УДК 621.77

В. О. Краєвський
І. В. Фіник

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕНЗОРНОЇ МОДЕЛІ НАКОПИЧЕННЯ ПОШКОДЖЕНЬ ІЗ ВРАХУВАННЯМ “ПАМ'ЯТІ НАПРЯМІВ” ІЗ ЛІНІЙНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ ФУНКЦІЇ ПОШКОДЖЕНОСТІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
Визначено та досліджено критеріальні співвідношення, що випливають із тензорної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам’яті напрямів» та лінійною апроксимацією функції пошкодженності.
Ключові слова: накопичення пошкоджень, тензорна модель, руйнування, деформація, пластичність.

Abstract
The criterion relations arising from the tensor model of damage accumulation with consideration of the" directions memory" and linear approximation of the damage function are determined and investigated..
Keywords: damage accumulation, tensor model, destruction, deformation, plasticity.

Вступ

У роботі [1] запропоновано тензорну модель накопичення пошкоджень із врахуванням «пам’яті напрямів», яка має наступне фізичне тлумачення: при зміні головних напрямів приростів тензора деформацій, головні напрями тензора накопичення пошкоджень на початку другого етапу деформування збігаються з попередніми напрямами тензора приростів деформацій. І тільки після накопичення певного ступеня пластичної деформації головні напрями тензора накопичення пошкоджень поступово змінюються до нових головних напрямів приростів тензора деформацій..

Метою роботи є визначення та дослідження критеріальних співвідношень, що випливають із тензорної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам’яті напрямів» та лінійною апроксимацією функції пошкодженності.

Результати дослідження

Стосовно двохетапного деформування тензорно-лінійна модель із врахуванням „пам'яті напрямів” набуде вигляду

$$\begin{aligned}\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \Bigg[\int_0^{\varepsilon_u^{(1)}} F(\varepsilon_u;\eta^{(1)};\mu_\sigma^{(1)}) \cdot d\varepsilon_u + \\ + \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{(1-\delta)}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u \Bigg] + \\ + \beta_{ij}^{(2)} \cdot \Bigg[\int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \times \\ \times F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u + \int_{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}}^{\varepsilon^*} F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u \Bigg].\end{aligned} \quad (1)$$

де $f\left(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}\left(\eta, \mu_\sigma\right)\right)$ – функція пошкоджeності; $F(\varepsilon_u, \eta, \mu_\sigma) = \dfrac{df}{d\varepsilon_u}$ – позитивна функція, яка залежить від характеристик матеріалу; $\varepsilon_{*c}^{(r)} = \varepsilon_{*c}\left(\eta^{(r)};\mu_\sigma^{(r)}\right)$ – значення граничної деформації з діаграми пластичності для r-ого етапу, напружено-деформований стан якого характеризується параметрами $\eta^{(r)}$ та $\mu_\sigma^{(r)}$; $k_{qr} = \beta_{ij}^{(q)} \cdot \beta_{ij}^{(r)}$ – косинус зламу траєкторії деформування.

Із врахуванням міри

$$M(\psi) = \psi_u(\varepsilon_u) = \sqrt{\psi_{ij} \cdot \psi_{ij}} \tag{2}$$

випливає співвідношення

$$\psi_u(\varepsilon_u) = g_1^2 + 2 \cdot k_{12} \cdot g_1 \cdot g_2 + g_2^2, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} g_1 &= f(\varepsilon_u^{(1)}, \varepsilon_{*1}) - f(0, \varepsilon_{*1}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{(1-\delta)}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u; \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} g_2 &= f(\varepsilon_*, \varepsilon_{*2}) - f(\varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}, \varepsilon_{*2}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо на другому етапі деформування здійснюється до руйнування, то співвідношення (3) із врахуванням умови руйнування $\psi_u(\varepsilon_*) = 1$ приймає вигляд

$$g_1^2 + 2 \cdot k_{12} \cdot g_1 \cdot g_2 + g_2^2 = 1. \tag{6}$$

У роботі [2] зроблено аналіз, який дозволяє вибрати корінь рівняння (6), що задовольняє фізичний зміст задачі, яка розглядається

$$g_2 = -k_{12} \cdot g_1 + \sqrt{g_1^2 \cdot (k_{12}^2 - 1) + 1}. \tag{7}$$

Руйнування може відбутись під час повороту головних напрямів тензора накопичення пошкоджень. Тоді g_1 та g_2 визначаються відповідно з формул

$$\begin{aligned} g_1 &= f(\varepsilon_u^{(1)}, \varepsilon_{*1}) - f(0, \varepsilon_{*1}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_*} \frac{(1-\delta)}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u; \end{aligned} \tag{8}$$

$$g_2 = \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_*} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u. \tag{9}$$

Мінімальний використаний ресурс пластичності на першому етапі деформування, при якому відбувається руйнування зразка до повороту головних напрямів тензора накопичення пошкоджень знайдемо з умови

$$g_1^2 + 2 \cdot k_{12} \cdot g_1 \cdot g_2' + g_2'^2 = 1, \tag{10}$$

де g_2' визначається за формулою

$$g_2' = \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u. \tag{11}$$

Для виконання умов

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon_u^{(1)}) = 0; \\ \delta(\varepsilon_u^{(1)} - \Delta\varepsilon_{кр}) = 1. \end{cases} \tag{12}$$

обираємо функцію

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon_u - \varepsilon_u^{(1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}} \right). \tag{13}$$

Розглянемо лінійну апроксимацію функції пошкодженості

$$f(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}) = \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_{*c}}, \tag{14}$$

то у відповідності з (1) дістанемо тензорно-лінійну модель із врахуванням неспіввісності головних напрямів тензорів приростів деформацій та накопичення пошкоджень, що ґрунтується на лінійному законі підсумовування пошкоджень

$$\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \left[\int_0^{\varepsilon_u^{(1)}} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*1}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{(1-\delta)}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*2}} \right] +$$

$$+\beta_{ij}^{(2)} \cdot \left[\int_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2\cdot\delta\cdot(1-\delta)\cdot k_{12} + \delta^2}} \cdot \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{\varepsilon_u^{(1)}+\Delta\varepsilon_{кр}}^{\varepsilon_*} \frac{d\varepsilon_u}{\varepsilon_{*2}} \right]. \tag{15}$$

У цьому випадку, при $\varepsilon_u^{(2)} = \varepsilon_*$ згідно з (4) та (5), маємо

$$g_1 = \psi_1 + \frac{\psi_{кр}}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right) - \ln\left(-\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right)}{\sqrt{2-2\cdot k_{12}}}, \tag{16}$$

$$g_2 = \psi_2 + \frac{\psi_{кр}}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right) - \ln\left(-\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right)}{\sqrt{2-2\cdot k_{12}}}, \tag{17}$$

де $\psi_{*2} + \psi_{кр}$ – залишковий ресурс пластичності на другому етапі деформування;

$$\psi_{*2} = \frac{\varepsilon_* - \varepsilon_u^{(1)} - \Delta\varepsilon_{кр}}{\varepsilon_{*c}(\eta^{(2)}; \mu_\sigma^{(2)})}. \tag{18}$$

При цьому співвідношення (7) приймає вигляд

$$\psi_{*2} + \psi_{кр} =$$

$$= -\psi_1 \cdot k_{12} - \frac{\psi_{кр}}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right) - \ln\left(-\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right)}{\sqrt{2-2\cdot k_{12}}} \cdot (1+k_{12}) + \quad +\psi_{кр} \tag{19}$$

$$+\sqrt{\left(\psi_1 + \frac{\psi_{кр}}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right) - \ln\left(-\sqrt{2-2\cdot k_{12}}+2\right)}{\sqrt{2-2\cdot k_{12}}}\right)^2 \cdot \left(k_{12}^2 - 1\right) + 1 +}$$

із якого випливає, що залишковий ресурс пластичності не залежить від черговості прикладення навантаження. Наприклад, двохетапні процеси розтяг–кручення і кручення–розтяг в координатах $\psi_1 - \psi_{*2}$ описуються однією і тією ж самою кривою. Таким чином із принципу лінійного підсумовування випливає закон комутативності деформування.

При гіпотетичному розділенні стаціонарного деформування на два етапи, тобто при $k_{12} = 1$ та $\alpha_{12} = 1$ отримаємо

$$\psi_{*2} + \psi_{кр} = 1 - \psi_1, \tag{20}$$

що еквівалентно виразу, який отримується із тензорно-лінійної моделі без врахування „пам'яті напрямів”.

При $k_{12} = -1$ (наприклад, осьовий розтяг на першому етапі деформування та осьовий стиск на другому) з виразу (19) отримаємо

$$\psi_{*2} + \psi_{кр} = 1 + \psi_1 + \psi_{кр}, \tag{21}$$

що відрізняється на $\psi_{кр}$ від виразу, який отримано з тензорно-лінійної моделі при аналогічній схемі деформування.

Мінімальний використаний ресурс пластичності $\psi_{1гр}$, при якому руйнування зразка відбувається до моменту, коли головні напрями тензора накопичення пошкоджень стануть співвісними головним напрямам тензора приростів деформацій, знайдемо, розв'язавши рівняння

$$-\psi_{1гр} \cdot k_{12} - \frac{\psi_{кр}(\psi_{1гр})}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} + 2\right) - \ln\left(-\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} + 2\right)}{\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}} \cdot \left(1 + k_{12}\right) + \sqrt{\left(\psi_{1гр} + \frac{\psi_{кр}(\psi_{1гр})}{2} \cdot \frac{\ln\left(\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} + 2\right) - \ln\left(-\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} + 2\right)}{\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}}\right)^2 \cdot \left(k_{12}^2 - 1\right) + 1} = 0. \tag{22}$$

При $\psi_1 > \psi_{1гр}$ залишковий ресурс пластичності ψ_{*2} знайдемо розв'язавши рівняння (7) при

$$g_1 = \psi_1 + \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\psi_{*2} \cdot \psi_{кр} - \psi_{*2}^2\right) \cdot \left(k_{12} - 1\right) + \psi_{кр}^2} - \psi_{кр}}{2 \cdot k_{12} - 2} + \frac{\ln\left[\dfrac{\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} \cdot \left(2 \cdot \psi_{*2} - \psi_{кр}\right) + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\psi_{*2} \cdot \psi_{кр} - \psi_{*2}^2\right) \cdot \left(k_{12} - 1\right) + \psi_{кр}^2}}{\left(2 - \sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}\right) \cdot \psi_{кр}}\right]}{2 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}} \times \psi_{кр}; \tag{23}$$

$$g_2 = \frac{\sqrt{2 \cdot \left(\psi_{*2} \cdot \psi_{кр} - \psi_{*2}^2\right) \cdot \left(k_{12} - 1\right) + \psi_{кр}^2} - \psi_{кр}}{2 - 2 \cdot k_{12}} + \frac{\ln\left[\dfrac{\sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}} \cdot \left(2 \cdot \psi_{*2} - \psi_{кр}\right) + 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\psi_{*2} \cdot \psi_{кр} - \psi_{*2}^2\right) \cdot \left(k_{12} - 1\right) + \psi_{кр}^2}}{\left(2 - \sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}\right) \cdot \psi_{кр}}\right]}{2 \cdot \sqrt{2 - 2 \cdot k_{12}}} \times \psi_{кр}. \tag{24}$$

Висновки

Визначено та досліджено критеріальні співвідношення, що випливають із тензорної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам’яті напрямів» та лінійною апроксимацією функції пошкодженності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Михалевич В. М., Краєвський В. О. Розробка структури тензорно-лінійної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам'яті напрямів» // Праці міжнародної науково-технічної конференції "Застосування теорії пластичності в сучасних технологіях обробки тиском і автотехнічних експертизах". – Вінниця: ВНТУ. – 2006. – С. 97-99.
2. Михалевич В.М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: «УНІВЕРСУМ – Вінниця», 1998. – 195 с..

Фінник Ірина Валеріївна – студент Вінницького національного технічного університету, факультет будівництва, теплоенергетики та газопостачання, група ТЕ-14б
Науковий керівник: **Краєвський Володимир Олександрович** – к.т.н., доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету
Finyk Iryna - student of Vinnytsia National Technical University, Faculty of Civil Engineering, Thermal Power Engineering and Gas Supply
Supervisor: **Kraievskyi Volodymyr** - Ph.D., Associate Professor, Department of Mathematics Vinnytsia National Technical University