педагогічної конференції (29-30 вересня 2009 р.). — Луцьк, 2009. — С. 263-268.
- 3 Романова Е.С. Психология профессионального становления личности: Дисс. ... д-ра психол. наук: 19.00.07 / Е.С. Романова. — М.: МГПУ, 1992. — 611 с.

УДК 681.3.06

Михалевич В.М., Крупський Я.В.
Вінницький національний технічний університет

ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ САМОСТІЙНОЇ НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ ЗА ДОПОМОГОЮ MAPLE-ТЕХНОЛОГІЙ.

Анотация. Разработана программа-тренажер для обучения методам интегрирования рациональных функций. Разработанная методика и ее программная реализация включает блок генерирования заданий и пошаговую выдачу результатов решения. Применение на всех этапах методики системы символьных вычислений Maple позволило получить эффективный тренажер, доступный для использования и модификации широкому кругу преподавателей. Продемонстрированы результаты работы тренажера.

Abstract. A program simulator for training in the integration of rational functions. Technique developed and its software implementation includes a power generating jobs and walks you through the issuance of the results of the decision. Application at all stages of the methodology of Maple symbolic computation allowed us to obtain an effective trainer, available for use and modification of a wide range of teachers. Show the results of the simulator.

Ключові слова: Maple, організація самостійної роботи студентів, інтеграли, тренажер.

Створення та впровадження навчально-контролюючого комплексу з вищої математики сприятиме суттєвому підвищенню ефективності навчання та зменшенню об'єму рутинних робіт по підготовці та перевірці індивідуальних завдань студентів. Генерування індивідуальних завдань та перевірка ходу розв'язку завдань є самостійним ефективним засобом при організації навчальної роботи. Крім того, застосування навчально-контролюючого комплексу стимулює пізнавальну активність студентів, що сприяє інтелектуальному розвитку особистості.

За умови інтенсивних пошуків нових методів, форм та змісту навчання, динамічних змін спеціальностей та навчальних планів, переходу від паперових до електронних форм методичного забезпечення навчального процесу зростають вимоги до цього забезпечення. Саме тому мова повинна йти не просто про створення конкретних генераторів завдань з математики, а й про контроль за успішністю. Наявність такого навчально-контролюючого комплексу дозволить студентам перевіряти свої уміння та навички або в разі труднощів програма підкаже наступний крок.

Об'єкт дослідження – розробка методичного забезпечення навчального процесу з математики.

Предмет дослідження – створення тренажерів для розв'язання типових завдань з математики.

Мета дослідження – створення та аналіз навчально-контролюючого комплексу для генерування в середовищі системи символьних обчислень Maple типових завдань з математики та перевірка якості знань студентів.

Основні задачі дослідження:

1. Проаналізувати середовище системи Maple з точки зору перспективи створення тренажерів завдань з математики.
2. Розробити ключові складові методики розробки тренажера завдань.
3. Розробити в середовищі Maple навчально-контролюючий комплекс.
4. Реалізувати за допомогою запропонованої методики тренажер завдань певного типу.

Maple – це потужна інтегрована обчислювальна система, що дозволяє виконувати чисельні й аналітичні розрахунки широкого класу математичних задач й володіючи власною мовою програмування. Складається зі швидкого ядра, написаного на Сі, має основні математичні функції, а також існує велика кількість бібліотек, що розширюють її можливості в різних розділах математики. Бібліотеки складаються з підпрограм, написаних власною мовою Maple, спеціально призначеному для створення програм символічних обчислень. Maple - відкрита система, тобто в ній передбачене поповнення бібліотек підпрограмами користувача.

Продемонструємо методику по створенню генератора завдань з інтегрування раціональних алгебраїчних функцій. Розглянемо найпоширеніші приклади з теми інтегрування раціональних алгебраїчних функцій:

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+3}, \quad \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx, \quad \int \frac{5x-1}{x^3-3x-2} dx, \quad \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx, \quad \int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x} dx,$$

$$\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+x^2+4x+4} dx, \quad \int \frac{2x^3+x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2-x+1)} dx, \dots$$

Наприклад для того, щоб згенерувати невизначений дробовий інтеграл можливо скористатись

наступним шаблоном
$$\int \frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{Kx^4 + Lx^3 + Rx^2 + Sx + T} dx.$$

В залежності від коефіцієнтів ми отримаємо близько $31 \times 26 = 806$ різних типів прикладів: від звичайних табличних інтегралів, як, наприклад, $\int \frac{a}{bx+c} dx$ до більш складних інтегралів,

знаходження яких передбачає подання неправильного раціонального дроби на суму многочлена та правильного раціонального дроби, а також розклад останнього на суму найпростіших дроби. Безпосередньо використовувати цей метод незручно, оскільки ми не можемо впливати на кількість та значення цілих коренів знаменника та чисельника.

Значно більш ефективною моделлю є наступна:

$$\int P_k(x) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i x + c_i} + \sum_{j=1}^m \frac{h_j x + l_j}{p_j x^2 + q_j x + r_j} \right) dx \quad (1)$$

де $P_k(x)$ – многочлен k -ого степеня.

В залежності від обраного рівня складності після перетворень (зведення до спільного знаменника та розкриття дужок) отримаємо вже готовий інтеграл. Тут важливо, що в Maple легко реалізувати автоматичне виконання указаних перетворень. Відповідний блок програми матиме вигляд (для прикладу взяли $n=2, m=1, P_k(x)=0$):

```
with(RandomTools):
n:=2: m:=1: F:=0: G:=0:
for i to n do
LL:={-5..-1,1..5}:
a[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {a[i]}:
b[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {b[i]}:
c[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {c[i]}:
f[i]:=a[i]/(b[i]*x+c[i]):
F:=F+f[i]:
end do:
for i to m do
LL:={-10..-1,1..10}:
h[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {h[i]}:
l[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {l[i]}:
```

```
p[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {p[i]};
q[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {q[i]};
r[i]:= Generate(choose(LL)); LL:=LL minus {r[i]};
g[i]:= (h[i]*x+l[i])/(p[i]*x^2+q[i]*x+r[i]);
end do;
print( Int(normal(F+G,`expanded`),x) );
```

В результаті роботи програми генерується наступний вираз

$$-\frac{2}{-5x+3} + \frac{3}{x-3} + \frac{-2x-6}{2x^2-x+1}$$

який всього за допомогою однієї команди `normal` зводиться до спільного знаменника, що дозволяє подати завдання у наступному вигляді

$$\int \frac{24x^3 - 41x^2 + 122x - 69}{10x^4 - 41x^3 + 41x^2 - 27x + 9} dx$$

Підставивши $n=2$ або 3 , а $m=0$, отримуємо відповідні вирази:

$$\frac{3}{2x-3} + \frac{1}{-3x+4} = \int \frac{7x-9}{6x^2-17x+12} dx$$

$$-\frac{5}{3x+1} + \frac{2}{-2x+1} - \frac{5}{x+2} = \int \frac{-46x^2-24x+11}{6x^3+11x^2-3x-2} dx$$

Можна скористатись і наступною моделлю генерування раціональних дробів:

$$\int \frac{\prod_{i=1}^w (x - b_i)^{a_i} \prod_{g=1}^v (x^2 + k_g x + l_g)^{n_g}}{\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{r_i} \prod_{j=1}^m (x^2 + p_j x + q_j)^{s_j}} dx \tag{2}$$

В залежності від чисел w, v, n, m степінь чисельника може бути \geq або $<$ за степінь знаменника. Тобто можемо отримувати правильний або неправильний дріб. Степені h_g та s_j в залежності від трудності завдання доцільно брати 1 або 0.

Одним з альтернативних до приведеного алгоритму є наступний. Згенерувати не порожню множину коренів многочленів чисельника та знаменника, визначити кратність коренів та на основі цих даних створити підінтегральну функцію. Наприклад, нехай коренями чисельника є числа -5 та 2 – однократні, а знаменника -1 – простий корінь та -3 – двократний. Тоді загальний вираз (2) набуває наступного вигляду

$$\int \frac{(x+5)(x-2)}{(x+1)(x+3)^2} dx \tag{3}$$

В залежності від ступеня складності, завдання для студента може бути подане або безпосередньо у вигляді (3), або перетворене до одного із наступних виглядів

$$\int \frac{x^2 + 3x - 10}{(x+1)(x+3)^2} dx \quad \int \frac{(x+5)(x-2)}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} dx \quad \int \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 + 7x^2 + 15x + 9} dx$$

Розкриття дужок в Maple виконується за допомогою команди `expand`.

У всіх попередніх випадках коефіцієнти $a[i]$ та $b[i]$, щоб вони неповторювались, можливо обчислювати як вибірку з множини чисел.

```
> with(RandomTools);
YM:=rand(1..4); LL:={$-10..-1,$1..10};
for i to 4 do
a[i]:= Generate(choose(LL));
LL:=LL minus {a[i]};
```

```

if i<3 then Dd[i]:=1; print('a'[i]=a[i],'d'[i]=Dd[i]); end if; if YM()=4 then R[i]:=2 else R[i]:=1; end if;
if i>2 then print('a'[i]=a[i],'b'[i]=R[i]); end if;
end do;
chiselnik:=(x-a[1])^Dd[1]*(x-a[2])^Dd[2]; znamennik:=(x-a[3])^R[3]*(x-a[4])^R[4];
print(Int(expand(chiselnik)/expand(znamennik),x));

```

$$\int \frac{x^2 + 18x + 80}{x^3 + 7x^2 + 8x - 16} dx$$

За допомогою приведенного блоку легко отримати довільну кількість інтегралів раціональних дробів:

$$\int \frac{x^2 - 9x + 18}{x^2 - 3x - 28} dx \quad \int \frac{x^2 + 9x + 8}{x^3 - 5x^2 - 48x + 252} dx \quad \int \frac{x^2 + 11x + 24}{x^2 + 12x + 35} dx \quad \int \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 2x - 24} dx \quad \dots$$

Для підвищення ефективності самостійної пізнавальної діяльності студентів та зменшення рутинного навантаження на викладача розроблено Maple-програма тренажер, що відтворює весь хід розв'язання завдань з інтегрування раціональних дробів. Продемонструємо результат який видає програма

Трохи модифікувавши програму отримали тренажер з інтегрування раціональних функцій, тобто програма видає початковий приклад та по крокам розписує хід розв'язку даного прикладу. Продемонструємо результат який видає програма:

$$I = \int \frac{5x^6 - 402x^2 - x^5 + 79x + 11x^4 - 892}{x^4 - 81} dx$$

Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом

Подано цей дріб у вигляді суми полінома та правильного раціонального дробу

$$\frac{5x^6 - 402x^2 - x^5 + 79x + 11x^4 - 892}{x^4 - 81} = 5x^2 - x + 11 + \frac{-1 - 2x + 3x^2}{x^4 - 81}$$

$$\int \frac{5x^6 - 402x^2 - x^5 + 79x + 11x^4 - 892}{x^4 - 81} = \int (5x^2 - x + 11) dx + \int \frac{-1 - 2x + 3x^2}{x^4 - 81} dx$$

$$\int (5x^2 - x + 11) dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 11x$$

Для знаходження інтеграла від правильного раціонального дробу:

$$\int \frac{-1 - 2x + 3x^2}{x^4 - 81} dx$$

Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники

$$x^4 - 81 = (x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$$

Подано підінтегральну функцію у вигляді суми найпростіших дробів

$$\frac{-1 - 2x + 3x^2}{x^4 - 81} = \frac{A_1}{x - 3} + \frac{A_2}{x + 3} + \frac{A_3x + A_4}{x^2 + 9}$$

Помножимо обидві частини тотожності на знаменник лівої частини

$$-1 - 2x + 3x^2 = A_1(x + 3)(x^2 + 9) + A_2(x - 3)(x^2 + 9) + (A_3x + A_4)(x - 3)(x + 3)$$

Маємо тотожність, яка повинна справджуватись при будь-яких значеннях

Крім того, коефіцієнти при однакових степенях x

в лівій та правій частинах тотожності повинні бути рівними

Запишемо рівність при значеннях x=(3, -3)

$$x = 3, \quad 20 = 108A_1$$

$$x = -3, \quad 32 = -108A_2$$

В здобутому рівнянні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x

$$x^0 \parallel (27A_1 - 27A_2 - 9A_4 = -1)$$

$$x^1 \parallel (9A_1 + 9A_2 - 9A_3 = -2)$$

$$x^2 \parallel (3A_1 - 3A_2 + A_4 = 3)$$

$$x^3 \parallel (A_1 + A_2 + A_3 = 0)$$

Розв'язанням отриманої системи лінійних рівнянь дістанемо:

$$A_2 = \frac{-8}{27}, \quad A_4 = \frac{14}{9}, \quad A_3 = \frac{1}{9}, \quad A_1 = \frac{5}{27},$$

Отже

$$\int \frac{-1 - 2x + 3x^2}{x^4 - 81} dx = \int \left(\frac{5}{27(x-3)} - \frac{8}{27(x+3)} + \frac{\frac{x}{9} + \frac{14}{9}}{x^2 + 9} \right) dx$$

$$\int \frac{5}{27(x-3)} dx = \frac{5}{27} \ln(|x-3|)$$

$$\int -\frac{8}{27(x+3)} dx = -\frac{8}{27} \ln(|x+3|)$$

$$\int \frac{\frac{x}{9} + \frac{14}{9}}{x^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{x+14}{x^2 + 9} dx$$

Маємо найпростіший дріб третього типу
Виділимо в чисельнику похідну від знаменника = 2x

$$\int \frac{x+14}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx + 14 \int \frac{1}{x^2+9} dx$$

Та застосуємо формулу:

$$\int \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} dx = \ln(|\psi(x)|)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+9} dx = \ln(|x^2+9|)$$

$$\int \frac{x+14}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln(|x^2+9|) + \frac{7}{9} \sqrt{36} \operatorname{arctg}\left(\frac{x\sqrt{36}}{18}\right)$$

$$\int \frac{5x^6 - 402x^2 - x^5 + 79x + 11x^4 - 892}{x^4 - 81} dx =$$

$$\frac{5x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 11x + \frac{5}{27} \ln(|x-3|) - \frac{8}{27} \ln(|x+3|) + \frac{1}{18} \ln(|x^2+9|) + \frac{14}{27} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$$

Література

1. Михалевич В.М. Ключові проблеми створення навчально-контролюючого комплексу з дисциплін математичного спрямування// Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми// Зб. наук. прац. – Випуск 10 / Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. Київ-Вінниця: ДОВ "Вінниця", 2006, С.391-197.
2. Михалевич В.М. Навчально-контролюючий Maple – комплекс з вищої математики //Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2004. - № 1. – С.74-78.
3. Михалевич В.М. Excel-VBA-Marple програма генерації задач з дисциплін математичного спрямування//Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2005. - № 2. – С.74 83.