Методичні вказівки
до проведення практичних занять
та виконання контрольних робіт
з дисципліни «Спецглави математики» Ч. 1
для студентів напряму підготовки
«Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» всіх форм навчання

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Методичні вказівки до проведення практичних занять та виконання контрольних робіт з дисципліни «Спецглави математики» Ч. 1 для студентів напряму підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» всіх форм навчання

Вінниця
ВНТУ
2015

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 10 від 23 травня 2013 р.)

Рецензенти:
В. П. Кожем'яко, доктор технічних наук, професор
С. М. Довгалець, кандидат технічних наук, доцент

Методичні вказівки до проведення практичних занять та виконання контрольних робіт з дисципліни «Спецглави математики» Ч. 1 для студентів напряму підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» всіх форм навчання / Уклад. П. І. Кулаков, В. В. Присяжнюк − Вінниця : ВНТУ, 2015. – 53 с.

У першій частині методичних вказівок подаються короткі теоретичні відомості та практичні завдання з основ теорії ймовірності, наведені програма дисципліни, варіанти завдань, приклади розв'язування типових задач та рекомендації до виконання контрольної роботи. Для полегшення самостійного виконання завдань наводиться список рекомендованої літератури.

Призначений для студентів всіх форм навчання нематематичних спеціальностей, які вивчають дисципліни «Спецглави математики», «Теорія ймовірностей та математична статистика» та інші.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки до практичних занять та контрольних робіт з дисципліни «Спецглави математики» призначені для студентів всіх форм навчання, які навчаються за напрямом 6.051001 – «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології».

Дана методично-інструктивна література складається з: програми дисципліни, коротких теоретичних відомостей, після кожного розділу наведені контрольні запитання та задачі для перевірки самопідготовки студента, а також завдання для виконання контрольних робіт. Всі завдання для виконання контрольних робіт складаються з 25 варіантів і наведені приклади розв'язування всіх завдань.

Методичні вказівки можна використовувати студентам денної форми навчання для виконання практичних занять, для підготовки до колоквіумів, для виконання типових розрахунків, контрольних домашніх робіт, а також для виконання контрольних робіт студентами заочної форми навчання.

Контрольні роботи виконуються з метою закріплення теоретичних і практичних знань студента.

Студенти денної форми навчання виконують контрольні роботи з таких тем, а саме: закони розподілу випадкових величин; закон розподілу функції одного випадкового аргументу; наближені способи визначення моментів функції випадкового аргументу; основи регресійного аналізу; елементи дисперсійного аналізу; перевірка статистичної гіпотези.

Студенти заочної форми навчання вивчають дисципліну «Спецглави математики» протягом двох семестрів і виконують в кожному семестрі по одній контрольній роботі. В першому семестрі з тем: закони розподілу випадкових величин; закон розподілу функції одного випадкового аргументу; наближені способи визначення моментів функції випадкового аргументу; і складають диференціальний залік, в другому семестрі з тем: основи регресійного аналізу; елементи дисперсійного аналізу; перевірка статистичної гіпотези і завершують вивчення дисципліни іспитом в другому семестрі. Студент заочної форми навчання повинен виконати контрольну роботу до початку екзаменаційної сесії.

Перед виконанням контрольної роботи студенту рекомендується опрацювати перелік теоретичних питань, наведених для кожного завдання. У процесі виконання студент може користуватися не тільки рекомендованою, але і будь-якою іншою доступною йому навчальною та технічною літературою, а також сайтом дистанційної форми навчання, який розташовано за посиланням http://elearn.lan (повна функціональність, доступ тільки з внутрішньої мережі ВНТУ) або http://elearn.vntu.edu.ua (обмежена функціональність, відкритий доступ з Інтернет).

Вибір варіанта завдання здійснюється за порядковим номером студента у журналі обліку академічної групи.

1 ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

Вступ. Основні означення теорії ймовірності. Предмет та методи теорії ймовірності. Випадкова величина. Характеристика випадкової величини. Закон розподілу, функція та щільність розподілу ймовірностей, визначення та властивості. Характеристична функція випадкової величини. Числові характеристики випадкових величин та їх властивості. Початкові та центральні моменти, математичне сподівання, дисперсії, мода, медіана, асиметрія, ексцес.

Основні закони розподілу випадкової величини. Закони розподілу дискретної та неперервної випадкових величин. Розподіл Пуассона. Рівномірний розподіл. Показовий розподіл. Нормальний розподіл. Розподіл Коші.

Двовимірні розподіли. Означення та властивості двовимірних законів. Система двох випадкових величин. Умовні розподіли двох випадкових величин. Числові характеристики двовимірних законів.

Закони розподілу систем багатьох випадкових величин. Багатовимірні випадкові величини. Багатовимірне нормальне розподілення. Закони розподілення підсистеми неперервних випадкових величин та умовні закони розподілу.

Закони розподілу функцій випадкових величин. Закон розподілу функціонально перетворених випадкових величин, функції одного випадкового аргументу. Числові характеристики функціонально перетворених випадкових величин функції одного випадкового аргументу. Закон розподілу функції двох випадкових аргументів. Виведення формул закону розподілу функції основних математичних залежностей двох випадкових величин.

Функціональні перетворення двовимірних законів. Перетворення Якобіана. Закон розподілу функції багатьох випадкових аргументів. Композиція двовимірних і тривимірних нормальних законів розподілу з використанням поняття векторних відхилень. Характеристичні функції систем і функцій випадкових величин.

Лінеаризація функцій випадкових величин. Лінеаризація функцій одного випадкового аргументу. Лінеаризація функцій двох та багатьох випадкових аргументів. Наближене визначення математичного сподівання та дисперсії.

Основи кореляційного, регресійного та дисперсійного аналізу. Елементи кореляційного аналізу. Лінійна кореляція. Коефіцієнт кореляції. Види регресійних моделей. Лінійна парна регресія, множинна лінійна регресія. Нелінійна регресія, множинна нелінійна регресія. Нелінійна за параметрами. Коефіцієнт множинної регресії. Метод найменших квадратів. Метод максимуму правдоподібності. Загальна теорія дисперсійного аналізу. Одно-та багатофакторний дисперсійний аналіз. Критерій Фішера.

Предмет та задачі математичної статистики. Предмет та методи математичної статистики. Статистичний матеріал. Статистичний розподіл. Статистичні розподіли вибірок та їх числові характеристики. Варіаційний ряд. Знаходження моментів випадкової величини за результатами дослідів. Статистичні оцінки. Точкові оцінки. Інтервальні оцінки. Надійний інтервал і надійна ймовірність. Статистичні гіпотези. Параметричні і непараметричні критерії.

Основи теорії випадкових процесів. Характеристика та види випадкових процесів. Випадкові процеси, часові та кореляційні характеристики. Властивості кореляційної, нормованої та взаємної кореляційної функцій. Класифікація випадкових процесів. Стаціонарні випадкові процеси в широкому і вузькому розумінні. Властивості кореляційної та нормованої функцій стаціонарних випадкових процесів. Визначення інтервалу кореляції та максимального інтервалу кореляції. Ергодичні стаціонарні випадкові процеси. Зв'язок між кореляційними і спектральними характеристиками. Перетворення Хінчіна-Вінера. Властивості спектральної характеристики випадкового процесу. Загальна теорія перетворення випадкових процесів. Загальна характеристики проходження стаціонарних випадкових сигналів через лінійні та нелінійні кола. Визначення кореляційної функції вихідного сигналу при вхідному стаціонарному випадковому процесі.

2 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1 Одновимірна випадкова величина. Закон розподілу випадкової величини та числові характеристики

Означення 1. Випадковою називається величина, яка в результаті досліду може набувати заздалегідь різних невідомих значень.

Існують три типи випадкових величин: дискретні, неперервні та мішані випадкові величини.

Означення 2. Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її можливих значень відповідає скінченному або нескінченному ряду чисел, і кожному значенню відповідає певна ймовірність.

Означення 3. Неперервною називається випадкова величина, якщо вона може набувати нескінченної множини значень на одному або декількох заданих інтервалах.

Означення 4. Змішана випадкова величина, може набувати, як скінченного або нескінченного ряду чисел і кожному значенню відповідає певна ймовірність, так і нескінченної множини значень на заданих інтервалах.

Означення 5. Співвідношення між можливими значеннями випадкової величини та відповідними ймовірностями – називається *законом розподілу* випадкової величини.

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна задати у вигляді ряду розподілу або графічно. Ряд розподілу це таблиця, в якій виконуються умови: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ і $X_{i+1} > X_i$, тобто впорядкований ряд:

X_i	X_1	X_2	…	X_n
P_i	P_1	P_2	…	P_n

В залежності від типу випадкових величин існують і інші, більш поширені і більш зручні форми, способи подання закону розподілу випадкової величини:

– функція розподілу ймовірностей випадкової величини (інтегральна функція);

– щільність ймовірностей випадкової величини (диференціальна функція);

– характеристична функція.

2.1.1 Функція розподілу ймовірностей та її властивості

Закон розподілу ймовірностей можна подати у формі, яка придатна для всіх типів випадкових величин, а саме, як функцію розподілу ймовірностей випадкової величини $F(x)$ (функція розподілу або інтегральна функція).

Означення. Функцію аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X<x$, називають функцією розподілу ймовірностей:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i < x}}^{k} p_i . \quad (1.1)$$

Властивості $F(x)$:

1. $0<F(x)<1$;
2. $F(x)$ є неспадною функцією;
3. Імовірність того, що дискретна випадкова величина X набуде можливого значення $X=x\in(x_{min},x_{max})$:

$$P(x_{min}<x<x_{max})=F(x_{max})-F(x_{min}). \quad (1.2)$$

4. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X=x_i)=0.$$

5. Відповідно значення ймовірності знаходження неперервної випадкової величини X на інтервалі (x_{min},x_{max}) визначається за формулою:

$$P(x_{\min} \le x \le x_{\max}) = F(x_{\max}) - F(x_{\min}). \quad (1.3)$$

6. Значення функції на границях існування випадкової величини X, якщо $X\in(-\infty, \infty)$, то виконуються співвідношення:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} P(X < x) \to F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0, \quad (1.4)$$

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} P(X < x) \to F(+\infty) = P(X < +\infty) = 1.$$

2.1.2 Щільність ймовірностей випадкової величини та її властивості

Означення. Щільністю ймовірностей неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (1.5)$$

Властивості щільності ймовірностей:

1. Функція додатна $f(x)\ge 0$;
2. Умова нормування неперервної випадкової величини X:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \quad (1.6)$$

якщо випадкові величини X належать проміжку (x_{min}, x_{max}) тоді:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x)dx = 1. \qquad (1.7)$$

3. Ймовірність попадання (знаходження) неперервної випадкової величини в інтервал (α, β):

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (1.8)$$

4. Функцію розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини можна визначити за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx, \qquad (1.9)$$

якщо $x \in (x_{min}, x_{max})$ то:

$$F(x) = \int_{x_{\min}}^{x} f(x)dx. \qquad (1.10)$$

Контрольні запитання

1. Означення випадкової величини.
2. Означення дискретної і неперервної випадкової величини.
3. Закон розподілу випадкової величини.
4. Ряд розподілу дискретної випадкової величини.
5. Функція розподілу (інтегральна функція) випадкової величини.
6. Властивості $F(x)$.
7. Чому дорівнює $F(-\infty)$, $F(\infty)$?
8. Чому дорівнює $P(x_{min}<x<x_{max})$?
9. Означення щільності ймовірностей неперервної випадкової величини X.
10. Властивості $f(x)$.
11. Умова нормування.
12. Чому дорівнює $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$?
13. Як визначити $F(x)$ при заданій $f(x)$?
14. Як визначити диференціальну функцію, якщо відома інтегральна функція випадкової величини?

2.1.3 Числові характеристики випадкових величин та їх властивості

До числових характеристик відносяться: математичне сподівання, дисперсія або середньоквадратичне відхилення, асиметрія, ексцес, мода та медіана (дана характеристика, як правило, застосовується тільки для неперервних випадкових величин). Узагальненими числовими характеристиками випадкової величини є початкові та центральні моменти *k*-го порядку.

Математичне сподівання $M(x)=M[x]=m(x)=m_x$ для дискретної або неперервної випадкової величини визначається за такими формулами:

$$m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,, \tag{1.11}$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad m_x = \int_{x\min}^{x\max} x f(x) dx \,, \tag{1.12}$$

при умові, що ряд $\sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i < \infty$ або інтеграли $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty, \quad \int_{x\min}^{x\max} |x| f(x) dx < \infty$ абсолютно сходяться. В іншому випадку математичне сподівання не існує.

Дисперсія $D(x)=D[x]=D(x)=D_x$ і середньоквадратичне відхилення σ_x, для дискретної або неперервної випадкової величини визначаються за відповідними формулами:

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2 \,, \tag{1.13}$$

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_x^2,$$

$$D_x = \int_{x\min}^{x\max} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{x\min}^{x\max} x^2 f(x) dx - m_x^2, \tag{1.14}$$

$$D_x = M(x^2) - [M(x)]^2 = m\left(x^2\right) - \left(m_x\right)^2,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}.$$

Властивості математичного сподівання, якщо *a* і *b* сталі величини:

1. $M(x) \in (-\infty, \infty)$;
2. $M(a)=a$;
3. $M(ax)=aM(x)$;
4. $M(a+bx)=a+bM(x)$.

Властивості дисперсії:

1. $D(x)>0$;
2. $D(a)=0$;
3. $D(ax)=a^2D(x)$;
4. $D(a+bx)=b^2D(x)$.

Початкові моменти k-го порядку дискретних та неперервних випадкових величин визначаються за відповідними формулами:

$$m_k(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i, \tag{1.15}$$

$$m_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx. \tag{1.16}$$

Центральні моменти k-го порядку дискретних та неперервних випадкових величин, відповідно:

$$\mu_k(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_1)^k p_i, \tag{1.17}$$

$$\mu_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_1)^k f(x)dx. \tag{1.18}$$

Для визначення центральних моментів 3-го і 4-го порядків, можна застосувати спрощені формули:

$$\mu_3(x)=m_3(x)-3m_x m_2(x)+2m_x^3, \tag{1.19}$$
$$\mu_4(x)=m_4(x)-4m_x m_3(x)+6m_x^2 m_2(x)-3m_x^4.$$

Модою (Mo) дискретної випадкової величини X називається таке значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи:

$$P(Mo)=max.$$

Модою неперервної випадкової величини X називається таке можливе значення випадкової величини, якому відповідає найбільша щільність розподілу:

$$f(Mo)=max.$$

Медіаною (Me) дискретної випадкової величини X називається таке можливе значення, при якому виконується одна із умов:

$$P(x_{min}<x<Me)=P(Me<x<x_{max}), \tag{1.20}$$
$$F(Me)=0{,}5.$$

Медіана неперервної випадкової величини X також може визначатися за такими рівняннями:

$$\int_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{\infty} f(x)dx = 0{,}5,$$
$$\int_{x_{\min}}^{Me} f(x)dx = \int_{Me}^{x_{\max}} f(x)dx = 0{,}5 \tag{1.21}$$

і визначає значення випадкової величини X, ордината якої ділить площу під кривою розподілу навпіл.

Коефіцієнт асиметрії:

$$k = \frac{\mu_3(x)}{\sqrt{\mu_2^3(x)}} = \frac{\mu_3(x)}{\mu_2(x)\sqrt{\mu_2(x)}} = \frac{\mu_3(x)}{\sigma_x^3(x)}, \tag{1.22}$$

де k, або γ_1 – характеризує ступінь асиметрії закону розподілу випадкової величини відносно прямої лінії, яка паралельна осі OY і проходить через точку $x=m_x$.

Для симетричного закону розподілу $k=0$ і $Mo=Me$, асиметрія додатна, якщо $Mo<Me$, і від'ємна коли $Mo>Me$.

Коефіцієнт ексцесу:

$$\gamma = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3, \tag{1.23}$$

де γ, або γ_2 – використовується для порівняння гостроти і висоти вершини графіка кривої розподілу даного закону розподілу з кривою розподілу нормального закону, при однакових параметрах. У випадку, коли крива розподілу має більш гостру і вищу вершину в порівнянні з кривою нормального розподілу, то $\gamma>0$, якщо низьку і пологу, то $\gamma<0$.

Контрольні запитання

1. Математичне сподівання випадкової величини та його властивості
2. Властивості дисперсії випадкової величини
3. При яких значеннях сталої C виконуються співвідношення: $D(CX)=D(X)$; $D(CX)>D(X)$, $D(CX)<D(X)$?
4. Мода (*Mo*) дискретної випадкової величини
5. Означення моди *(Mo)* неперервної випадкової величини
6. Що означає антимодальний розподіл ймовірностей?
7. Який розподіл ймовірностей називають одномодальним, двомодальним?
8. Медіана *(Me)* випадкової величини.
9. Чому дорівнює *F(Me)*?

10. Коли виконується рівність $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{\infty} f(x)dx$?

11. Означення початкового моменту *k*-го порядку.
12. Означення центрального моменту *k*-го порядку.
13. Що характеризує ексцес?
14. Що характеризує асиметрія?
15. Чому дорівнює початковий момент 1-го порядку?
16. Чому дорівнює центральний момент 1-го порядку?
17. Чому дорівнює центральний момент 2-го порядку?

2.1.4 Деякі основні закони розподілу випадкових величин

Рівномірний закон розподілу дискретної випадкової величини

Застосовується у випадках, коли всі значення дискретної випадкової величини з'являються з однаковою ймовірністю. Наприклад, при передачі цифрових даних:

$$P(x=m)=\begin{cases}0,(-\infty<x<1)\\ \dfrac{1}{n},(1\le x\le n)\\ 0,(n<x<\infty)\end{cases},\; P(x\le m)=\begin{cases}0,(-\infty<m<1)\\ \dfrac{m}{n},(1\le m\le n)\\ 0,(n<m<\infty)\end{cases},\; E(iu)=\frac{1-\ell^{iun}}{1-\ell^{-iu}},$$

$$m_1=\frac{n+1}{2},\qquad \mu_2=\frac{n^2-1}{12},\qquad \begin{matrix}\mu_3=0\\ \gamma_1=0\end{matrix},\qquad \begin{matrix}\mu_4=\dfrac{(n^2-1)(3n^2-7)}{240},\\ \gamma_2=-1{,}2+\dfrac{4}{n^2-1}.\end{matrix}$$

Геометричний закон

Визначає випадкове число дослідів (спроб), яке необхідно провести до першої появи випадкової події (один „успіх”). Застосовується при визначеннях різноманітних ймовірностей:

$$P(x=k)=\begin{cases}0,(-\infty<n\le 0)\\ p(1-p)^{k-1},(0<n<\infty)\end{cases},\qquad P(x\le n)=\begin{cases}0,(-\infty<n\le 0)\\ 1-(1-p)^{n},(0<n<\infty)\end{cases},$$

$$E(iu)=\frac{p\ell^{iu}}{1-(1-p)\ell^{iu}},$$

$$m_1=\frac{1}{p},\quad \mu_2=\frac{1-p}{p^2},\quad \begin{matrix}\mu_3=\dfrac{(1-p)(2-p)}{p^3},\\ \gamma_1=\dfrac{(2-p)}{\sqrt{(1-p)}},\end{matrix}\quad \begin{matrix}\mu_4=\dfrac{3p^3-138p^2+310p-135}{p^4},\\ \gamma_2=\dfrac{3p^3-141p^2+316p-138}{(1-p)^2}.\end{matrix}$$

Біноміальний закон

Визначає ймовірність того, що в послідовності із *n* незалежних дослідів подія з'явиться *k* разів. Застосовується в статистиці і при різноманітних розрахунках ймовірності:

$$P(x=k)=\begin{cases}0,(-\infty<x<0)\\ C_n^k p^k q^{n-k},(0\le x\le n)\\ 0,(n<x<\infty)\end{cases},\qquad P(x\le m)=\begin{cases}0,(-\infty<x<0)\\ \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k},(0\le x\le n)\\ 1,(n<x<\infty)\end{cases},$$

$$E(iu)=\left(1+p\left(\ell^{iu}-1\right)\right)^n,$$

$$m_1=np,\qquad \mu_2=npq,\qquad \mu_3=npq(1-2p),\quad \gamma_1=\frac{1-2p}{\sqrt{npq}},\qquad \mu_4=3n^2p^2q^2+npq(1-6pq),\quad \gamma_2=\frac{1-6pq}{npq}.$$

Закон Пуассона

Визначає ймовірність появи події k разів за час t, при умові, що ймовірність появи події за проміжок часу Δt пропорційна даному проміжку і події в різні моменти часу незалежні. Застосовується в різноманітних галузях, наприклад, розподіл кількості електронів, які вилетіли з катода за час t, розподіл кількості телефонних викликів за час t і т. д.

$$P(x=k)=\begin{cases}0,(-\infty<x<0)\\ \dfrac{\lambda^k}{k!}\ell^{-\lambda},(0\le x<\infty)\end{cases},\qquad P(x\le n)=\begin{cases}0,(-\infty<n<0)\\ \sum_{k=0}^{n}\dfrac{\lambda^k}{k!}\ell^{-\lambda},(0\le n<\infty)\end{cases},$$

$$E(iu)=\ell^{\lambda\left(\ell^{iu}-1\right)},$$

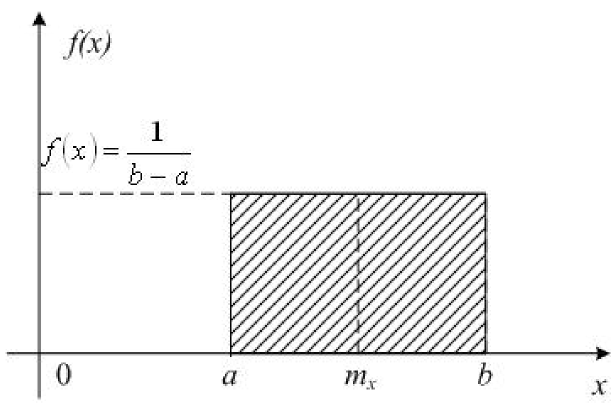
$$m_1=\lambda,\qquad \mu_2=\lambda,\qquad \mu_3=\lambda,\quad \gamma_1=\frac{1}{\sqrt{\lambda}},\qquad \mu_4=3\lambda^2+\lambda^5,\quad \gamma_2=\frac{1}{\lambda}.$$

Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини

Характеризує похибку округлювання при розрахунках. Широко застосовується в радіотехніці, теорії надійності, теорії масового обслуговування

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<a\\ \dfrac{1}{b-a} & a<x<b,\\ 0 & x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b,\\ 1 & x>b\end{cases}$$



$$E(iu)=\frac{\ell^{iub}-\ell^{iua}}{iu(b-a)},$$

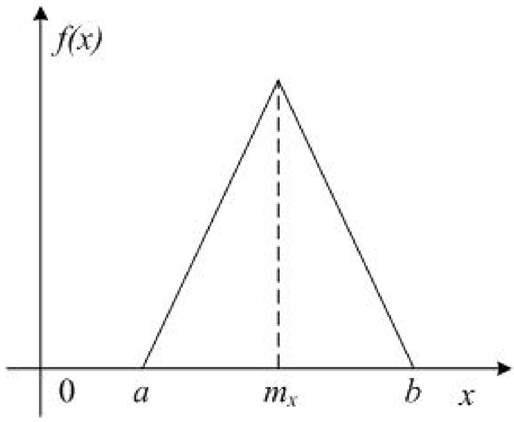
$$m_1=m_x=\frac{1}{2}(a+b),\ \mu_2=D_x=\frac{1}{12}(b-a)^2,$$

$$\mu_3=0,\gamma_1=0,\ \mu_4=\frac{1}{80}(b-a)^4,\ \gamma_2=-1{,}2.$$

Закон Сімпсона (трикутний)

Розподіл суми двох незалежних рівномірно розподілених випадкових величин з однаковими характеристиками. Застосовується в теорії похибок.

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<a\\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2} & a<x<\dfrac{a+b}{2}\\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2} & \dfrac{a+b}{2}<x<b\\ 0 & b<x<\infty\end{cases},$$



$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<a\\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} & a<x<\dfrac{a+b}{2}\\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2} & \dfrac{a+b}{2}<x<b\\ 1 & b<x<\infty\end{cases},$$

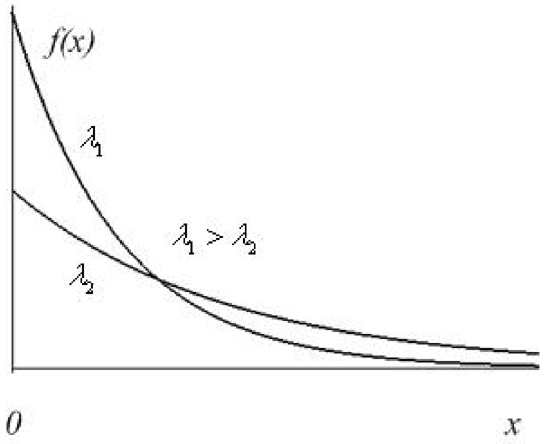
$$E(iu)=-\frac{4}{u^2(b-a)^2}\left(\ell^{iu\frac{b}{2}}-\ell^{iu\frac{a}{2}}\right)^2,$$

$$m_1=\frac{1}{2}(a+b),\ \mu_2=\frac{1}{24}(b-a)^2,\mu_3=0,\ \gamma_1=0,\ \mu_4=\frac{1}{240}(b-a)^4,\ \gamma_2=-0{,}6.$$

Експоненціальний односторонній

Застосовується для характеристики інтенсивності відмови, або надійності елементів у часі, широко застосовується в теорії масового обслуговування, в ядерній фізиці і багатьох інших областях.

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \lambda\ell^{-\lambda x} & x>0\end{cases},$$



$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-\ell^{-\lambda x} & x>0\end{cases},$$

$$E(iu)=\frac{\lambda}{\lambda-iu},$$

$$m_1=\frac{1}{\lambda},\ \mu_2=\frac{1}{\lambda^2},\ \mu_3=\frac{2}{\lambda^3},\ \gamma_1=2,\ \mu_4=\frac{9}{\lambda^4},\ \gamma_2=6,\ M_e=\frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

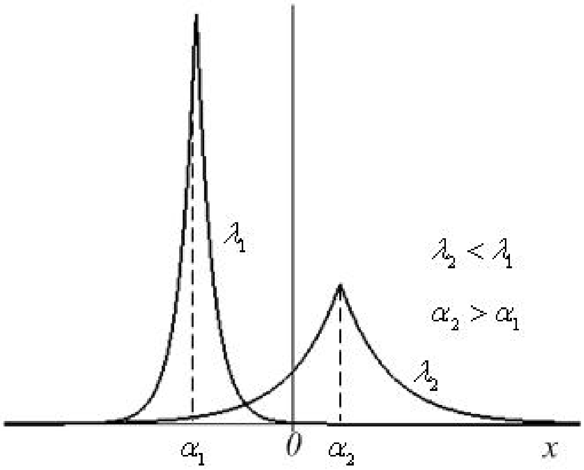
Закон Лапласа

Закон Лапласа або експоненціальний двосторонній закон є розподілом випадкової величини $x=x_1-x_2$, де x_1, x_2 – незалежні випадкові величини з одностороннім експоненціальним розподілом. Використовується в теорії надійності.

$$f(x)=\frac{\lambda}{2}\ell^{-\lambda|x-\alpha|},$$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ell^{\lambda(x-\alpha)}, & x<\alpha,\\ 1-\frac{1}{2}\ell^{-\lambda(x-\alpha)}, & x>\alpha.\end{cases}$$

$$E(iu)=\frac{\ell^{iua}}{1+\frac{u^2}{\lambda^2}},$$



$$m_1=a,\ \mu_2=\frac{2}{\lambda^2},\ \mu_3=0,\ \gamma_1=0,\ \mu_4=\frac{24}{\lambda^4},\ \gamma_2=3.$$

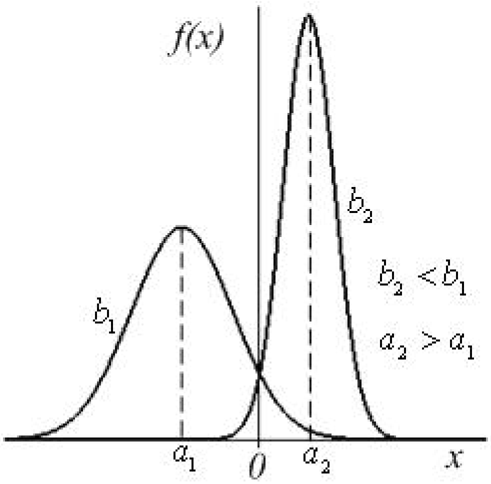
Нормальний закон розподілу

Застосовується надзвичайно часто. Велика кількість різноманітних за своєю природою випадкових величин мають розподіл, який наближений до нормального. Сума незалежних випадкових величин при великій кількості добутків має розподіл, який наближається до нормального. Використовується в теорії надійності для опису розподілу термінів служби різних пристроїв. Нормальний закон розподілу є граничною формою багатьох законів.

$$f(x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\ell^{\frac{-(x-a)^2}{2b^2}},$$

$$F(x)=\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\ell^{\frac{-(t-a)^2}{2b^2}}dt,$$

$$E(iu)=\ell^{\left(iua-\frac{b^2}{2}u^2\right)},$$



$$m_1=a,\ \mu_2=b^2,\ \mu_3=0,\ \gamma_1=0,\ \mu_4=3b^4,\ \gamma_2=0.$$

Закон Коші

Є прикладом випадкової величини, яка немає математичного сподівання та дисперсії, початкові та центральні моменти не визначаються, оскільки відповідні інтеграли розбіжні.

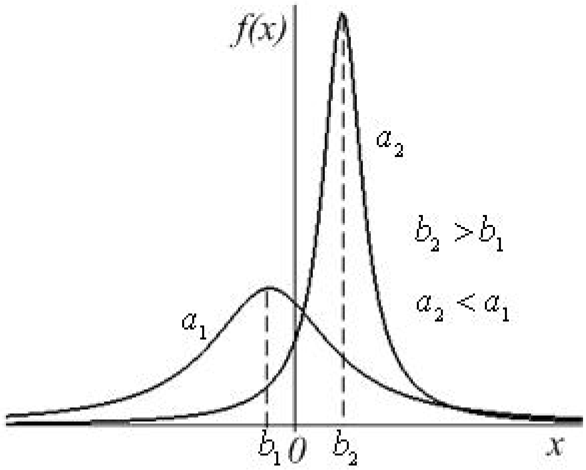
За даним законом розподілено відношення двох незалежних випадкових величин, які розподілені за нормальним законом, а також випадкова величина $tg(\varphi)$, якщо кут φ має рівномірний закон розподілу на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

$f(x)=\frac{a}{\pi}\left[\frac{1}{(x-b)^2+a^2}\right]$,

$a>0$,

$F(x)=\frac{1}{\pi}arctg\frac{x-b}{a}+\frac{1}{2}$,

$E(iu)=\ell^{iub-a|u|}$.



2.1.5 Характеристична функція та її властивості

Означення. Характеристичною функцією називається математичне сподівання функції $y=\ell^{iux}$:

$$E_x(iu)=M[y]=M\left[\ell^{iux}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{iux}f(x)dx. \qquad (1.24)$$

Справедливе обернене перетворення $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ell^{-iux}E_x(iu)du$, (аналог перетворення Фур'є, тільки з протилежним знаком).

Характеристичну функцію $E_x(iu)$ можна одержати, користуючись таблицею перетворень Фур'є (або Лапласа). Наприклад, для нормального закону розподілу $f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\ell^{\frac{-(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$ характеристична функція $E(iu)=\ell^{\left(iua-\frac{b^2}{2}u^2\right)}$.

Вперше поняття характеристичної функції ввів А. М. Ляпунов в 1901р. при доведенні центральної граничної теореми.

Властивості характеристичної функції:

1. Характеристична функція випадкової величини y, яка лінійно $y=ax+b$ залежить від випадкової величини x, визначається співвідношенням:

$$E_y(iu)=\ell^{iub}E_x(iua); \qquad (1.25)$$

2. Якщо випадкова величина y є сумою $y=\sum_{k=1}^{n} x_k$ незалежних випадкових величин $x_к$ і відомі їх характеристичні функції $E_{x_k}(iu)$, то характеристична функція випадкової величини y визначається за формулою:

$$E_y(iu)=\prod_{k=1}^{n} E_{xk}(iu); \tag{1.26}$$

3. Якщо випадкова величина y є сумою $y=\sum_{k=1}^{n} x_k$ незалежних випадкових величин x_i, з однаковим законом розподілу, то характеристична функція випадкової величини y визначається за формулою:

$$E_y(iu)=E_x^n(iu); \tag{1.27}$$

4. Значення функції при $u=0$, $E(0)=1$, тому що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$;

5. Для визначення початкових моментів визначають похідну характеристичної функції:

$$m_k(x)=\frac{E^{(k)}(0)}{i^k}; \tag{1.28}$$

6. Для визначення центральних моментів застосовують логарифмічну характеристичну функцію $\psi(iu)=\ln E(iu)$, яка називається кумулятивною функцією:

$$\mu_2(x)=D_x=-\psi''(0)=-(\ln E(0))'',$$

або:

$$D_x=-\psi''(iu)_{u=0}=-(\ln E(iu))''_{u=0}. \tag{1.29}$$

Моменти третього та четвертого порядків визначаються за такими формулами:

$$\begin{aligned}\mu_3(x)&=-i^3\psi'''(0),\\ \mu_4(x)&=i^4\psi^{IV}(0)+3\mu_2^2(x).\end{aligned} \tag{1.30}$$

Коефіцієнти асиметрії і ексцесу:

$$k = \frac{\psi'''(0)}{[\psi''(0)]^{3/2}},$$
$$\gamma = \frac{\psi^{IV}(0)}{[\psi''(0)]^{2}}. \qquad (1.31)$$

Контрольні запитання

1. Дати означення характеристичної функції випадкової величини.
2. Властивості характеристичної функції.
3. Чому дорівнюють $E_x(0)$, $E'_x(0)$, $E''_x(0)$?
4. Визначити початковий момент першого порядку, якщо відома $E_x(iu)$.
5. Визначити центральний момент другого порядку, якщо відома $E_x(iu)$.
6. Навести формули для визначення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу.
7. Визначити моменти старших порядків, якщо відома $E_x(iu)$.
8. Знайти вираз для $E_y(iu)$, якщо $y=ax+b$.
9. Чому дорівнює $E_y(iu)$, якщо $y = \sum_{k=1}^{n} x_k$?
10. Довести, що для нормованого нормального закону розподілу $E_x(iu) = \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$.
11. Визначити характеристичну функцію рівномірного закону розподілу.
12. Чому дорівнює характеристична функція експоненціального закону розподілу?

Задачі

1. Спростити вирази а) $M[x(x\text{-}1)]\text{-}M(x)[M(x)\text{-}1]$; б) $\sum_{i=1}^{n} x(x - m_x)p_i$; в) $\int_{-\infty}^{\infty} x(x - m_x)f(x)dx$.

2. Дано закон розподілу випадкової величини X:

X_i	0	3	5
P_i	0,2	0,3	0,5

Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

3. Дано закон розподілу випадкової величини X:

X_i	-2	0	2	6
P_i	0,3	0,2	0,4	0,1

Знайти функцію розподілу випадкової величини X.

4. Задана функція розподілу випадкової величини X $F(x)=ax+b,\ 1<x\leq 3$. Знайти параметри *a, b*.

5. Задана функція розподілу випадкової величини X $F(x)=ax^3+b,\ -1<x\leq 1$. Знайти параметри *a, b*.

6. Задана щільність розподілу ймовірностей випадкової величини X $f(x)=ax^2,\ -1<x\leq 3$. Знайти параметри *a, b*.

7. Визначити зв'язок між параметрами *a* і *b*, в законі розподілу $f(x)=ae^{-bx}(x\geq 0); f(x)=0(x<0)$.

8. Задана функція розподілу ймовірностей $F(x)=0{,}25x+0{,}25;\ -1<x\leq 3$, знайти щільність ймовірностей випадкової величини.

9. Задана щільність розподілу ймовірності $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ $-1\leq x\leq 2$ випадкової величини, визначити інтегральну функцію розподілу.

10. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos(x);\ -\dfrac{\pi}{2}<x\leq\dfrac{\pi}{2}$. Знайти функцію розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини $F(x)$.

11. Задана щільність ймовірності $f(x)=\dfrac{2}{\pi\left(\ell^{-x}+\ell^{x}\right)}$, визначити функцію розподілу, математичне сподівання та дисперсію, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$.

12. Задано $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x+2)^2}{32}}$, знайти ймовірність того, що випадкова величина відхилиться від свого математичного сподівання на величину більшу, ніж 36.

13. Випадкова величина X має закон розподілу N (-0; 6). При якому значенні σ імовірність $P(2<x<4)$ буде найбільшою?

14. Задано $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$. Визначити *Mo*, *Me*, A_S, E_S. Обчислити $P(-4<x<2)$, $P(|x+3|<2)$.

15. Знайти математичне сподівання випадкової величини $Z=3X+4Y$, якщо $M(X)=2$, $M(Y)=6$.

16. Випадкові величини X і Y незалежні. Знайти дисперсію D_Z випадкової величини $Z=7X+3Y$, якщо $D(X)=4$, $D(Y)=5$.

17. Випадкова величина X має закон розподілу N (-4; 5). Знайти точки перегину кривої розподілу $f(x)$.

18. Неперервна випадкова величина X має закон розподілу N (0; 1). Знайти характеристичну функцію.

19. Визначити характеристичну функцію рівномірного закону розподілу випадкової величини X.

20. Неперервна випадкова величина X має експоненціальний закон розподілу. Знайти характеристичну функцію для даного закону.

21. Випадкова величини X розподілена за нормальним законом $E(iu) = \ell^{\left(ium_x - \frac{\sigma_x^2}{2}u^2\right)}$, визначити $m_1(x), m_2(x), D(x)$.

22. Визначити через кумулятивну функцію, дисперсію випадкової величини, яка розподілена за нормальним законом $N(m_x, \sigma_x)$.

23. Знайти центральні моменти 3-го та 4-го порядків для нормального закону розподілу $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, застосувавши апарат характеристичної функції.

24. Задана характеристична функція експоненціального закону розподілу $E(iu) = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$, визначити $m_1(x), m_2(x), D(x)$.

2.1.6 Закони розподілу функцій випадкових величин

Означення. Щільність розподілу $f_y(y)$ випадкової величини Y, яка функціонально залежить $y=\varphi(x)$ від неперервної випадкової величини – X, і монотонна на інтервалі існування випадкової величини X, визначається за формулою:

$$f_y(y) = f_x(\psi(y))\left|\frac{d\psi(y)}{dy}\right|, \qquad (1.32)$$

де $\psi(y)=x$ – обернена функція до функції $y=\varphi(x)$;
$f_x(\psi(y))=f_x(x)$ – щільність ймовірності випадкової величини X

або:

$$f_y(y) = f_x(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|.$$

У випадку, коли на інтервалі існування випадкової величини X, функція $y=\varphi(x)$ немонотонна, то інтервал розбивається на проміжки монотонності, тоді:

$$f_y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_x(\psi_i(y))\left|\frac{d\psi_i(y)}{dy}\right|, \qquad (1.33)$$

де k – кількість проміжків монотонності,
$\psi_i(y)$ – обернена функція на i-му проміжку монотонності.

Означення. Закон розподілу випадкової величини Y, яка функціонально $y=\varphi(x)$ залежить від дискретної випадкової величини X має такий вигляд:

y_i	y_1	y_2	…	y_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

,

де $y_i=\varphi(x_i)$ і виконується рівність $P(Y=y_i)=P(Y=\varphi(x_i))=p_i$.

Дискретна випадкова величина X задана відповідним законом розподілу:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

.

У випадку, коли деякі значення Y будуть однаковими, тобто $y_i=y_j$, для запису закону розподілу випадкової величини Y необхідно створити впорядкований ряд, однакові значення Y записати один раз, а відповідні ймовірності додати.

2.1.7 Числові характеристики функції випадкової величини

Для дискретних випадкових величин початкові та центральні моменти визначаються за формулами:

$$m_k(y)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i))^k p_i, \tag{1.34}$$

$$\mu_k(y)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi(x_i)-m_y)^k p_i. \tag{1.35}$$

Для неперервних випадкових величин початкові та центральні моменти функції випадкової величини визначаються за відповідними формулами:

$$\begin{aligned}
m_y &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x) f(x)dx,\\
m_k(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^k f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x))^k f(x)dx,\\
D_y &= \int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-m_y)^2 f(x)dx,\\
D_y &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)dy - m_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)^2 f(x)dx - m_y^2,\\
\mu_k(y) &= \int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^k f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(x)-m_y)^{(k)} f(x)dx.
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Контрольні запитання

1. Знайти вираз щільності ймовірностей $f(y)$ випадкової величини y, якщо $y=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — немонотонна функція, і відома щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини x.

2. Обчислити щільності ймовірностей $f(y)$, якщо $y=\varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – монотонна функція, і відома $f(x)$.

3. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини y, якщо задано закон розподілу випадкової величини x і немонотонну функціональну залежність $y=\varphi(x)$.

4. Визначити закон розподілу дискретної випадкової величини y, якщо задано закон розподілу випадкової величини x і монотонну функцію $y=\varphi(x)$.

5. Числові характеристики функції дискретної випадкової величини.

6. Числові характеристики функції неперервної випадкової величини.

7. Характеристична функція для функціонально залежних випадкових величин.

Задачі

1. Дискретна випадкова величина X задана розподілом:

X_i	0	4	9
P_i	1/3	1/5	7/15

визначити початковий момент 3-го порядку випадкової величини $y=\sqrt{x}$.

2. Знайти $f_y(y)$, якщо $f_x(x)=\frac{1}{\pi}(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$; $y=\sin x$.

3. Знайти $f_y(y)$, якщо $f_x(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}$, $y=ax+b$.

4. Випадкова величина x задана щільністю розподілу $f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$. Знайти щільність розподілу $f(y)$ функції $y=1-x^3$ випадкового аргументу x.

5. Випадкова величина X розподілена за законом $N(m_x,\sigma_x)$. Знайти $f(y)$, якщо $y=|x+2|$.

6. Задана щільність ймовірностей $f(x)=0{,}5\cos(x)$ на проміжку $-\pi/2\le x\le\pi/2$. Знайти щільність розподілу $f(y)$ функції $y=x^3$ випадкового аргументу x.

7. Задана щільність ймовірностей $f(x)=0{,}5\cos(x)$ на проміжку $-\pi/2\le x\le\pi/2$. Знайти щільність розподілу $f(y)$ функції $y=x^2-1$. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкових величин x та y.

8. Випадкова величини x задана щільністю розподілу $f(x)=\frac{2}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}|x|\exp\left(-\frac{x^4}{2\sigma_x^2}\right)$ $-\infty\le x\le\infty$. Знайти щільність розподілу $f(y)$ функції $y=x^2$. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкових величин x, y.

2.2 Двовимірна випадкова величина

2.2.1 Означення і властивості двовимірних законів

Функція розподілу («спільна» функція розподілу) системи двох випадкових величин X_1 і X_2 визначає ймовірність того, що випадкові величини X_1 і X_2 не більші x_1 і x_2, відповідно:

$$F(x_1,x_2)=P(X_1<x_1,X_2<x_2) \tag{2.1}$$

або

$$F(x_1,x_2)=P\big((X_1<x_1)\cap(X_2<x_2)\big).$$

Властивості двовимірного інтегрального закону розподілу:

1. Область визначення функції $0\le F(x_1,x_2)\le 1$;

2. $F(x_1,x_2)$ неспадна функція, при $\begin{cases} x_1>x_1^* \ F(x_1,x_2)\ge F(x_1^*,x_2) \\ x_2>x_2^* \ F(x_1,x_2)\ge F(x_1,x_2^*) \end{cases}$;

3. $F(-\infty,x_2)=F(x_1,-\infty)=0$;

4. $F(x_1,\infty)=F_1(x_1)$; $F(\infty,x_2)=F_2(x_2)$;

5. $F(\infty,\infty)=1$,

де $F_1(x_1)$, $F_2(x_2)$ – функції розподілу випадкових величин X_1 і X_2, відповідно;

6. Ймовірність того, що точка буде знаходитись всередині прямокутника з вершинами в точках з координатами $(a;c)$, $(b;c)$, $(b;d)$, $(a;d)$ (рисунок 2.1) дорівнює:

$$P(a\le x_1\le b, c\le x_2\le d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c). \tag{2.2}$$

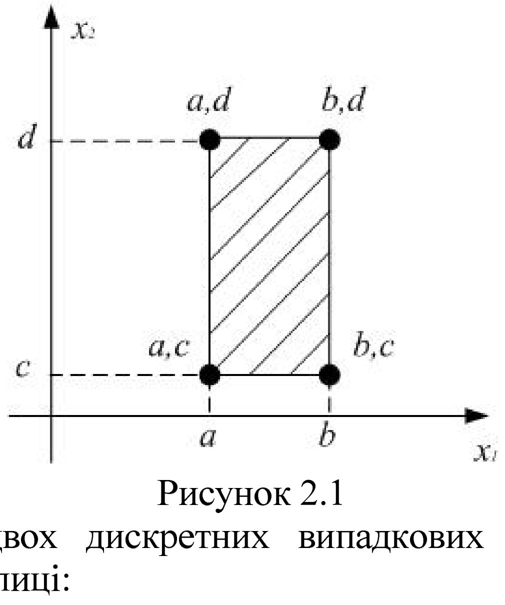


Рисунок 2.1

Закон розподілу двох дискретних випадкових величин x_1 та x_2, подається у вигляді таблиці:

x_1 / x_2	x_{11}	x_{12}	…	x_{1k}	$p_i(x_2)$
x_{21}	p_{11}	p_{12}	…	p_{1k}	$p_1(x_2)$
x_{22}	p_{21}	p_{22}	…	p_{2k}	$p_2(x_2)$
…	…	…	…	…	…
x_{2n}	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nk}	$p_n(x_2)$
$p_j(x_1)$	$p_1(x_1)$	$p_2(x_1)$	...	$p_k(x_1)$	**1**

де $p_j(x_1)=\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$, $p_i(x_2)=\sum_{j=1}^{k} p_{ij}$.

Двовимірна щільність ймовірності («спільна» щільність розподілу) визначається формулою:

$$f(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \qquad (2.3)$$

Властивості двовимірної щільності ймовірності:

1. $f(x_1, x_2)\geq 0$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)=1$.
3. Подібно до того, як при одновимірному законі ймовірність того, що точка потрапить в заданий інтервал на осі, дорівнює площі під кривою $f(x)$, при двовимірному законі розподілу імовірність того, що точка потрапить в задану область площини XOY $P\{(x_1,x_2)\in D\}=\iint_D f(x_1,x_2)dx_1dx_2$, дорівнює об'єму циліндра під поверхнею $f(x_1, x_2)$, основою якого є задана область (на рисунку 2.2 вона заштрихована).

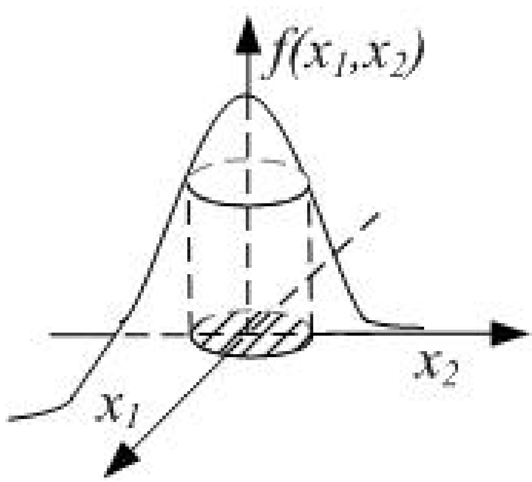


Рисунок 2.2

Якщо область являє собою прямокутник то:

$$P\{(x_1, x_2) \in R\} = P(a < x_1 < b, c < x_2 < d) = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 ;$$

4. $F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$.

За відомою двовимірною щільністю розподілу можна визначити як закон розподілу, так і щільність розподілу кожної із випадкових величин. Для випадкової величини x_1 маємо:

$$F_1(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 . \quad (2.4)$$

Аналогічно для випадкової величини x_2:

$$F_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 . \quad (2.5)$$

Для визначення щільності розподілу $f_1(x_1)$ і $f_2(x_2)$ визначимо похідну:

$$f_1(x_1) = \frac{dF_1(x_1)}{dx_1} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \quad (2.6)$$

або:

$$f_2(x_2) = \frac{dF_2(x_2)}{dx_2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 . \quad (2.7)$$

Якщо має місце рівність:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) F_2(x_2) , \quad (2.8)$$

то випадкові змінні є незалежними.

Умовою незалежності випадкових величин також є рівність:

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) . \quad (2.9)$$

Означення. Дві випадкові величини x_1 *і* x_2 є незалежними, якщо їх спільна функція розподілу $F(x_1, x_2)$ або двовимірна щільність ймовірності $f(x_1, x_2)$ дорівнюють добутку функцій розподілу випадкових величин $F_1(x_1)$ і $F_2(x_2)$, або добутку щільності розподілу кожної випадкової величини $f_1(x_1)$ і $f_2(x_2)$, справедливе і обернене твердження.

2.2.2 Числові характеристики двовимірних законів та їх властивості. Кореляція

Математичні сподівання $m(x_1)$ і $m(x_2)$ визначаються за відповідними формулами початкових моментів першого порядку:

$$
\begin{aligned}
m(x_1) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{1j} p_{ij} = \sum_{j=1}^{k} x_{1j} p_j(x_1), \\
m(x_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{2i} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} p_i(x_2).
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Дисперсії двовимірного закону $D(x_1)$ та $D(x_2)$ визначаються через центральні моменти другого порядку:

$$
\begin{aligned}
D(x_1) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(x_{1j} - m(x_1)\right)^2 p_{ij}, \\
D(x_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left(x_{2i} - m(x_2)\right)^2 p_{ij}
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

або за спрощеними формулами:

$$
\begin{aligned}
D(x_1) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{1j}^2 p_{ij} - m(x_1)^2 = \sum_{j=1}^{k} x_{1j}^2 p_j(x_1) - m(x_1)^2, \\
D(x_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{2i}^2 p_{ij} - m(x_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 p_i(x_2) - m(x_1)^2.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Для визначення рівня стохастичної залежності, міри залежності випадкових величин, застосовується мішаний момент другого порядку, який називається кореляційним моментом або коваріацією:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_2(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) = M\left[(x_1 - m(x_1))(x_2 - m(x_2))\right] = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{1j} x_{2j} p_{ij} - m(x_1) m(x_2).
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

Для неперервних випадкових величин x_1 та x_2, які задані двовимірною щільністю ймовірностей $f(x_1, x_2)$ числові характеристики визначаються за такими формулами:

математичне сподівання:

$$
\begin{aligned}
m(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\
m(x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

дисперсія:

$$
\begin{aligned}
D(x_1) &= \sigma_1^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m(x_1))^2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1)^2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - (m(x_1))^2, \\
D(x_2) &= \sigma_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_2 - m(x_2))^2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_2)^2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - (m(x_2))^2,
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

коваріація:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2(x_1, x_2) &= k(x_1, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_1 - m(x_1))(x_2 - m(x_2))f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x_1x_2 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - m(x_1)m(x_2).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

При умові, коли випадкові величини x_1 і x_2 є незалежними, виконується умова (2.9), коефіцієнт коваріації, або кореляційний момент з рівняння (2.16), буде дорівнювати нулю $\varepsilon_2(x_1, x_2) = k(x_1, x_2) = 0$, це пропонується довести студентам самостійно. Для того щоб нормувати цю міру стохастичної залежності в границях від -1 до +1, вводять поняття коефіцієнта кореляції, який існує в межах $|r| \leq 1$ і визначається за формулою:

$$
r_{12} = r(x_1, x_2) = \frac{k(x_1, x_2)}{\sqrt{D(x_1)D(x_2)}} = \frac{k(x_1, x_2)}{\sigma_1\sigma_2}. \tag{2.17}
$$

Для незалежних величин $r=0$; для величин, що пов'язані між собою лінійною залежністю, $r=\pm 1$. Рівність нулю коефіцієнта кореляції, однак, не свідчить про те, що випадкові величини є незалежними.

Кореляційний момент декількох випадкових величин визначається за такою формулою, відповідно для дискретних і неперервних випадкових величин:

$$
\begin{aligned}
k_{ij} &= k(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - m(x_i))(x_j - m(x_j))p(x_i, x_j), \\
k_{ij} &= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_i - m(x_i))(x_j - m(x_j))f(x_i, x_j)dx_idx_j,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

де – $k_{ij}=k(x_i,x_j)$ – кореляційний момент між випадковими величинами x_i та x_j.

Для зручності аналізу декількох випадкових величин $x_1,x_2,\dots x_n$ (а іноді і при n=2), бажано користуватися так званою кореляційною матрицею, яка складається з кореляційних моментів між випадковими величинами x_i та x_j:

$$[k_{ij}]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Властивості кореляційної матриці:

1) матриця є симетричною відносно головної діагоналі:

$$[k_{ij}]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & k_{nn} \end{bmatrix}; \tag{2.20}$$

2) елементи головної діагоналі кореляційної матриці (2.19) являють собою значення дисперсії D_i, що випливає із формули (2.18) при $i=j$, тобто $k_{ii}=D_i$;

3) у випадку, коли випадкові величини $x_1,x_2,\dots x_n$, є незалежними, $k(x_i,x_j)=0$, кореляційна матриця перетворюється у діагональну матрицю:

$$[k_{ij}]=\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ & D_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots \\ & & & D_n \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

В деяких випадках для аналізу ступеня залежності між випадковими величинами x_i та x_j, застосовується нормована матриця, яка складається із коефіцієнтів кореляції:

$$[r_{ij}]=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

де – r_{ij} коефіцієнт кореляції між випадковими величинами x_i та x_j.

Коефіцієнт кореляції визначається за формулою:

$$r_{ij} = r(x_i, x_j) = \frac{k(x_i, x_j)}{\sqrt{D(x_i)D(x_j)}} = \frac{k_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \tag{2.23}$$

Властивості нормованої матриці:

1) матриця є симетричною відносно головної діагоналі, як наслідок симетричності кореляційної матриці:

$$r_{ij} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix}; \tag{2.24}$$

2) елементи головної діагоналі (2.22) дорівнюють одиниці, що випливає із формул (2.18, 2.23), при $i=j$ виконується умова $r_{ii}=1$;

3) у випадку, коли випадкові величини $x_1, x_2, \ldots x_n$, є незалежними, тобто $r(x_i, x_j)=0$, матриця перетворюється в одиничну матрицю:

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots & \ldots \\ & & & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Контрольні запитання

1. Означення функції розподілу системи двох випадкових величин.
2. Властивості функції розподілу системи двох випадкових величин.
3. Означення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин.
4. Властивості функції розподілу системи двох випадкових величин.
5. За відомою двовимірною щільністю ймовірностей $f(x_1,x_2)$ визначити закон розподілу кожної із випадкових величин.
6. Визначити щільність ймовірностей кожної із випадкових величин за заданою двовимірною щільністю ймовірностей $f(x_1,x_2)$.
7. Означення незалежності випадкових величин x_1 і x_2.
8. Випадкові величини x_1 і x_2 є незалежними, визначити $F(x_1,x_2)$.
9. Якщо випадкові величини некорельовані, то чи будуть вони й незалежними і навпаки?
10. За якою формулою визначається математичне сподівання дискретної випадкової величини x_1, якщо відомий спільний закон розподілу системи (x_1, x_2).

11. Визначити дисперсію неперервної випадкової величини x_2, якщо відома спільна щільність ймовірності $f(x_1, x_2)$.

12. Як називається другий мішаний момент другого порядку?

13. Що визначає кореляційний момент?

14. Коефіцієнт кореляції та його властивості.

15. Кореляційна матриця системи n випадкових величин та її властивості.

16. Властивості нормованої кореляційної матриці.

Задачі

1. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (x_1, x_2):

x_2 \ x_1	-1	0	6	$P_i(x_2)$
0	0,2	0,05	0,05	0,3
1	0,2	0,1	0,1	0,4
4	0,1	0,05	0,15	0,3
$P_j(x_1)$	0,5	0,2	0,3	1,0

Обчислити: $m(x_1)$, $D(x_1)$, $m(x_2)$, $D(x_2)$, $k(x_1, x_2), r(x_1, x_2)$ та утворити кореляційну матрицю.

2. Задано закон розподілу системи двох дискретних випадкових величин (x_1, x_2):

x_2 \ x_1	0	2	6
-2	0,15	0,1	0,05
0	0,2	0,15	0,05
4	0,05	0,1	0,15

Визначити функцію розподілу $F(x_1)$, $F(x_2)$.

3. Відомо, що випадкові величини X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу зі значеннями параметрів: $a_x=-1$, $\sigma_x=2$, $a_y=-2$, $\sigma_y=3$. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин: $z=3x-2y$ і $q=3x-3y$.

4. Відомо, що випадкові величини X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу із значеннями параметрів: $a_x=1$, $\sigma_x=3$, $a_y=-3$; $\sigma_y=4$. Знайти кореляційний момент і r_{zq} для випадкових величин $z=4x-3y+7$ і $q=3x+5y-5$.

5. Щільність ймовірності двох випадкових величин x та y виражається формулою $f(x_1, x_2) = a\sin(x_1 + x_2)$ на проміжку $\left(0 \le x_1 \le \dfrac{\pi}{2}; 0 \le x_2 \le \dfrac{\pi}{2}\right)$,

визначити параметр a, а потім знайти інтегральні закони розподілу: $F(x_1, x_2)$, $F_{x1}(x_1)$ і $F_{x2}(x_2)$.

6. Задано спільну щільність $f(x_1, x_2)=0,5cos(x_1-x_2)$ на проміжку $\left(0 \le x_1 \le \frac{\pi}{2}; 0 \le x_2 \le \frac{\pi}{2}\right)$. Обчислити: $f(x_1)$ і $f(x_2)$.

7. Умова аналогічна попередній задачі. Обчислити: $m(x_1)$, $D(x_1)$, $m(x_2)$, $D(x_2)$, $k(x_1, x_2), r(x_1, x_2)$ та утворити кореляційну матрицю.

8. Задана $f(x_1, x_2) = \frac{2}{5\pi} \exp\left(-0,2x_1^2 + 0,4x_1x_2 - x_2^2\right)$, спільна щільність розподілу випадкових величин x_1, x_2. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкових величин x_1, x_2.

9. Визначити, чи є випадкові змінні x та y незалежними величинами, якщо відомий розподіл $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-0,5\left((x-a)^2 + B(y-b)^2\right)\right]$.

2.2.3 Закон розподілу функції двох випадкових величин

Щільність ймовірностей випадкової величини Y, при умові що $Y=\varphi(x_1, x_2)$, і відомій спільній щільності розподілу $f(x_1, x_2)$ системи двох випадкових величин x_1, x_2 можна визначати через функцію розподілу випадкової величини Y:

$$F(y) = \iint\limits_{(\varphi(x_1 x_2) < Y)} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \qquad (2.26)$$

або:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\varphi(x_1 x_2) < Y} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\varphi(x_1, x_2) < Y} f(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 . \qquad (2.27)$$

У випадку, коли випадкові величини x_1, x_2 незалежні $f(x_1, x_2)=f_1(x_1)f_2(x_2)$ і тоді:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{\varphi(x_1, x_2) < Y} f_1(x_1) dx_1 \right] f_2(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int\limits_{\varphi(x_1, x_2) < Y} f_2(x_2) dx_2 \right] f_1(x_1) dx_1 . \qquad (2.28)$$

Щільність розподілу функції Y визначається за формулою:

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} . \qquad (2.29)$$

2.2.4 Закон розподілу суми двох випадкових величин (композиція)

В інженерних розрахунках часто виникає потреба у визначенні закону розподілу суми $y=x_1+x_2$ двох випадкових величин, які існують на проміжку (-∞,∞):

$$F(y)=\iint\limits_{\varphi(x_1x_2)<y} f(x_1x_2)dx_1dx_2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{y-x_1} f(x_1x_2)dx_2\right)dx_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{y-x_2} f(x_1x_2)dx_1\right)dx_2 .$$

Щільності розподілу визначаємо згідно з:

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, y-x_1)dx_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y-x_2, x_2)dx_2 . \qquad (2.30)$$

Якщо випадкові величини x_1, x_2 незалежні:

$$f(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x_1)f_2(y-x_1)dx_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y-x_2)f_2(x_2)dx_2 . \qquad (2.31)$$

У випадку коли незалежні випадкові величини x_1, x_2 набувають тільки додатних значень ($x_1 \geq 0$ і $x_2 \geq 0$), щільності розподілу суми даних випадкових величин визначаються згідно з такою формулою:

$$f(y)=\int\limits_{0}^{y} f_1(x_1)f_2(y-x_1)dx_1=\int\limits_{0}^{y} f_1(y-x_2)f_2(x_2)dx_2 . \qquad (2.32)$$

Означення 1. Щільність розподілу суми незалежних випадкових величин x_1, x_2 називається композицією законів розподілу і позначається як $q=f_1{:}f_2$.

Означення 2. Закон розподілу називається стійким, якщо композиція двох однакових законів розподілу випадкових величин, являє собою закон того ж типу, але з іншими параметрами. Стійкий закон розподілу – Пуассона, біноміальний, нормальний.

2.2.5 Числові характеристики функції двох і більше випадкових величин

Числові характеристики функції $y=\varphi(x_1, x_2)$ двох дискретних випадкових величин x_1 *і* x_2 визначаються за відповідними формулами:

$$m_k(y)=\sum_{i=1}^{n} y_i^k p_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\varphi(x_{1j}, x_{2i})^k p_{ij},$$

$$\mu_k(y)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-m(y))^k p_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}(\varphi(x_{1j}, x_{2i})-m(y))^k p_{ij}, \qquad (2.33)$$

$$\mu_2(y)=D(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l}\varphi(x_{1j}, x_{2i})^2 p_{ij}-(m(y))^2.$$

Числові характеристики функції $y=\varphi(x_1, x_2)$ неперервних випадкових величин x_1 *і* x_2, визначаються за такими формулами:

$$m_k(y)=\int y^k f(y)dy=\int\int\varphi(x_1,x_2)^k f(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

$$\mu_k(y)=\int[y-m(y)]^k f(y)dy=\int\int[\varphi(x_1,x_2)-m(y)]^k f(x_1,x_2)dx_1dx_2, \quad (2.34)$$

$$\mu_2(y)=D(y)=\int\int\varphi(x_1,x_2)^2 f(x_1,x_2)dx_1dx_2-(m(y))^2.$$

Для найбільш розповсюдженого випадку, коли функція лінійна, наприклад $y=a_0\pm a_1x_1\pm a_2x_2$, математичне сподівання $m(y)$ та дисперсію $D(y)$ можна визначати за спрощеними формулами, а саме:

$$m(y)=M(a_0\pm a_1x_1\pm a_2x_2)=a_0\pm a_1m(x_1)\pm a_2m(x_2), \quad (2.35)$$

$$D(y)=D(a_0\pm a_1x_1\pm a_2x_2)=a_1^2D(x_1)+a_2^2D(x_2)+2a_1a_2k(x_1,x_2). \quad (2.36)$$

Математичне сподівання добутку двох випадкових величин дорівнює:

$$m(y)=M(x_1\cdot x_2)=m(x_1)\cdot m(x_2)+k(x_1, x_2). \quad (2.37)$$

Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин:

$$D(y)=D(x_1\cdot x_2)=(D(x_1)+m^2(x_1))(D(x_2)+m^2(x_2))-m^2(x_1)m^2(x_2) \quad (2.38)$$

або:

$$D(y)=D(x_1)D(x_2)+m^2(x_1)D(x_2)+m^2(x_2)D(x_1). \quad (2.39)$$

Контрольні запитання

1. Означення закону розподілу функції двох випадкових величин.
2. Щільність ймовірностей функції двох випадкових величин.
3. Навести формулу для визначення щільність ймовірностей суми двох випадкових величин.
4. Що називається стійким законом розподілу випадкових величин?
5. Види стійких законів розподілу випадкових величин.
6. Композиція двох законів розподілу.
7. Навести формулу для визначення щільність ймовірностей добутку двох випадкових величин.
8. Визначити щільність ймовірностей $f(y)$, якщо $y=x_1/x_2$.
9. Закон розподілу функції декількох випадкових величин.
10. Числові характеристики функції двох випадкових величин.
11. Властивості математичного сподівання функції двох випадкових величин.

12. Властивості дисперсії функції двох незалежних випадкових величин.

13. Властивості дисперсії функції двох залежних випадкових величин.

14. Числові характеристики функції декількох випадкових величин.

15. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції випадкових величин x_1 і x_2, якщо між ними існує лінійна функціональна залежність?

Задачі

1. Дискретні випадкові величини X і Y задані розподілами

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,8	0,2

Знайти розподіл випадкової величини $Z=X+Y$.

2. Дискретні випадкові величини X і Y задані розподілами

X	2	4	6
P	0,3	0,4	0,3

Y	2	6
P	0,3	0,7

Знайти розподіл випадкової величини $Z=X+Y$.

3. Дискретні випадкові величини X і Y задані розподілами

X	6	12
P	0,4	0,6

Y	1	3	7
P	0,2	0,3	0,5

Знайти розподіл випадкової величини $Z=X+Y$.

4. Незалежні випадкові величини X і Y задані диференціальними функціями: $f_1(x) = 3\ell^{-3x}$ $f_2(y) = \frac{1}{3}\ell^{-\frac{y}{3}}$. Знайти композицію.

5. Знайти щільність розподілу випадкової величини y, якщо $y=x_1+x_2$, а щільності розподілу випадкових величин x_1, x_2 відповідно дорівнюють $f_1(x_1) = a\ell^{-ax}; f_2(x_2) = b\ell^{-bx}$.

6. Знайти щільність розподілу випадкової величини y, якщо $y=x_1+x_2$, а щільності розподілу випадкових величин x_1, x_2 відповідно дорівнюють $f_1(x_1) = f_2(x_2) = \lambda\ell^{-\lambda x}$.

7. Дискретні випадкові величини x_1, x_2 задані відповідним законом розподілу та відомі $m(x_1)=1{,}3$; $D(x_1)=9{,}61$; $m(x_2)=1{,}6$; $D(x_2)=2{,}64$; $k(x_1, x_2)=1{,}52$. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової функції а) $y=x_1+x_2$, б) $y=x_1 \cdot x_2$.

x_2 \ x_1	-1	0	6	$p_j(x2)$
0	0,2	0,05	0,05	0,3
1	0,2	0,1	0,1	0,4
4	0,1	0,05	0,15	0,3
$p_i(x1)$	0,5	0,2	0,3	1,0

8. Дискретні випадкові величини x_1, x_2 задані відповідними законами розподілу. Знайти закон розподілу функції $y = x_1 \cdot x_2^2$ випадкових аргументів та математичне сподівання m_y:

x_1	0	2
p_i	0,4	0,6

x_2	-1	2
p_i	0,1	0,9

9. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової функції y, якщо y=x_1+x_2, а щільності розподілу випадкових величин x_1, x_2 відповідно дорівнюють $f_1(x_1) = \lambda_1 \ell^{-\lambda_1 x_1}, f_2(x_2) = \lambda_2 \ell^{-\lambda_2 x_2}$.

10. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової функції y, якщо y=x_1+x_2, а щільності розподілу випадкових величин x_1, x_2 відповідно дорівнюють $f_1(x_1) = f_2(x_2) = \lambda \ell^{-\lambda x}$.

11. Незалежні випадкові величини X_1, X_2 мають рівномірну щільність розподілу $f(x_1) = \dfrac{1}{b-a}$, $f(x_2) = \dfrac{1}{b-a}$; $a = 1; b = 3$. Визначити математичне сподівання $m(y)$ та дисперсію $D(y)$, якщо Y=$X_1 \cdot X_2$.

12. Задана $f(x_1, x_2) = \dfrac{2}{5\pi} \exp\left(-0{,}2x_1^2 + 0{,}4x_1x_2 - x_2^2\right)$, спільна щільність розподілу випадкових величин x_1, x_2.. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової функції y, а) y=x_1+x_2, б) y=$x_1 \cdot x_2$.

2.3 Наближені способи визначення моментів функцій випадкових величин

Для визначення імовірнісних характеристик (математичного сподівання, дисперсії) випадкової функцій y=$\varphi(x)$ від випадкової величини x, у випадку, коли невідомий закон розподілу випадкової величини x, а дано m_x, D_x, застосовуються наближені методи. Розглянемо метод лінеаризації, тобто подання функції в межах вибраної точки прямою лінією (розклад в ряд Тейлора).

Математичне сподівання m_y та дисперсію D_y для лінеаризованої функції $\varphi(x)$ визначають за відповідними формулами:

$$m_y = M[y] = M[\varphi(x)] \approx \varphi(m_x), \tag{2.40}$$

$$D_y = D[y] = D[\varphi(x)] \approx (\varphi'(m_x))^2 D_x. \tag{2.41}$$

Для функцій декількох змінних y=$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ математичне сподівання та дисперсія визначаються за відповідними формулами:

$$m_y = \varphi(m(x_1), m(x_2), .., m(x_n)), \tag{2.42}$$

$$D_y \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 D_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)k_{ij}, \qquad (2.43)$$

де – k_{ij} кореляційний момент, у випадку коли випадкові величині $x_1, x_2, ..., x_n$ незалежні $k_{ij} = 0$.

Для більш точного визначення математичного сподівання та дисперсії застосовують формули, коли обмежуються не двома, а трьома, і навіть і чотирма членами функції з ряду Тейлора. При виконанні умови (2.44) достатньо методу лінеаризації, в іншому випадку необхідно застосовувати більш складні формули для визначення математичного сподівання та дисперсії:

$$R_0 < 0.8\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 D_{x_i}}\ , \qquad (2.44)$$

де $R_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}\Delta_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i\,\partial x_j}\Delta_i\Delta_j$ – залишковий член розкладання в ряд Тейлора.

Контрольні запитання

1. В чому полягає суть методу лінеаризації?
2. Коли може застосовуватися даний метод?
3. Формула розкладання функції в ряд Тейлора.
4. Вивести формулу для визначення математичного сподівання випадкової функцій $y=\varphi(x)$.
5. Як визначити дисперсію функції однієї змінної?
6. Від яких факторів залежить похибка методу лінеаризації?
7. Числові характеристики функції багатьох змінних.
8. Умова застосування квадратичного розкладання.
9. Порівняння похибок методу лінеаризації та квадратичного розкладання.

Задачі

1. Визначити наближене значення математичного сподівання та дисперсії випадкової функції *Y*, якщо $f(x) = 2e^{-2x}$; $x \geq 0$; $y = x^2$ і порівняти з точними значеннями.

2. Задані щільності імовірності відповідно: $f_x(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $(0 \leq x < 1)$, $f_y(y) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$, $(0 \leq y < 1)$. Порівняти наближені значення

математичного сподівання та дисперсії випадкової функції $Z = arctg\frac{X}{Y}$ з точними значеннями.

3. Резонансна частота фільтра виражається формулою: $f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$. Параметри елементів C та R є незалежними, їх математичні сподівання і середнє квадратичне відхилення дорівнюють: m_C=1 мкФ, m_{R1}=10 кОм, σ_c=0,05 мкФ, σ_R=0,01 кОм. Параметри елементів розподілені за нормальним законом. Знайти математичне сподівання m_{fo} і середнє квадратичне відхилення σ_{fo} частоти f_0.

4. Струм через діод виражається формулою $I_d = I_0\left(\exp\left(U_d \big/ \varphi_T\right) - 1\right)$, де: I_0 – зворотний струм насичення; U_d – напруга на діоді; φ_T – температурний потенціал: $\varphi_T = \frac{K \cdot T}{q}$, де: K=1,38·10^{-23} Дж/К – стала Больцмана; T – температура, К, q_0=1,6·10^{-19} Кл – заряд електрона. Відомі математичні сподівання параметрів, $m(I_d)$=1 мА, $m(I_3)$=0,03 мА, $m(T)$=298 К і їх максимальні абсолютні відхилення ΔI_{dmax}=0,02 мА, ΔI_{3max}=0,002 мА, ΔT_{max}=20 К. Параметри розподілено нормально. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення напруги на діоді.

5. Резонансна частота контуру із затухання дорівнює $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\sqrt{1 - R^2\left(\frac{C}{L}\right)}$, де: R, L, C – параметри контуру, математичне сподівання і середні квадратичні відхилення яких дорівнюють: m_R=50 Ом, m_L=10 мГн, m_c=10 нФ, σ_R=5 Ом, σ_L=0,1 мГн, σ_c=0,2 нФ. Параметри розподілені нормально. Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення резонансної частоти f_o.

6. Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення вихідного сигналу логарифмуючого підсилювача $U_{ВИХ} = \varphi_T \ln\left(\frac{U_x}{U_y}\right) = \frac{K \cdot T}{q_0}\ln\left(\frac{U_X}{U_Y}\right)$, де: K=1,38·10^{-23} Дж/К – стала Больцмана, T – температура, К, q_o=1,6 10^{-19} Кл – заряд електрона, U_x і U_y – вхідні сигнали. Математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення вхідних параметрів: m_T=293 К, m_{Ux}=0,8 В, m_{Uy}=0,3 В, σ_T=5 К, σ_{Ux}=0,05 В, σ_{Ux}=0,01 В. Параметри розподілено нормально.

7. Коефіцієнт передачі приладу виражається формулою $K = \cos(\varphi)\sqrt{xy}$. Математичне сподівання і середньоквадратичні відхилення параметрів дорівнюють m_x=3, m_y=4, m_φ=π/4, δ_x=δ_y=δ_φ=0,02. Знайти уточненні значення математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення коефіцієнта K. Параметри випадкових величин x, y, φ розподілені за нормальним законом.

3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

3.1 Закони розподілу випадкових величин

3.1.1 Випадкова величина X задана функцією розподілу (інтегральною функцією) $F(x)$, на проміжку $x_{min} \le x \le x_{max}$. Знайти щільність імовірності (диференціальну функцію), математичне сподівання, дисперсію, моду, медіану, коефіцієнти асиметрії та ексцесу. Побудувати графіки інтегральної і диференціальної функцій. Визначити ймовірність знаходження випадкової величини X в інтервалі (a,b), якщо $a=m_x-2\sigma_x$, $b=m_x+2\sigma_x$.

1. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0\\ x^2 \;\; при \;\; 0<x\le 1\\ 1 \;\; при \;\; x>1\end{cases}$$

2. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 1\\ \ln(x) \;\; при \;\; 1<x\le \ell\\ 1 \;\; при \;\; x>\ell\end{cases}$$

3. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0\\ x^3 \;\; при \;\; 0<x\le 1\\ 1 \;\; при \;\; x>1\end{cases}$$

4. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 1\\ 0{,}5\sqrt{x}-0{,}5 \;\; при \;\; 1<x\le 9\\ 1 \;\; при \;\; x>9\end{cases}$$

5. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 2\\ \ln\left(\frac{1}{2}x\right) \;\; при \;\; 2<x\le 2\ell\\ 1 \;\; при \;\; x>2\ell\end{cases}$$

6. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 1\\ \sqrt{4x}-2 \;\; при \;\; 1<x\le 2{,}25\\ 1 \;\; при \;\; x>2{,}25\end{cases}$$

13. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 2\\ \frac{x^3}{56}-\frac{1}{7} \;\; при \;\; 2<x\le 4\\ 1 \;\; при \;\; x>4\end{cases}$$

14. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0\\ 9x^2 при \;\; 0<x\le \frac{1}{3}\\ 1 \;\; при \;\; x>\frac{1}{3}\end{cases}$$

15. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 1\\ x^2-1 \;\; при \;\; 1<x\le \sqrt{2}\\ 1 \;\; при \;\; x>\sqrt{2}\end{cases}$$

16. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0\\ \frac{1}{16}x^4 \;\; при \;\; 0<x\le 2\\ 1 \;\; при \;\; x>2\end{cases}$$

17. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le 0\\ \frac{1}{27}x^3 \;\; при \;\; 0<x\le 3\\ 1 \;\; при \;\; x>3\end{cases}$$

18. $$F(x)=\begin{cases}0 \;\; при \;\; x\le -3\\ \frac{1}{4}(x+3)^2 \;\; при \;\; -3<x\le -1\\ 1 \;\; при \;\; x>-1\end{cases}$$

7. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0\\ \frac{1}{8}x^3 \text{ при } 0<x\le 2\\ 1 \text{ при } x>2\end{cases}$

19. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1\\ \frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{1}{3} \text{ при } 1<x\le 16\\ 1 \text{ при } x>16\end{cases}$

8. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 3\\ \sqrt{\frac{x}{3}}-1 \text{ при } 3<x\le 12\\ 1 \text{ при } x>12\end{cases}$

20. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -2\\ (x+2)^2 \text{ при } -2<x\le -1\\ 1 \text{ при } x>-1\end{cases}$

9. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1\\ \frac{1}{8}x^2-\frac{1}{8} \text{ при } 1<x\le 3\\ 1 \text{ при } x>3\end{cases}$

21. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 3\\ \frac{1}{9}(x-3)^2 \text{ при } 3<x\le 6\\ 1 \text{ при } x>6\end{cases}$

10. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 2\\ \frac{1}{4}(x-2)^2 \text{ при } 2<x\le 4\\ 1 \text{ при } x>4\end{cases}$

22. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0.5\\ \ln(2x) \text{ при } 0.5<x\le \ell/2\\ 1 \text{ при } x>\ell/2\end{cases}$

11. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 1\\ \frac{x^2}{3}-\frac{1}{3} \text{ при } 1<x\le 2\\ 1 \text{ при } x>2\end{cases}$

23. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 0\\ x^4 \text{ при } 0<x\le 1\\ 1 \text{ при } x>1\end{cases}$

12. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le 3\\ \ln\left(\frac{x}{3}\right) \text{ при } 3<x\le 3\ell\\ 1 \text{ при } x>3\ell\end{cases}$

24. $F(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x\le -1\\ \frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2} \text{ при } -1<x\le 1\\ 1 \text{ при } x>1\end{cases}$

3.1.2 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Знайти функцію розподілу, математичне сподівання, дисперсію, моду, медіану, коефіцієнти асиметрії та ексцесу. Побудувати графік функції розподілу.

1.

x_i	-2	-1	0
p_i	0,1	?	0,8

13.

x_i	-4	0	2
p_i	?	0,1	0,7

2.

x_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,3	?

14.

x_i	-4	0	3
p_i	0,2	?	0,5

3.

x_i	-3	-2	0
p_i	0,1	?	0,4

4.

x_i	-3	0	2
p_i	?	0,7	0,2

5.

x_i	-2	-1	0
p_i	0,2	0,1	?

6.

x_i	-2	0	2
p_i	0,2	?	0,5

7.

x_i	-3	-2	0
p_i	?	0,5	0,3

8.

x_i	-3	0	2
p_i	0,1	?	0,2

9.

x_i	-4	-3	0
p_i	0,3	0,1	?

10.

x_i	-4	-2	0
p_i	0,1	?	0,6

11.

x_i	-4	-1	0
p_i	?	0,4	0,3

12.

x_i	-4	0	1
p_i	0,1	?	0,2

15.

x_i	-4	0	4
p_i	0,2	0,5	?

16.

x_i	-2	0	1
p_i	0,1	?	0,7

17.

x_i	-3	-1	0
p_i	?	0,4	0,5

18.

x_i	-3	0	10
p_i	0,1	?	0,3

19.

x_i	-3	0	3
p_i	0,1	0,8	?

20.

x_i	-2	0	1
p_i	0,2	?	0,6

21.

x_i	-3	-1	0
p_i	?	0,4	0,4

22.

x_i	-3	0	1
p_i	0,2	?	0,2

23.

x_i	-3	0	3
p_i	0,1	0,8	?

24.

x_i	0	1	2
p_i	0,3	?	0,6

Для виконання завдання необхідно користуватися такими формулами:

початковий момент *k*-го порядку:

$$m_k(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i,\ m_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx;$$

центральний момент *k*-го порядку:

$$\mu_k(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^k p_i, \mu_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^k f(x)dx;$$

математичне сподівання $m_x = m_1$ та дисперсія $D_x = \mu_2(x) = m_2 - m_1^2$.

Для неперервних випадкових величин щільність розподілу – $f(x) = F'(x)$.

Мода – $f(Mo)=max$,
медіана:
$P(-\infty<X<Me)=P(Me<X<\infty)$, $F(Me)=0{,}5$, $\int\limits_{-\infty}^{Me} f(x)dx = \int\limits_{Me}^{\infty} f(x)dx = 0{,}5$,

коефіцієнт асиметрії $k = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}}$, або γ_1;

коефіцієнт ексцесу $\gamma = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$, або γ_2.

Центральні моменти 3-го і 4-го порядків можна розраховувати за спрощеними формули:

$$\mu_3(x) = m_3(x) - 3m_x m_2(x) + 2m_x^3,$$
$$\mu_4(x) = m_4(x) - 4m_x m_3(x) + 6m_x^2 m_2(x) - 3m_x^4.$$

3.2 Закон розподілу функції одного випадкового аргументу

3.2.1 Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Знайти щільність розподілу $f(y)$ функції $y=\varphi(x)$ випадкового аргументу X. Визначити математичне сподівання, дисперсію випадкових величин X, Y та побудувати графіки функцій $f(x)$ і $f(y)$, якщо:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$ $-1 \le x \le 2$ $y=(2x-1)^2$.
2. $f(x) = \left(\dfrac{x}{4}\right)^3$ $0 \le x \le 4$ $y=(x+1)^2$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{14}\left(x^2+1\right)$ $0 \le x \le 2$ $y=(x-1)^2$.
4. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{160}$ $1 \le x \le 5$ $y=(x-3)^2$.
5. $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{130}$ $0 \le x \le 5$ $y=(x-2{,}5)^2$.
6. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{24}$ $-1 \le x \le 3$ $y=0{,}5(x-1)^2$.
7. $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{204}$ $2 \le x \le 6$ $y=(x-4)^2$.
8. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{12}$ $0 \le x \le 3$ $y=(2x-3)^2$.
9. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{12}$ $-1 \le x \le 2$ $y=(x-0{,}5)^2$.
10. $f(x) = \dfrac{x^2+6}{60}$ $-2 \le x \le 4$ $y=0{,}2(x-1)^2$.

11. $f(x)=\dfrac{6}{\pi\left(x^2+1\right)}$ $0\le x\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y=5x^2+5.

12. $f(x)=\dfrac{6}{\pi\left(x^2+4\right)}$ $0\le x\le 2\sqrt{3}$ y=0,3(x^2+4).

13. $f(x)=\dfrac{8}{\pi\left(x^2+4\right)}$ $0\le x\le 2$ y=x^2-1.

14. $f(x)=\dfrac{x^3}{20}$ $1\le x\le 3$ y=(x–2)^2.

15. $f(x)=\dfrac{4}{\pi\left(x^2+1\right)}$ $0\le x\le 1$ y=x^2+2.

16. $f(x)=\dfrac{3}{2\left(x+1\right)^2}$ $0\le x\le 2$ y=(x+2)^2.

17. $f(x)=\dfrac{3}{\left(x+4\right)^2}$ $-2\le x\le 2$ y=0,1(x+4)^2.

18. $f(x)=\dfrac{4}{\left(x+2\right)^2}$ $0\le x\le 2$ y=0,5(x+2)^2.

19. $f(x)=\dfrac{5}{4\left(x+3\right)^2}$ $-2\le x\le 2$ y=0,1(x+3)^2.

20. $f(x)=\dfrac{6}{\left(x+3\right)^2}$ $0\le x\le 3$ y=(x–3)^2.

21. $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ $-2\le x\le 1$ y=(x+0,5)^2.

22. $f(x)=\dfrac{3x^2}{7}$ $1\le x\le 2$ y=(x–1,5)^2.

23. $f(x)=\dfrac{x^3}{20}$ $1\le x\le 3$ y=(x–2)^2.

24. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $1\le x\le 2.25$ y=$x^{1/3}$.

3.2.2 Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу п.3.1.2. Знайти закон розподілу функції $y=\varphi(x)$ випадкового аргументу X. Визначити математичне сподівання, дисперсію випадкових величин X, Y. Аналітичний вираз функції $y=\varphi(x)$ подано в п.3.2.1.

3.3 Наближені способи визначення моментів функції випадкового аргументу

3.3.1 Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)$. Порівняти точне та наближене значення математичного сподівання m_y та дисперсії D_y функції $y=\varphi(x)$ випадкового аргументу X, якщо:

1. $f(x)=\frac{x^2}{3}$ $-1 \le x \le 2$ $y=x^3+3$.

2. $f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^3$ $0 \le x \le 4$ $y=\sqrt{x}$.

3. $f(x)=\frac{3}{14}\left(x^2+1\right)$ $0 \le x \le 2$ $y=0{,}1x^3$.

4. $f(x)=\frac{x^3+1}{160}$ $1 \le x \le 5$ $y=\frac{10}{x}$.

5. $f(x)=\frac{3x^2+1}{130}$ $0 \le x \le 5$ $y=\sqrt{x}$.

6. $f(x)=\frac{x^3+1}{24}$ $-1 \le x \le 3$ $y=0{,}5x^3$.

7. $f(x)=\frac{3x^2-1}{204}$ $2 \le x \le 6$ $y=0{,}01x^4$.

8. $f(x)=\frac{x^2+1}{12}$ $0 \le x \le 3$ $y=\sqrt{x}$.

9. $f(x)=\frac{x^2+3}{12}$ $-1 \le x \le 2$ $y=x^3$.

10. $f(x)=\frac{x^2+6}{60}$ $-2 \le x \le 4$ $y=0{,}3x^3$.

11. $f(x)=\frac{6}{\pi\left(x^2+1\right)}$ $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ $y=x^3+x$.

12. $f(x)=\frac{6}{\pi\left(x^2+4\right)}$ $0 \le x \le 2\sqrt{3}$ $y=0{,}1\left(x^3+4x\right)$.

13. $f(x)=\frac{8}{\pi\left(x^2+4\right)}$ $0 \le x \le 2$ $y=0{,}2x\left(x^2+4\right)$.

14. $f(x)=\frac{x^3}{20}$ $1 \le x \le 3$ $y=\left(2x^2+2\right)\sqrt{x}$.

15. $f(x)=\frac{4}{\pi\left(x^2+1\right)}$ $0 \le x \le 1$ $y=\left(x^2+1\right)\sqrt{4x}$.

16. $f(x)=\frac{3}{2\left(x+1\right)^2}$ $0 \le x \le 2$ $y=\left(4x+4\right)^{1{,}5}$.

17. $f(x)=\frac{3}{\left(x+4\right)^2}$ $-2 \le x \le 2$ $y=0{,}1\left(2x+8\right)^{1{,}5}$.

18. $f(x)=\frac{4}{\left(x+2\right)^2}$ $0 \le x \le 2$ $y=0{,}1\left(4x+8\right)^{1{,}5}$.

19. $f(x)=\dfrac{5}{4(x+3)^2}$ $-2\le x\le 2$ $y=0{,}1(4x+12)^{1,5}$.

20. $f(x)=\dfrac{6}{(x+3)^2}$ $0\le x\le 3$ $y=(2x+6)^{1,5}$.

21. $f(x)=\dfrac{x^2}{3}$ $-2\le x\le 1$ $y=x^3+1$.

22. $f(x)=\dfrac{3x^2}{7}$ $1\le x\le 2$ $y=\dfrac{10}{\sqrt{x}}$.

23. $f(x)=\dfrac{x^3}{20}$ $1\le x\le 3$ $y=10\sqrt{x}$.

24. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $1\le x\le 2.25$ $y=x^3$.

Приклад. Визначити точні та наближені значення m_y і D_y функції $y=\varphi(x)$ випадкового аргументу X, застосувавши лінійне та квадратичне розкладання функції в ряд Тейлора, якщо $y=x^2$, а випадкова величина X розподілена за експоненціальним законом $f(x)=2exp(-2x)$.

Розв'язування

1) визначимо точне значення m_y і D_y:

$$m_y=\int yf(y)dy=\int\varphi(x)f(x)dx=\int_0^\infty x^2\cdot 2\exp(-2x)dx=0{,}5,$$

$$D_y=\int y^2 f(y)dy-m_y^2=\int(\varphi(x))^2 f(x)dx-(m_y)^2=$$

$$=\int_0^\infty x^4\,2\exp(-2x)dx-(0{,}5)^2=1{,}25.$$

2) методом лінеаризації (лінійне розкладання функції $y=x^2$ в ряд Тейлора) визначаємо m_y і D_y за формулами:

$$m_y\approx\varphi(m_x),\quad D_y\approx(\varphi'(m_x))^2 D_x.$$

На підставі властивості експоненціального закону розподілу m_x=0,5 і D_x=0,25. Тоді:

$$m_y\approx\varphi(m_x)=m_x^2=0{,}5^2=0{,}25,$$

$$D_y\approx(\varphi'(m_x))^2 D_x,\quad \varphi'(x)=\left(x^2\right)'=2x,$$

$$D_y\approx\left(2m_x\right)^2 D_x=4m_x^2\cdot D_x=\left(2\cdot 0{,}5\right)^2\cdot 0{,}25=0{,}25.$$

3) квадратичне розкладання функції $y=x^2$ в ряд Тейлора:

$$m_y \approx \varphi(m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)D_x,$$
$$D_y \approx [\varphi'(m_x)]^2 D_x+\frac{1}{4}[\varphi''(m_x)]^2\{\mu_4(x)-D_x^2\}+\varphi'(m_x)\varphi''(m_x)\mu_3(x),$$

де:

$$\varphi_x(m_x)=0{,}25, \quad \varphi_x'(x)=\left(x^2\right)'=2x, \quad \varphi_x''(x)=\left(x^2\right)''=2,$$
$$\mu_3(x)=\int(x-m_x)^3 f(x)dx=\int_0^{\infty}(x-0{,}5)^3 2\exp(-2x)dx=0{,}25,$$
$$\mu_4(x)=\int(x-m_x)^4 f(x)dx=\int_0^{\infty}(x-0{,}5)^4 2\exp(-2x)dx=0{,}5625$$

тоді:

$$m_y \approx \varphi(m_x)+\frac{1}{2}\varphi''(m_x)D_x=0{,}5,$$
$$D_y \approx [\varphi'(m_x)]^2 D_x+\frac{1}{4}[\varphi''(m_x)]^2\{\mu_4(x)-D_x^2\}+\varphi'(m_x)\varphi''(m_x)\mu_3(x)=1{,}25.$$

Порівняємо результати

	m_y	D_y
точне значення	0,5	1,25
наближене (два члени ряду)	0,25	0,25
відносна похибка (%)	50%	80%
наближені три члени ряду	0,5	1,25
відносна похибка (%)	0%	0%

Для визначення центральних моментів 3-го і 4-го порядків, можна застосувати спрощені формули:

$$\mu_3(x)=m_3(x)-3m_x m_2(x)+2m_x^3,$$
$$\mu_4(x)=m_4(x)-4m_x m_3(x)+6m_x^2 m_2(x)-3m_x^4,$$

де – $m_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx$.

3.3.2 Визначити наближені значення математичного сподівання m_y та дисперсії D_y функції $Y=f(X_1, X_2)$ (таблиця 3.1), якщо X_1 і X_2 є результатами експерименту, які подані в таблиці 3.2.

Таблиця 3.1

Номер	Функціональна залежність	Номер	Функціональна залежність
1.	$Y = X_1^{0,5} X_2^{0,5}$	13.	$Y = \sqrt{2X_1 + 3X_2}$
2.	$Y = 0{,}2 \cdot X_1^{0,5} e^{0,1X2}$	14.	$Y = 0{,}1e^{5\sqrt{X_1/X_2}}$
3.	$Y = 0{,}2 \cdot X_1 \ln 4X_2$	15.	$Y = 0{,}01X_1^2 \ln 2X_2$
4.	$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$	16.	$Y = 0{,}01(X_1 + X_2)^2$
5.	$Y = 0{,}1\exp(0{,}01(X_1 + X_2))$	17.	$Y = 0{,}1X_1 \cdot 10^{0,1X_2}$
6.	$Y = 2\ln 3(X_1 + X_2)$	18.	$Y = 2\ln[200/(X_1 + X_2)]$
7.	$Y = X_1/X_2$	19.	$Y = 10/\sqrt{X_1 + X_2}$
8.	$Y = 10\exp(0{,}0001X_1X_2)$	20.	$Y = 0{,}5 \cdot 10^{1,5\sqrt{X_1/X_2}}$
9.	$Y = \ln(2X_1/X_2)$	21.	$Y = \ln(2X_1 + 3X_2)$
10.	$Y = X_1X_2/(X_1 + X_2)$	22.	$Y = (X_1 + X_2)(X_1 - X_2)$
11.	$Y = 1{,}5\exp(3X_1/X_2)$	23.	$Y = 2 \cdot 10^{0,1(X_1+X_2)}$
12.	$Y = 10\ln X_1X_2$	24.	$Y = \sqrt{X_1}\ln X_2$

Таблиця 3.2 Результати експерименту

Номер	*Варіант* 1 *Рд*=0,9		*Варіант* 2 *Рд*=0,95		*Варіант* 3 *Рд*=0,99		*Варіант* 4 *Рд*=0,9		*Варіант* 5 *Рд*=0,95	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
1.	6,166	6,229	13,781	13,688	40,709	41,856	19,996	19,908	51,132	51,201
2.	6,156	6,213	13,654	13,504	40,599	41,586	19,932	19,805	51,121	51,174
3.	6,139	6,187	13,457	13,234	40,428	41,206	19,832	19,667	51,104	51,139
4.	6,118	6,156	13,208	12,903	40,212	40,753	19,706	19,507	51,083	51,100
5.	6,095	6,120	12,932	12,544	39,973	40,272	19,567	19,340	51,059	51,059
6.	6,072	6,085	12,656	12,191	39,733	39,810	19,427	19,182	51,035	51,022
7.	6,052	6,053	12,407	11,881	39,517	39,412	19,301	19,050	51,013	51,992
8.	6,035	6,028	12,210	11,642	39,345	39,117	19,201	18,956	50,996	50,971
9.	6,025	6,011	12,083	11,498	39,235	38,953	19,137	18,909	50,985	50962
10.	6,021	6,006	12,039	11,464	39,197	38,937	19,114	18,914	50,982	50,966

Продовження таблиці 3.2

Номер	*Варіант* 6 *Рд*=0,99		*Варіант* 7 *Рд*=0,9		*Варіант* 8 *Рд*=0,95		*Варіант* 9 *Рд*=0,99		*Варіант* 10 *Рд*=0,9	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
1.	16,418	16,270	78,114	78,618	81,290	81,115	54,781	55,661	6,427	6,319
2.	16,330	16,059	77,988	78,298	81,222	80,961	54,661	55,228	6,395	6,247
3.	16,191	15,794	77,792	77,906	81,115	80,777	54,475	54,725	6,345	6,166
4.	16,018	15,499	77,544	77,480	80,980	80,582	54,240	54,202	6,282	6,083
5.	15,825	15,205	77,270	77,063	80,831	80,394	53,979	53,709	6,213	6,006
6.	15,632	14,939	76,995	76,695	80,682	80,233	53,719	53,295	6,143	5,944
7.	15,458	14,728	76,748	76,412	80,547	80,113	53,483	53,000	6,080	5,901
8.	15,319	14,592	76,551	76,242	80,440	80,047	53,297	52,853	6,030	5,883
9.	15,231	14,545	76,425	76,201	80,372	80,040	52,177	52,869	5,998	5,891
10.	15,200	14,591	76,381	76,293	80,348	80,094	53,135	53,045	5,987	5,924
Номер	*Варіант* 11 *Рд*=0,95		*Варіант* 12 *Рд*=0,99		*Варіант* 13 *Рд*=0,9		*Варіант* 14 *Рд*=0,95		*Варіант* 15 *Рд*=0,99	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
1.	29,733	30,057	96,260	96,147	63,235	63,279	67,842	67,257	29,125	29,458
2.	29,633	29,728	96,236	96,071	63,185	63,119	67,732	66,956	29,012	28,973
3.	29477	29,363	96,197	95,988	63,107	62,950	67,560	66,642	28,835	28,478
4.	29,282	28,998	96,149	95,907	63,009	62,787	67,344	66,347	28,612	28,022
5.	29,064	28,669	96,095	95,835	62,900	62,647	67,105	66,099	28,364	27,649
6.	28,847	28,407	96,041	95,781	62,791	62,543	66,865	65,923	28,117	27,395
7.	28,651	28,239	95,993	95,74?	62,693	62,485	66,649	65,835	27,894	27,286
8.	28,495	28,180	95,954	95,740	62,615	62,480	66,477	65,844	27,717	27,332
9.	28,395	28,238	95,930	95,758	62,565	62,527	66,367	65,950	27,603	27,529
10.	28,360	28,405	95,921	95,800	62,548	62,622	66,328	66,142	27,563	27,857
Номер	*Варіант* 16 *Рд*=0,9		*Варіант* 17 *Рд*=0,95		*Варіант* 18 *Рд*=0,99		*Варіант* 19 *Рд*=0,9		*Варіант* 20 *Рд*=0,95	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
1.	48,741	48,413	11,005	10,985	81,845	81,424	8,900	8,577	21,465	20,420
2.	48,855	48,197	10,979	10,889	81,795	81,254	8,792	8,212	21,343	20,077
3.	48,721	47,976	10,938	10,795	81,716	81,091	8,624	7,868	21,155	19,761
4.	48,553	47,777	10,887	10,713	81,617	80,951	8,412	7,579	20,917	19,502

Продовження таблиці 3.2

5.	48,367	47,619	10,831	10,649	81,507	80,846	8,178	7,373	20,653	19,326
6.	48,180	47,517	10,774	10,611	81,398	80,789	7,943	7,271	20,390	19,250
7.	48,012	47,482	10,723	10,602	81,298	80,773	7,731	7,282	20,152	19,282
8.	47,878	47,517	10,683	10,622	81,220	80,830	7,563	7,405	19,963	19,418
9.	47,792	47,618	10,657	10,671	81,169	80,925	7,455	7,628	19,842	19,646
10.	47,762	47,775	10,648	10,743	81,152	81,059	7,417	7,930	19,799	19,942
Номер	*Варіант* 21 *Рд*=0,99		*Варіант* 22 *Рд*=0,9		*Варіант* 23 *Рд*=0,95		*Варіант* 24 *Рд*=0,99		*Варіант* 25 *Рд*=0,9	
	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2	X_1	X_2
1.	31,649	31,361	32,472	32,412	1,664	1,546	95,965	95,960	55,875	55,745
2.	31,519	30,800	32,466	32,397	1,641	1,465	95,964	95,959	55,857	55,687
3.	31,317	30,293	32,456	32,383	1,606	1,395	95,964	95,958	55,828	55,640
4.	31,062	29,891	32,443	32,372	1,561	1,343	95,963	95,957	55,792	55,608
5.	30,779	29,632	32,429	32,365	1,511	1,314	95,962	95,957	55,751	55,594
6.	30,496	29,542	32,415	32,363	1,462	1,311	95,961	95,957	55,711	55,600
7.	30,241	29,630	32,403	32,367	1,417	1,335	95,961	95,957	55,675	55,625
8.	30,038	29,887	32,393	32,375	1,381	1,382	95,960	95,958	55,646	55,666
9.	29,908	30,288	32,386	32,388	1,358	1,449	95,960	95,959	55,627	55,720
10.	29,863	30,794	32,384	32,403	1,350	1,528	95,960	95,960	55,621	55,782

Приклад. Задана послідовність випадкових чисел X_1 і X_2, (таблиця 3.3). Визначити наближені значення математичного сподівання та дисперсії випадкової величини $Y = 0{,}3X_1\ell^{0{,}01X_2}$.

Таблиця 3.3

i	X_1	X_2	*i*	X_1	X_2
1.	21,582	20,585	11.	20,683	21,749
2.	21,515	20,595	12.	20,750	21,836
3.	21,410	20,641	13.	20,854	21,882
4.	21,279	20,724	14.	20,986	21,881
5.	21,133	20,840	15.	21,131	21,834
6.	20,987	20,982	16.	21,277	21,743
7.	20,855	21,143	17.	21,409	21,615
8.	20,751	21,311	18.	21,514	21,458
9.	20,684	21,476	19.	21,581	21,285
10.	20,660	21,625	20.	21,605	21,108

Розв'язування

1. Визначаємо середні арифметичні величини (оцінка математичного сподівання) випадкових величин X_1 та X_2:

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{1i} = 21{,}1323;$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_{2i} = 21{,}31565.$$

2. Обчислюємо середнє значення величини Y за формулою:

$$m_y = \overline{Y} \approx 0{,}3\overline{X}_1 \ell^{0{,}01\overline{X}_2} = 7{,}84586.$$

3. Знаходимо оцінки дисперсії (виправлена дисперсія) випадкових величини X_1 та X_2:

$$S^2(x_1) = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{20}\left(x_{1i} - \overline{X}_1\right)^2 = 0{,}117348;$$

$$S^2(x_2) = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{20}\left(x_{2i} - \overline{X}_2\right)^2 = 0{,}2132.$$

4. Знаходимо оцінки дисперсії середньоарифметичних величини $\overline{X}_1$ та $\overline{X}_2$:

$$S^2(\overline{x}_1) = \frac{S^2(x_1)}{n} = 0{,}0058674;$$

$$S^2(\overline{x}_2) = \frac{S^2(x_2)}{n} = 0{,}01066.$$

5. Розрахуємо значення часткової похідної даної функції (значення коефіцієнтів чутливості):

$$c_1 = \frac{\partial Y}{\partial X_1} = 0{,}3\ell^{0.01\overline{X}_2} = 0{,}37127;$$

$$c_2 = \frac{\partial Y}{\partial X_2} = 0{,}3\overline{X}_1 \cdot 0{,}01 \cdot \ell^{0{,}01\overline{X}_2} = 0{,}078459.$$

6. Визначаємо оцінку кореляційного моменту:

$$K(x_1, x_2) = \frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{20}(x_{1i} - \overline{X}_1)(x_{2i} - \overline{X}_2) = -0{,}08138.$$

7. Знаходимо значення коефіцієнта кореляції (нормований кореляційний момент):

$$r(x_1, x_2) = \frac{K(x_1, x_2)}{S(x_1)S(x_2)} = -0{,}5145;$$
$$-1 < r(x_1, x_2) < 1.$$

8. Оцінка дисперсії величини Y:

$$S^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2_{\bar{x}_i} S^2(\overline{X}_i) + 2\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)_{\bar{x}} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_j} \right)_{\bar{x}} r(x_i, x_j) S(\overline{X}_i) S(\overline{X}_j),$$
$$S^2(Y) = c_1^2 \cdot S^2(\overline{X}_1) + c_2^2 \cdot S^2(\overline{X}_2) + 2c_1c_2r(x_1, x_2)S(\overline{X}_1)S(\overline{X}_2) = 6{,}3736 \cdot 10^{-4}.$$

9. Оцінка дисперсії величини Y. без врахування коефіцієнта кореляції:

$$S^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2_{\bar{x}_i} S^2(\overline{X}_i);$$
$$S^2(Y) = c_1^2 \cdot S^2(\overline{X}_1) + c_2^2 \cdot S^2(\overline{X}_2) = 8{,}74 \cdot 10^{-4}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабак В. П. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики: Навч. посібник / Бабак В. П, Біленький А. Я., Приставка О. П. – К. : КВЩ 2003. – 432с.
2. Бабак В. П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: підручник для студентів ВНЗ / Бабак В. П., Марченко Б. Г., Фриз М. Є.– К. : Техніка 2004. – 288с.
3. Жлуктечко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2-х ч. – Ч.І. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктечко, С. І. Наконечний – К. : КНЕУ. 2000. – 303с.
4. Жлуктечко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник. У 2-х ч. – Ч.ІІ. Математична статистика / В. І. Жлуктечко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна – К. : КНЕУ. 2001. – 336с.
5. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях. Учебное пособие / И. П. Захаров, В. Д. Кукуш – Харьков: «Консум» 2002. – 256с.
6. Володарський Є. Т. Статистична обробка даних: Навч. посібник / Є. Т. Володарський, Л. О. Кошева – К. : НАУ. 2008. – 308 с.
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров – М. : «Наука» 1988. – 480с.
8. Вентцель Е. С.Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров – М. : «Наука» 1991. – 384 с.
9. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций, под. ред. А. А. Свешникова – М. : «Наука» 1970. – 656 с.
10. Гмурман. В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие / Гмурман В. Е. – М. : Высшая школа. 1970. – 212 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки до проведення практичних занять та виконання контрольних робіт з дисципліни «Спецглави математики» Ч. 1 для студентів напряму підготовки «Метрологія та інформаційно-вимірювальні технології» всіх форм навчання

Редактор В. Дружиніна
Коректор З. Поліщук

Укладачі: П. Кулаков
В. Присяжнюк

Оригінал-макет підготовлено В. Присяжнюком

Підписано до друку
Формат 29,7 × 42¼ . Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman
Друк різографічний. Ум. друк. арк.
Наклад пр. Зам. №

Вінницький національний технічний університет.
навчально-методичний відділ ВНТУ.
21021. м. Вінниця. Хмельницьке шосе. 95.
ВНТУ к. 2201.
Тел. (0432) 59-87-36.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Віддруковано у Вінницькому національному технічному університеті
в комп'ютерному інформаційно-видавничому центрі.
21021. м. Вінниця. Хмельницьке шосе. 95.
ВНТУ. ГНК. к. 114.
Тел.(0432) 59-85-32.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.