УДК 004.942:[519.6+519.873]

Д. О. Топчий

THE THEORY OF PLAFALES: ЧЕТВЕРНА РОЛЬ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ СЕРЕНДИПОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ. ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ

У статті подано огляд результатів конструювання моделей серендипових скінченних елементів на основі «the theory of plafales»: чітке розуміння четверної ролі базисних функцій серендипових скінченних елементів.

Ключові слова: *серендипів скінченний елемент, базисні функції, plafal (-es), інформаційна технологія в МСЕ.*

Вступ

Історія методу скінченних елементів (МСЕ) почалася з ідеї видатного математика Куранта, яку він оприлюднив у 1943 році [1]. Спочатку ідея Куранта не зацікавила дослідників, тому що її реалізація вимагала великих обсягів обчислювальної роботи. Після появи електронної обчислювальної машини (ЕОМ) метод почали активно розробляти інженери-дослідники. Саме вони, а не математики відразу окупували обчислювальні машини з метою отримати відповіді на практичні питання. Процедура Куранта стала новим кроком в обчислювальній математиці, хоча вплив методу скінченних різниць (МСР) [2] деякий час лишався (до появи довільної триангуляції Тернера). У 1954 році Аргиріс [3] розвинув деякі узагальнення лінійної теорії конструкцій та представив методи дослідження дискретних конструкцій складних конфігурацій у формі, зручній для використання ЕОМ. Роком пізніше він показав [4], що матричне рівняння системи як для методу напружень, так і для методу переміщень може бути отримане за допомогою мінімізації потенційної енергії системи. Перше формальне викладення МСЕ разом із методом жорсткостей для сукупності елементів належить Тернеру, Клауфу, Мартину й Топпу [5, 6], які, досліджуючи задачі про плоский напружений стан, використовували для опису властивостей трикутного елемента рівняння класичної теорії пружності. Вони застосовували матричні методи для дискретних структур до неперервних структур завдяки розділенню їх на скінченну кількість елементів. Термін «скінченні елементи» першим увів Клауф [7] у 1960 році. Для апроксимації функцій двох аргументів можна використовувати традиційний спосіб, тобто побудувати інтерполяцію за Лагранжем (факторизація двох одновимірних поліномів Лагранжа відповідного степеня) й отримати лагранжеві скінченні елементи (ЛСЕ) [8, 9]. Факторизація призводить до того, що лагранжеві елементи мають вузли в середині скінченного елемента. Внутрішні вузли збільшують об'єм обчислень та не використовуються під час ансамблювання скінченних елементів. Ці недоліки відсутні в серендипових скінченних елементах (ССЕ). Первісна мета створення ССЕ – можливість перетворення довільного чотирикутника у квадрат і зменшення обсягу обчислень за рахунок вилучення "зайвих" внутрішніх вузлів. Такий криволінійний елемент з'явився під час розрахунку споруд у роботі [10] і отримав назву «серендипів скінченний елемент». Швидкий розвиток і популяризація МСЕ пояснюють професійною підготовкою користувачів. З іншого боку, дехто вважає (і не без підстав), що брак математичних знань у інженерно орієнтованих фахівців був головною причиною появи й розповсюдження в МСЕ хибних гіпотез і неадекватних моделей. Найбільша кількість помилок пов'язана з конструюванням функцій форми (базисних функцій) скінченних елементів, зокрема елементів серендипової сім'ї. У якості обчислювального шаблона квадрат із білінійною інтерполяцією вперше був використаний у 1964 році [11]. Цей елемент добре комбінується з трикутним симплексом, утворюючи просту й ефективну сітку МСЕ. Як правило, квадрати корисні всередині розрахункової області, а трикутники – у приграничній смузі. У реальних двовимірних і тривимірних задачах границі розрахункової області, границі між елементами, а також границі поділу (у неоднорідному середовищі) часто криволінійні [9, 11, 12]. Саме такий елемент досліджували в 1968 році [10] Ергатудіс, Айронс і Зенкевич. Це був приклад успішного застосування ізопараметричної техніки, яка полягає [13] у виборі кусково-поліноміальних функцій для визначення перетворення координат. Термін «ізопараметрична» означає, що для перетворення координат вибирають ті самі поліноми, які інтерполюють фізичне поле, тобто базисні функції виконують подвійну роль. У 1968 році автори [10] не врахували, що роль базисних функцій – потрійна. Їх використовують у задачах локалізації навантажень на скінченний елемент. Якщо внутрішні вузли є, перетворення може бути чутливим до переміщень цих вузлів. Можливо автори [10] спостерігали цю особливість і саме тому відмовились від внутрішнього вузла лагранжевої моделі. На початку 80-х років XX-го століття, коли стало зрозуміло, що роль матричної алгебри в МСЕ перебільшена, з'явились геометричні підходи [14], а також стохастичні процедури побудови базисів [15, 16].

Аналіз досліджень

Основою роботи є публікації [17 – 26].

Мета роботи

Основна мета роботи – огляд результатів конструювання моделей серендипових скінченних елементів на основі «the theory of plafales»: чітке розуміння четверної ролі базисних функцій серендипових скінченних елементів і подальше застосування розроблених моделей (у якості алгоритмічної основи) для інформаційних технологій у МСЕ.

Актуальність роботи

Існує можливість створення універсальних програмно-апаратних комплексів (ПАК) як практичних реалізацій інформаційних технологій у МСЕ з компонентом штучного інтелекту для конструювання функцій форми (базисних функцій) в автоматичному режимі.

Основна частина

Серендипові моделі є прикладом одночасної інтерполяції та апроксимації: вони інтерполюють функцію на границі елемента та апроксимують усередині його. Головний недолік стандартних базисів ССЕ [8 – 11, 27 – 30] – протиприродний повузловий розподіл навантаження від одиничної масової сили: у кутових вузлах навантаження від'ємні (парадокс Зенкевича) [9]. Роль стандартних функцій форми (базисів Зенкевича) – подвійна: їх використовують в ізопараметричній техніці. У стандартної моделі додаткових ступенів волі немає, тому що вона сконструйована за "жорсткими" [31] рецептами матричної алгебри в межах інтерполяційної гіпотези Лагранжа. Кількість додаткових мономів в інтерполянті ССЕ залежить від порядку базису відповідного ЛСЕ. Перші альтернативні моделі ССЕ з'явились у 1982 році [15, 16] через неможливість знайти раціональне пояснення протиприродного повузлового розподілу рівномірної масової сили. Сьогодні існують декілька методів побудови альтернативних моделей [32]. ССЕ із від'ємними навантаженнями у вузлах непридатні для комп'ютерного тестування. Поява альтернативних серендипових моделей, які реалізують адекватний розподіл рівномірної масової сили, пов'язана з розробкою А. Н. Хомченка ймовірнісно-геометричного методу конструювання базисних функцій [15, 16, 33 – 40]. Фактично А. Н. Хомченко започаткував і його послідовники розвинули конструктивну (у дусі Бернштейна [41]) теорію серендипових апроксимацій, результати якої конструктивно доводять, що роль базисних функцій ССЕ – потрійна.

Четверна роль базисів ССЕ

У роботах [17 – 22] була поставлена ключова мета – конструктивно довести, що роль базисних функцій ССЕ – четверна. Характеристика четвертої ролі – *t* (час). A priori, відомі в МСЕ програмні комплекси (ПК), наприклад Nastran, Штуцер, Ansys і т.д.; а також системи автоматизованого проектування і розрахунку (САПР), наприклад Solid Works, містять у своїй алгоритмічній основі набори базисів, раніше знайдених дослідниками. При цьому жоден із сучасних ПК і САПР не містять у своїй складовій основі альтернативних базисів ССЕ, оскільки була створена лише єдина інформаційна технологія на Turbo Pascal для комп'ютерної діагностики стаціонарних фізичних полів [42] серед учнів А. Н. Хомченка. Виникає інтерес до створення покоління універсальних програмно-апаратних комплексів (ПАК), які розв'язують такі класи практичних задач:

1. Автоматичний режим конструювання оптимальних (базиси, що реалізують теоретично обґрунтований і фізично адекватний розподіл вузлових навантажень) функцій форми ССЕ на відомих розрахункових шаблонах.
2. Автоматичний режим конструювання оптимальних базисів ССЕ на розрахункових шаблонах, на якому ще не знайдено функції форми. Наприклад, для правильних *n*-кутників виду $n = 2^{2^k} + 1, k \geq 2$ [43].
3. Автоматичний режим конструювання оптимальних базисів ССЕ, які задовільняють диференціальний критерій гармонійності Лапласа [44], інтегральні критерії гармонійності Кьобе і Привалова [45, 46].

Безумовно, вищеназваний ПАК є практичною реалізацією інформаційної технології в МСЕ, яка виконує збір, обробку, зберігання й вивід на дисплей користувача цифрової інформації. Ця інформаційна технологія й результати конструктивної теорії серендипових апроксимацій можуть слугувати якісним інструментом для подальшого розвитку ПК і САПР у МСЕ.

Для 1-ого класу задач у якості алгоритмічної (складової) основи ПАК має місце комбінований алгебро-геометричний метод [47]. Для гарантованої реалізації лінії ПАК, які розв'язують задачі 2 і 3-го класів, необхідно розробити якісні математичні моделі й залучити штучний інтелект [48]. Серед нескінченної кількості оптимальних базисів ССЕ, які реалізують один і той самий спектр навантажень, пошук базису, який задовільняє диференціальний і (або) інтегральний критерій гармонійності, – проблема NP складності [49] (задача повного перебору).

Для успішного виконання задач 2 і 3-го класів указані ПАК повинні виконати всебічний аналіз заданої конфігурації $L = L(x, y, t)$ із формоутворенням поверхні базисної функції $N(x, y) = L(x, y, T)$, де $T -$ момент часу, під час якого утворюється (має місце) поверхня $N(x, y)$. Невід'ємним складником аналізу є дослідження проміжних поверхонь $M(x, y) = L(x, y, T)$, де t = fix (фіксоване значення), які утворюються (можуть бути отримані) у певному проміжку часу $t \in [0, T]$. A priori, володіючи аналітичним видом функції форми $N(x, y)$, можна виконати візуалізацію (отримати ілюстративні образи у тривимірному просторі *x, y, z*) нестаціонарної поверхні $L(x, y, t) = N(x, y) \circ T(t)$ у фіксовані моменти часу ($\circ -$символ композиції функцій); в окремому випадку – $L(x, y, t) = N(x, y) \bullet T(t)$, *T(t)* – нормувальний множник.

У разі розгляду базисної функції як функції від часу в явному вигляді, наприклад для ССЕ першого порядку: $N_i(x, y, t) = \mu_1^{(i)}(t) + \mu_2^{(i)}(t)\, x + \mu_3^{(i)}(t)\, y + \mu_4^{(i)}(t) xy$, i – номер вузла, стандартні функції форми можуть бути отримані із застосуванням апарату матричної алгебри з урахуванням інтерполяційної гіпотези [8, 9, 29]. У результаті для базису білінійної інтерполяції має місце така тотожність:

$$\begin{cases} N_i(x, y) \equiv N_i(x, y, T_i) = \mu_1^{(i)}(T_i) + \mu_2^{(i)}(T_i)\, x + \mu_3^{(i)}(T_i)\, y + \mu_4^{(i)}(T_i) xy, \\ \mu_1^{(i)}(T_i) = \dfrac{1}{4},\ \mu_2^{(i)}(T_i) = \dfrac{1}{4} x_i,\ \mu_3^{(i)}(T_i) = \dfrac{1}{4} y_i,\ \mu_4^{(i)}(T_i) = \dfrac{1}{4} x_i y_i,\ x_i,\ y_i = \pm 1,\ i = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Фактично із залученням компоненти часу виникає новий підхід до конструювання базисів ССЕ, а саме: шукані функції форми ССЕ – логічний наслідок усебічного (багатогранного) аналізу моделей $L = L(x, y, t)$.

У строгому розумінні й у загальному вигляді $u = u(x, y, t)$ – тривимірний топологічний многовид M^3 [50, 51] у чотиривимірному просторі, $M(x, y)$ – проекція (двовимірний многовид M^2) многовиду M^3 на тривимірний простір. Тобто модель відображень ($Hom_{Top}(E^m, M^n)$ [52]), де Top – категорія топологічних просторів, E^m – m-вимірний евклідів простір [53], виглядає так:

1. $u : E^3 \to E^4, u = u(x, y, t)$ – мономорфізм (у загальному вигляді), *x, y, t* – виміри E^3. Тривимірний многовид M^3 отриманий у результаті відображення.

2. $f : M^3 \to E^3, f$ – мономорфізм (у загальному вигляді), *x, y, z* – виміри E^3. Двовимірний многовид M^2 (перспектива) – результат дії відображення.

Під час використання апарату «the theory of plafales» [24, 25] процедура отримання поверхні $M(x, y)$ (проекції тривимірного многовиду M^3 на тривимірний простір) виглядає так:

1. $u : PF_k^{U^{SP}} \cong E^2 \to E^3, u = u(x, y, t)$ – мономорфізм (у загальному вигляді), *x, y, z* – виміри E^3. Поверхня першого порядку E^2 (площина) гомеоморфна об'єкту «the theory of plafales» – the static canvas of plafal (статичний килим) $PF_k^{U^{SP}}$ [25, с. 16]. З погляду алгоритмічної складності, зазначена операція більш оптимальна, ніж модель із двох послідовних відображень, оскільки шуканий многовид M^2 отримано в результаті єдиного відображення. Вищевказана математична компонента була закладена (у якості алгоритмічного складника) для рендерінгу в режимі реального часу в нещодавно створеній інформаційній технології на C#, практичною реалізацією якої є програмно-технічний комплекс «Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами» [23].

Розроблені математичні моделі ССЕ [17 – 22] на основі апарату «the theory of plafales» [24, 25] містять у собі конфігурації $L = L(x, y, t)$ на квадратному і трикутному шаблонах; і як наслідок – моделюють формоутворення нестаціонарних поверхонь польових функцій $U(x, y, t) = \sum_{i=1}^{m} N_i(x, y) \bullet U_i(t)$. Пошук розв'язання ПАК усіх трьох класів задач – це залучення машинного часу й ресурсів потужностей ЕОМ [54]. Час виступає комплексним інструментом: він є якісним індикатором робіт ПАК і ЕОМ для обробки результатів конструювання базисних і польових функцій. **Четверна роль базисних функцій ССЕ має такий зміст:** 1. Їх використовують в ізопараметричній техніці й у задачах розподілу навантажень на скінченний елемент. 2. На розрахункових 2D-шаблонах (квадрат, трикутник і т. д.) базисна функція є функцією від часу в неявному вигляді, а саме: $N_i(x, y) = L_i(x, y, T_i)$. Якісні властивості й необхідні вимоги, які висувають до функції форми ССЕ, є результатами аналізу моделей $L = L(x, y, t)$ з боку ПАК.

Висновки

У статті із застосуванням апарату метаматематики (теорії категорій) показана перевага застосування апарату «the theory of plafales» для всебічного аналізу моделей $L = L(x, y, t)$ у якості алгоритмічних основ ПАК 2 і 3-го класів задач. Для 2-го класу задач ПАК розробляють (у разі необхідності) конструктивну (в рамках конструктивної теорії функцій [41]) математичну модель на основі публікацій [17 – 22]. Четверна роль базисних функцій ССЕ має такий зміст: 1. Їх використовують в ізопараметричній техніці й у задачах розподілу навантажень на скінченний елемент. 2. На розрахункових 2D-шаблонах (квадрат, трикутник і т. д.), базисна функція є функцією від часу в неявному вигляді, а саме: $N_i(x, y) = L_i(x, y, T_i)$. Якісні властивості й необхідні вимоги, які висувають до функції форми ССЕ, є результатами аналізу моделей $L = L(x, y, t)$ з боку ПАК. Послідовниками [23, 42] конструктивної теорії серендипових апроксимацій (школи А. Н. Хомченко) були розроблені інформаційні технології для тестування стаціонарних і нестаціонарних фізичних полів відповідно.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – V. 49. – № 1. – P. 1 – 23.
2. Hanslo P. A Crank-Nicolson Type Space-Time Finite Element Method for Computing on Moving Meshes / P. Hanslo // J. Comp. Physics. – 2000. – № 159 – P. 274 – 289.
3. Argyris J. H. Energy theorems and structural analysis / J. H. Argyris / Aircraft Eng. – 26. – 1954. – P. 347 – 356.
4. Argyris J. H. Energy theorems and structural analysis / J. H. Argyris // Aircraft Eng. – 27. – 1955. – P. 42 – 58.
5. Turner M. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures / M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, L. P. Topp // J. Aeron. Sci. – 1956. – V. 23. – № 9. – P. 805 – 823.
6. Turner M. J. The direct stiffness method of structural analysis / M. J. Turner // 10th Meeting AGARD Struct. Mater. Panel. – Aachen, 1959. – P. 320 – 322.
7. Clough R. W. The finite element method in plane stress analysis / R. W. Clough // J. Struct. Div., ASCE. – Proc. 2-d Conf. Electronic Computation. – P. 345 – 378.
8. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.
9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
10. Ergatoudis I. Curved isoperimetric "quadrilateral" elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // Internat. J. Solids Struct. – № 4. – 1968. – P. 31 – 42.
11. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
12. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. – М. : Мир, 1981. – 216 с.
13. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
14. Wachspress E. I. A rational finite element basis / E. I. Wachspress. – New York : Academic Press, 1975. – 344 p.
15. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – Деп. в ВИНИТИ, № 1213. – 9 с.
16. Хомченко А. Н. Метод конечных элементов: стохастический подход / А. Н. Хомченко. – Ив.-Франк. ин-т нефти и газа: Ивано-Франковск, 1982. – Деп. в ВИНИТИ, № 5167. – 7 с.
17. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій в МСЕ / Д. О. Топчий // Компьютерное моделирование в наукоёмких технологиях: труды международной научно-технической конференции (Харьков, 28 мая – 31 мая 2014 г.). – Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, 2014. – С. 390 – 391.
18. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику

першого порядку / Д. О. Топчий // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський національний університет імені І. Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 170 – 182.
19. Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику першого порядку / Д. О. Топчий // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Тез. докл. конф. (Кам'янець-Подільський, 4 квітня – 5 квітня 2014 р.). – Кам'янець-Подільський національний університет імені І. Огієнка, 2014. – С. 166 – 167.
20. Топчий Д. О. The theory of plafales: конструювання базисних функцій на трикутнику другого порядку / Д. О. Топчий // Инновационные аспекты геометро-графического образования: материалы международной научно-методической конференции (Севастополь, 6 мая – 7 мая 2014 г.). – Севастопольский национальный технический университет, 2014. – С. 26 – 27.
21. Топчий Д. О. The theory of plafales: конструювання стандартного базису ССЕ•8 / Д. О. Топчий // Приднепровский научный вестник. – 2014. – № 5 (152). – С. 55 – 65.
22. The theory of plafales: конструювання стандартного базису ССЕ•12 [Електронний ресурс] / Д. О. Топчий // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2014. – № 3. – Режим доступу до журн.: http://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/414/412.
23. Топчий Д. О. Программно-технический комплекс «Тестирование нестационарных температурных полей с динамическими термоэлементами» / Д. О. Топчий // Электронный научный журнал «Отраслевые аспекты технических наук». – Издательство ИНГН, 2015. – Выпуск 4 (46). – С. 27 – 37.
24. Topchyi D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchyi. – Brentwood: Best Global Publishing, 2011. – 634 p.
25. Topchyi D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems [Електронний ресурс] / D. Topchyi. – Brentwood: Best Global Publishing, 2013. – 695 p. – Режим доступу: http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf.
26. Topchyi D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market / D. Topchyi // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI: thesis report. – (Zakopane-Koscielisko, 27 Aug. – 3 Sep. 2013). – Warszawa, 2013. – P. 58.
27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М. : Мир, 1984. – 428 с.
28. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. де Фриз. – М. : Мир, 1981. – 304 с.
29. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
30. Хомченко А. Н. Стандартные серендиповы многочлены и линейчатые поверхности / А. Н. Хомченко, Е. И. Литвиненко, И. А. Астионенко // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Міжвузівський збірник. – Вип. № 6. – Луцьк : Луцький націон. техн. університет, 2011. – С. 266 – 269.
31. Арнольд В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2008. – 32 с.
32. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости. Серия : математика, физика. – Белгород : БелГУ, 2009. – Вып. 16. – № 5 (60). – С. 15 – 31.
33. Хомченко А. Н. Геометрическая вероятность и кубическая двумерная интерполяция / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1983. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.11.1983, №1247-D83. – 8 с.
34. Хомченко А. Н. Знакопеременная плотность и полилинейная интерполяция / А. Н. Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2007– Вып. 2 (28). – С. 378 – 382.
35. Хомченко А. Н. Модели барицентрического усреднения и одношаговые схемы случайных блужданий / А. Н. Хомченко, В. В. Крючковский // Матем. модел. в образовании, науке и промыш. — С.-Пб. : МАН ВШ, 2005. – С. 112 – 115.
36. Хомченко А. Н. Моделі методу барицентричного усереднення / А. Н. Хомченко, Н. В. Валько, О. І. Литвиненко // Матеріали міжн. наук.-практ. конф. "Інформаційні технології в системі керування вищою освітою України". – Херсон : ХГУ, 2004. – С. 24 – 26.
37. Хомченко А. Н. О базисных функциях МКЭ для уравнений в частных производных / А. Н. Хомченко // III Респ. симпозиум по диффер. и интегр. Уравнениям : Тез. докл. – Одесса : ОГУ, 1982. – С. 257 – 258.
38. Хомченко А. Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А. Н. Хомченко. — Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск , 1982. – Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, № 5264. – 5 с.
39. Хомченко А. Н. О модификации серендиповых элементов / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1983. – Деп. в ВИНИТИ 4.07.1983, № 3643. – 4 с.
40. Хомченко А. Н. Серендиповы элементы и геометрическая вероятность / А. Н. Хомченко // Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск , 1983. – Деп. в УкрНИИНТИ 28.06.1983, №629Ук-D83. – 5 с.
41. Бернштейн С. Н. Конструктивная теория функций (1905 – 1930) / С. Н. Бернштейн. – М. : Изд-во Академии наук СССР, 1952. – Т. 1. – 580 с.
42. Литвиненко Е. И. Математические модели и алгоритмы компьютерной диагностики физических полей : дис. канд. техн. наук : 05.13.06 / Литвиненко Елена Ивановна. – Херсон, 1999. – 172 с.
43. Гиндикин С. Г. Дебют Гаусса / С. Г. Гиндикин // Научно-популярный физико-математический журнал

«Квант». – 1972. – № 1. – С. 2 – 11.
44. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М. : Наука, 1967. – 368 с.
45. Привалов И. И. Математический сборник / И. И. Привалов. – М. : 1925. – Т. 32 – С. 464 – 471.
46. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М. : Мир, 1985. – 384 с.
47. Астіоненко І. О. Моделі наближення функцій багатопараметричними поліномами серендипової сім'ї: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02 / Астіоненко Ігор Олександрович. – Херсон, 2011. – 180 с.
48. Аксенов С. В. Организация и использование нейронных сетей / С. В. Аксенов, В. Б. Новосельцев. – Томск: Томский политехнический университет, 2006. – 124 с.
49. Cook S. The P versus NP problem / S. Cook // Clay Mathematics Institute, 2000. – P. 1 – 12.
50. Бурбаки Н. Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов / Н. Бурбаки. – М. : Мир, 1975. – 224 с.
51. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. – М.: Физматлит, 2004. – 298 с.
52. Маклейн С. Категории для работающего математика / С. Маклейн. – М.: Физматлит, 2004. – 351 с.
53. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.– М. : Наука, 1976. – 542 с.
54. Таненбаум Э. Архитектура компьютера / Э. Таненбаум. – Pearson Prentice Hall, 2006. – 843 с.

Топчий Дмитро Олегович – здобувач кафедри прикладної та вищої математики.
Чорноморський державний університет імені Петра Могили.

Науковий керівник: Заслужений діяч науки і техніки України, завідувач кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили, д-р фіз.-мат. наук, професор **Хомченко А. Н.**