

**О. Б. Мокін, д. т. н., проф.; Б. І. Мокін, д. т. н., проф., акад. НАПН України;
Я. В. Хом'юк**

ОБГРУНТУВАННЯ ПОЯВИ ЕКСТРЕМУМУ НА ГРАФІКУ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СТАТИКИ ВИМІРЮВАЛЬНОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТРУМУ

Здійснено обґрунтування появи екстремуму на графіку математичної моделі статичної вимірювального трансформатора струму й показано, що після досягнення екстремуму вихідна характеристика такого трансформатора має спадний характер, через це одним і тим же значенням струму в його вторинній обмотці відповідають різні значення струму в первинній обмотці.

Ключові слова: *вимірювальний трансформатор струму, математична модель, вихідна характеристика, екстремум, неоднозначність виміру, обґрунтування.*

Постановка завдання й вихідні передумови

У роботі [1] нами були уточнені характеристики процесів у вимірювальних трансформаторах струму та їхніх математичних моделей, приведених у роботах [2, 3, 4], і евристично продемонстровано наявність спадної ділянки у вихідній характеристиці такого трансформатора, що не витікало із основоположних робіт, присвячених дослідженням трансформаторів струму. Тобто в роботі [1] ми фактично висловили лише гіпотезу, що вихідна характеристика вимірювального трансформатора струму має вигляд, зображений на рис. 1, і запропонували логічну концепцію підтвердження цієї гіпотези.

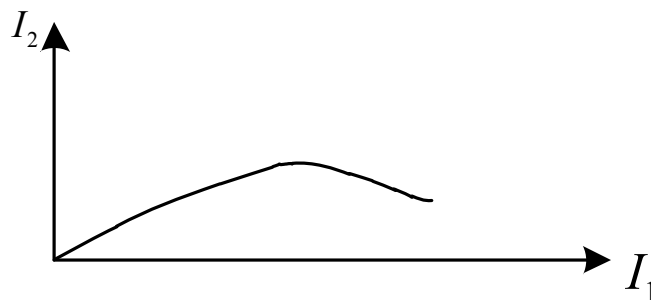


Рис. 1. Орієнтовний графік реальної вихідної статичної характеристики $I_2 = f(I_1)$ вимірювального трансформатора струму

Тож, завдання математично обґрунтувати цю гіпотезу.

Для цього ми використаємо дві вихідні передумови: по-перше, той факт, що, як і в роботах [1, 2, 3, 4], дійсне значення I_2 струму $i_2(t)$ у вторинній обмотці вимірювального трансформатора струму за період T визначатимемо за допомогою відомого співвідношення

$$I_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (i_2(t))^2 dt}, \quad (1)$$

а по-друге, графік струму $i_2(t)$ у вторинній обмотці вимірювального трансформатора струму за період T має той же вигляд, що і в роботі [1], але з прив'язкою до періоду, тобто, має

вигляд, зображений на рис. 2, на якому зображено також графік квадрата $(i_2(t))^2$ цього струму.

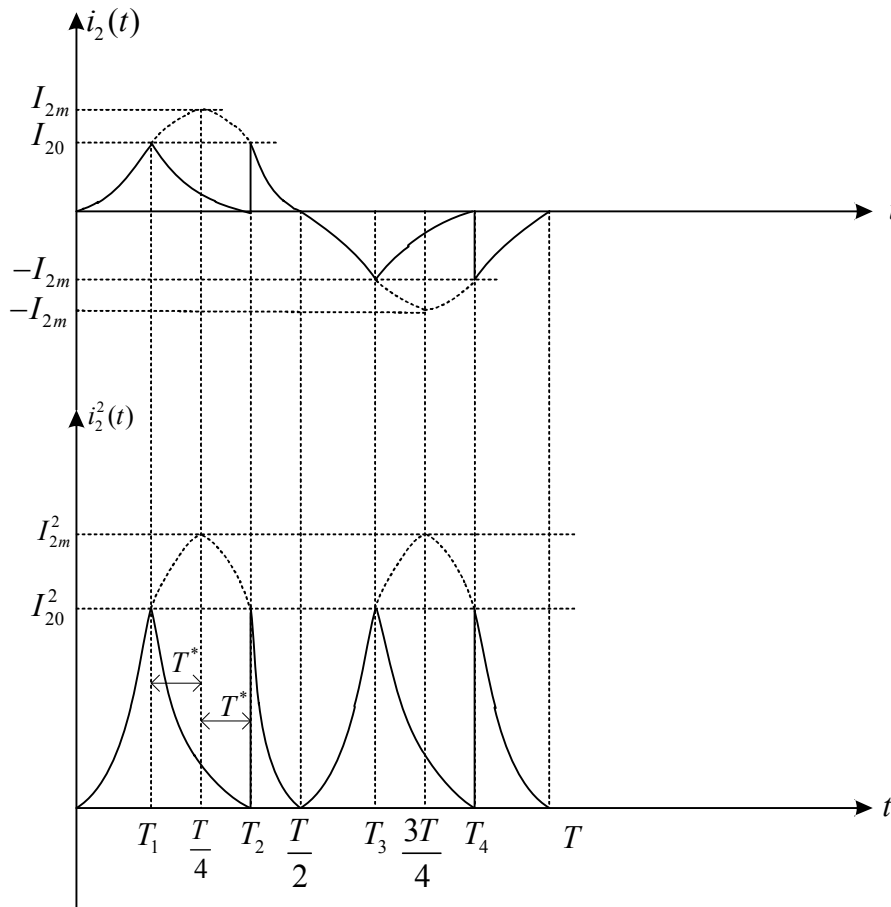


Рис. 2. Графік струму $i_2(t)$ та його квадрата $(i_2(t))^2$ за період T

Розв'язання поставленого завдання

Аналізуючи графік, зображений на рис. 2, легко бачити, що графіки квадратів струму $(i_2(t))^2$ на кожному півперіоді $\frac{T}{2}$ збігаються, і оскільки на півперіоді $\frac{T}{2}$ для струму $i_2(t)$ справедливим є вираз

$$i_2(t) = I_{2m} \sin \omega t [1(t) - 1(t - T_1)] + I_{20} e^{-\alpha \|t - T_1\|} [1(t - T_1) - 1(t - T_2)] + I_{2m} \sin \omega t [1(t - T_2) - 1(t - \frac{T}{2})], \quad (2)$$

то співвідношення (1) можна переписати так:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (i_2(t))^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} (i_2(t))^2 dt} = \\
 &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[\int_0^{T_1} I_{2m}^2 \sin^2 \omega t dt + \int_{T_1}^{T_2} I_{20}^2 (e^{-\alpha(t-T_1)})^2 dt + \int_{T_2}^{\frac{T}{2}} I_{2m}^2 \sin^2 \omega t dt \right]},
 \end{aligned} \tag{3}$$

де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кругова частота струму, а $1(t)$ – одинична функція, для якої справедливо

$$\begin{cases} 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } \forall t \in [0, \infty), \\ 0 & \text{для } \forall t < 0, \end{cases} \\ 1(t-\tau) = \begin{cases} 1 & \text{для } \forall t \in [\tau, \infty), \\ 0 & \text{для } \forall t < \tau \end{cases} \end{cases} \tag{4}$$

Ураховуючи те, що

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}, \tag{5}$$

$$(e^{-\alpha(t-T_1)})^2 = e^{-2\alpha(t-T_1)}, \tag{6}$$

підставляючи вирази (5), (6) у вираз (3) та беручи після цієї підстановки інтеграли у виразі (3) і спрощуючи результати інтегрування, отримуємо

$$I_2 = \sqrt{\frac{I_{2m}^2}{T} \left(T_1 - \frac{\sin 2\omega T_1}{2\omega} \right) - \frac{I_{20}^2}{\alpha T} (e^{-2\alpha(T_2-T_1)} - 1) + \frac{I_{2m}^2}{T} \left(\frac{T}{2} - T_2 + \frac{\sin 2\omega T_2}{2\omega} \right)}. \tag{7}$$

А тепер знову звернемося до рис. 2 і побачимо на ньому, що

$$T_1 = \frac{T}{4} - T^*, \quad T_2 = \frac{T}{4} + T^*, \tag{8}$$

де

$$0 \leq T^* < \frac{T}{4}, \tag{9}$$

Підставляючи вирази (8) у вираз (7) та спрощуючи результат підстановки, отримуємо

$$I_2 = \sqrt{\frac{2I_{2m}^2}{T} \left(\frac{T}{4} - T^* - \frac{\sin 2\omega T^*}{2\omega} \right) - \frac{I_{20}^2}{\alpha T} (e^{-2\alpha T^*} - 1)} = f_1(T^*). \tag{10}$$

У правильності отриманого виразу можна переконатися, перевіривши його на придатність для аналізу процесів у вторинній обмотці вимірювального трансформатора струму з ненасиченим станом осердя, для якого, як видно з рис. 2,

$$T^* = 0. \tag{11}$$

Підставляючи вираз (11) у вираз (10), отримуємо

$$I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}, \tag{12}$$

що відповідає відомому із теоретичних основ електротехніки дійсному значенню синусоїдального струму в обмотці трансформатора з ненасиченим осердям і підтверджує

правильність отриманої нами моделі (10).

А далі застосуємо стандартну процедуру дослідження функції $f_1(T^*)$ на екстремум, яка полягає у взятті похідної від цієї функції за її аргументом T^* , прирівнюванні отриманого виразу до нуля й розв'язанні отриманого в такий спосіб рівняння.

Тож, диференціюючи вираз (10), матимемо

$$\frac{dI_2}{dT^*} = \frac{\frac{2I_{2m}^2}{T}(-1 - \cos 2\omega T^*) + \frac{2I_{20}^2}{T}e^{-2\alpha T^*}}{2\sqrt{\frac{2I_{2m}^2}{T}\left(\frac{T}{4} - T^* - \frac{\sin 2\omega T^*}{2\omega}\right) - \frac{I_{20}^2}{\alpha T}(e^{-2\alpha T^*} - 1)}}. \quad (13)$$

Оскільки знаменник виразу (13) в діапазоні змін T^* в межах умови (9) у жодній із точок не дорівнюватиме нулю, то прирівнювання нулю цього виразу приводить до рівняння

$$\frac{2I_{2m}^2}{T}(-1 - \cos 2\omega T^*) + \frac{2I_{20}^2}{T}e^{-2\alpha T^*} = 0, \quad (14)$$

або

$$I_{2m}^2(1 + \cos 2\omega T^*) = I_{20}^2e^{-2\alpha T^*}, \quad (15)$$

або

$$f_2(T^*) = f_3(T^*), \quad (16)$$

де

$$f_2(T^*) = I_{2m}\sqrt{1 + \cos 2\omega T^*}, \quad (17)$$

$$f_3(T^*) = I_{20}e^{-\alpha T^*}. \quad (18)$$

В межах до границі між насиченим і ненасиченим станами осердя вимірювального трансформатора струму виконується рівність

$$kI_{2m} = I_{1m}, \quad (19)$$

де I_{1m} – амплітуда струму в первинній обмотці вимірювального трансформатора струму, тобто струму, який вимірюють, а k – коефіцієнт трансформації цього трансформатора під час його роботи в діапазоні до границі між ненасиченим та насиченим станами осердя. А тому вираз (17) можна представити і так

$$f_2(T^*) = \frac{I_{1m}}{k}\sqrt{1 + \cos 2\omega T^*}, \quad (20)$$

Нагадаємо, що

$$\alpha = \frac{r}{L}, \quad (21)$$

де r, L – відповідно активний опір та індуктивність замкнутого кола вторинної обмотки вимірювального трансформатора струму, від співвідношення яких графік експоненти у виразі (18), яким задають функцію $f_3(T^*)$, матиме різні траєкторії, які на рис. 3 показані для двох співвідношень. На цьому ж рис. 3 показані і два графіки функції $f_2(T^*)$, яку задають виразом (20), для двох значень амплітуди синусоїдального струму в первинній обмотці вимірювального трансформатора струму.

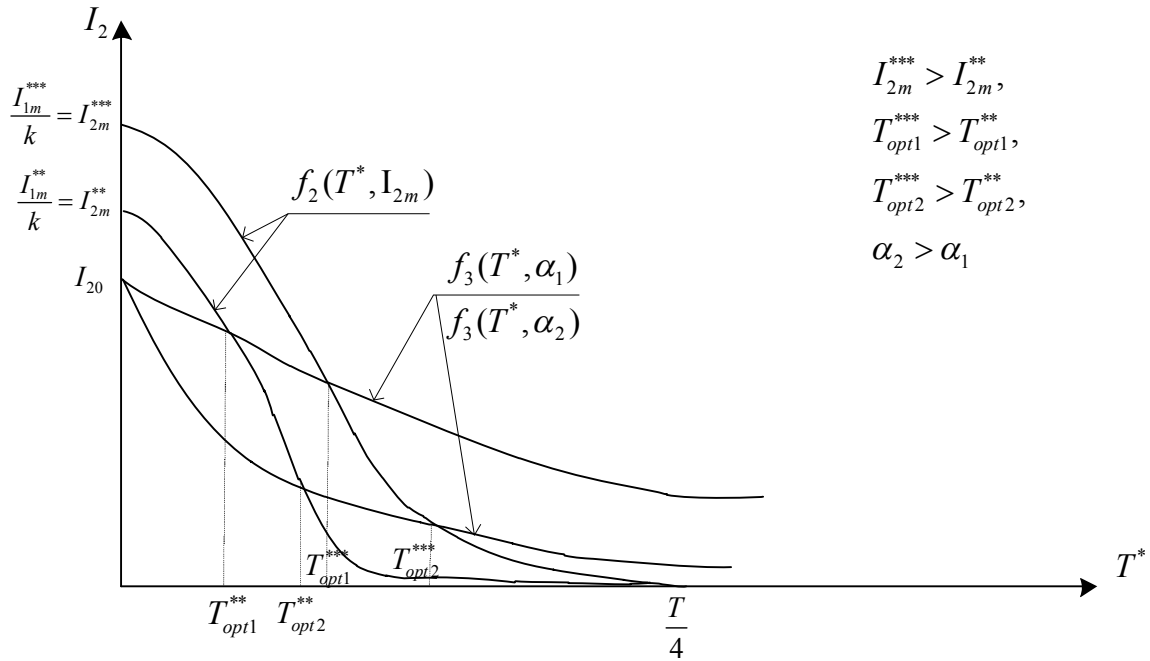


Рис. 3. Графічна інтерпретація процедури виявлення точок екстремуму функції $I_2 = f_1(T^*)$

Із рівняння (16) витікає, що абсциса точки перетину графіків функцій $f_2(T^*), f_3(T^*)$, зображених на рис. 3, визначає те значення параметра T^* , позначимо його T_{opt}^* , за якого функція $f_1(T^*)$ має екстремум, який у нашому випадку є максимумом, оскільки друга похідна $\frac{d^2 I_2}{d(T^*)^2}$ від цієї функції в цій точці є меншою за нуль, у чому легко переконатися, узявши похідну від виразу (13) та підставивши в отриманий результат T_{opt}^* замість T^* .

Із рис. 3 можна побачити, що зі зростанням амплітуди I_{1m} синусоїдального струму, який вимірюють, а відповідно і зі зростанням його дійсного значення I_1 , зв'язаного з амплітудою виразом, аналогічним записаному для вторинного струму у вигляді (12), координата T_{opt}^* , яка є функцією

$$T^* = f_4(I_{1m}) = f_4(\sqrt{2}I_1) = f_5(I_1), \tag{22}$$

також зростає, стартуючи з нульового значення на границі між ненасиченим і насиченим станами осердя вимірювального трансформатора струму й асимптотично прямуючи до значення $\frac{T}{4}$, як показано на рис. 4.

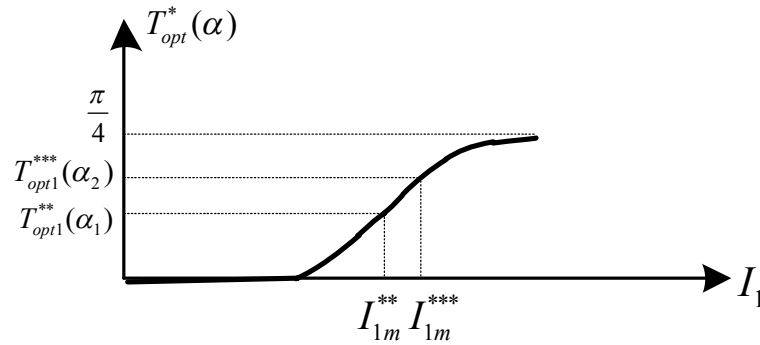


Рис. 4. Графік залежності $T_{opt}^* = f_4(I_{1m}) = f_4(\sqrt{2}I_1) = f_5(I_1)$

Підставляючи вираз (19) в (10), матимемо

$$I_2 = \sqrt{\frac{I_1^2}{k^2 T} \left(\frac{T}{4} - T^* - \frac{\sin 2\omega T^*}{2\omega} \right) - \frac{I_{20}^2}{\alpha T} (e^{-2\alpha T^*} - 1)} = f_1(I_1). \quad (23)$$

Із виразу (23) витікає: доки осердя вимірювального трансформатора струму ненасичене і виконується рівність (11), доти зі зростанням дійсного значення I_1 струму, що вимірюють, пропорційно зростає й дійсне значення I_2 струму у вторинній обмотці цього трансформатора. Із появою насичення осердя, яке супроводжує зростання значення T^* , пропорційність зростання I_2 зі зростанням I_1 порушується – і це зростання стає нелінійним, досягаючи в точці з абсцисою T_{opt}^* максимуму I_{2opt} , що згідно з виразом (23) задаватиме вираз

$$I_{2opt} = \sqrt{\frac{I_1^2}{k^2 T} \left(\frac{T}{4} - T_{opt}^* - \frac{\sin 2\omega T_{opt}^*}{2\omega} \right) - \frac{I_{20}^2}{\alpha T} (e^{-2\alpha T_{opt}^*} - 1)} \quad (24)$$

Із виразу (24) витікає, що числове значення максимуму I_{2opt} параметрично залежить від α , числове значення якого згідно з виразом (21) у свою чергу залежить від співвідношення активного опору та індуктивності кола вторинної обмотки вимірювального трансформатора струму. І оскільки гіпербола відносно α у другому члені підкорінного виразу у співвідношенні (24) зі зменшенням α наростає швидше, ніж спадає експонента з показником, до якого входить це ж α , то зі зменшенням α значення максимуму I_{2opt} зростатиме, а тому вимірювальний трансформатор струму матиме тим кращі метрологічні показники, чим меншим буде активний опір кола його вторинної обмотки.

Якщо ж після проходження точки максимуму по струму I_2 струм I_1 продовжуватиме зростати, призводячи до збільшення значення T^* , то, як витікає з виразу (23), струм I_2 почне спадати, наближаючись за значення $T^* = \frac{T}{4}$ до значення

$$I_{2(\frac{T}{4})} = \sqrt{\frac{I_{20}^2}{\alpha T} (1 - e^{-\frac{\alpha T}{2}})}. \quad (25)$$

Графічна інтерпретація взаємозв'язку між виразами (22) – (25) здійснена на рис. 5.

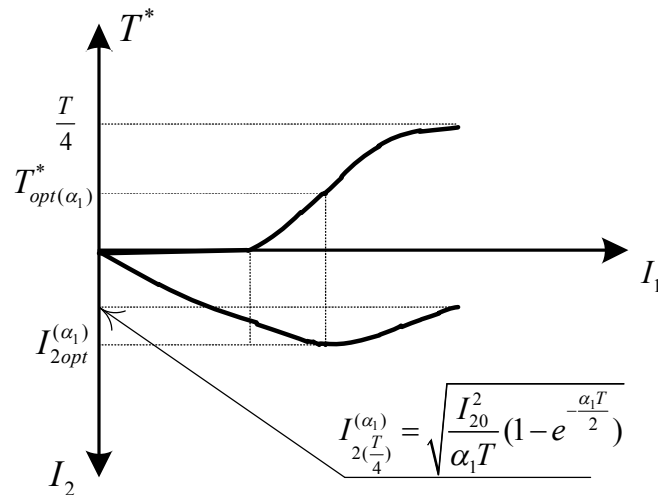


Рис. 5. Графічна інтерпретація взаємозв'язку між виразами (22) – (25)

Приведенням цієї графічної інтерпретації ми й завершимо обґрунтування появи екстремуму на графіку математичної моделі статички вимірювального трансформатора струму та спадної ділянки на цьому графіку, наявність якої призводить до того, що одним і тим же значенням струму у вторинній обмотці вимірювального трансформатора струму можуть відповідати різні значення струму, який вимірює цей трансформатор.

Висновки

1. Із застосуванням строгого математичного апарату здійснено обґрунтування появи екстремуму на графіку математичної моделі статички вимірювального трансформатора струму.
2. Показано, що вихідна характеристика вимірювального трансформатора струму після точки максимуму має спадну ділянку, наявність якої призводить до того, що одним і тим же значенням струму у вторинній обмотці вимірювального трансформатора струму можуть відповідати різні значення струму в його первинній обмотці, тобто струму, який вимірює цей трансформатор.
3. Математично підтверджено, що вимірювальний трансформатор струму матиме тим кращі метрологічні показники, чим меншим буде активний опір кола його вторинної обмотки.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мокін О. Б. Уточнення характеристик процесів у вимірювальних трансформаторах струму та їх математичних моделей / О. Б. Мокін, Б. І. Мокін, Я. В. Хом'юк, О. М. Кривоніс // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2017. – №4. – С. 48 – 57.
2. Казанский В. Е. Трансформаторы тока в устройствах релейной защиты и автоматики / В. Е. Казанский // М. : Энергия. – 1978. – 262 с.
3. Сирота И. М. Переходные режимы работы трансформаторов тока / И. М. Сирота // Киев : Изд. АН УССР, 1961. – 192 с.
4. Электротехнический справочник (в трех томах). Том 2. Электротехнические устройства / [Герасимов В. Г., Грудинский П. Г., Жуков Л. А. и др.]. – [6-е изд.]. – М. : Энергоиздат, 1981. – 640 с.

Стаття надійшла до редакції 26.02.2018 р.

Стаття пройшла рецензування 06.03.2018 р.

Мокін Олександр Борисович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів.

Мокін Борис Іванович – доктор технічних наук, професор, академік НАПН України, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки та кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів.

Хом'юк Яна Вікторівна – аспірантка факультету комп'ютерних систем і автоматики, кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: khomiukyana@gmail.com.

Вінницький національний технічний університет.