УДК 519.85

Ю. О. Маліцький
С. Г. Кривогубченко
Ю. Ю. Іванов

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕЛДЕРА-МІДА ТА КОШІ

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У даній роботі проаналізовано методи оптимізації Нелдера-Міда та Коші. Представлено їх основну ідею, а також переваги та недоліки.
Ключові слова: оптимізація, екстремум, прямі методи, Нелдер-Мід, Коші.

Abstract
In this paper is analyzed the Nelder-Mead and Cauchy optimization methods. Their main idea, as well as advantages and disadvantages are presented.
Keywords: *optimization, extremum, direct methods, Nelder-Mead, Cauchy.*

Вступ

У даний час, в зв'язку з доступністю персональних комп'ютерів, велика увага приділяється використанню чисельних методів оптимізації. Переважна більшість цих методів призначена для розв'язання задач пошуку мінімуму, тому для зручності задачі максимізації зводять до задач мінімізації, змінюючи знак цільової функції $y = f(x)$ на протилежний. Математичну постановку задачі оптимізації можна задати наступним чином: потрібно знайти такий набір елементів x_i із множини допустимих рішень D, при якому забезпечується екстремальне значення цільової функції $F(x_1,...,x_n)$, тобто $F(x_1,...,x_n) \to ext$ (min, max), $x_i \in D$, $i = 1,...,n$ [1, 2].

Пошук точок локального екстремуму функцій багатьох змінних за допомогою необхідних і достатніх умов екстремуму називають непрямим методом. До недоліків непрямого методу слід віднести необхідність розв'язання системи рівнянь, яку отримують в результаті прирівнювання градієнта до нуля, тому в більшості практичних задач застосовують прямі (пошукові) методи [3].

Розв'язання задачі мінімізації функцій багатьох змінних прямими методами пов'язане зі знаходженням послідовності точок, які задовольняють умові $f(x^{k+1}) < f(x^k)$, $k = 0, 1, ..., n.$ При цьому пошук мінімуму $x*$ починається у довільно вибраній точці x^0, а наступні точки послідовності знаходять за формулою [4]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + l^{(k)} d^{(k)}, \tag{1}$$

де $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$ – поточна та наступна точки; $l^{(k)}$ – довжина кроку; $d^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$ – напрямок переходу з точки $x^{(k)}$ в точку $x^{(k+1)}$ (градієнт); k – номер ітерації.

Метою даної роботи є аналіз двох пошукових методів оптимізації, які мають назву метод Нелдера-Міда (деформованого симплекса) та Коші (найшвидшого спуску).

Результати дослідження

Метод Нелдера-Міда. В основу методу деформованого багатогранника (симплекса) покладена побудова послідовності $k = 1, 2, ...,$ систем точок $x^i(k)$, $i = 1, ..., n+1$, які є вершинами опуклого багатогранника. Точки системи $x^i(k+1)$ співпадають з точками системи $x^i(k)$, крім точки $x^h(k)$, яка є найгіршою в системі $x^i(k)$, і яку на $k+1$ ітерації замінюють по спеціальним правилам (рис. 1). У процесі виконання цих правил багатогранник змінює свої розміри, що і обумовило назву методу. Побудова послідовності закінчується, коли значення функції у вершинах поточного багатогранника відрізняються від значення функції в центрі симплексу не більше, ніж на деяку задану величину ε .

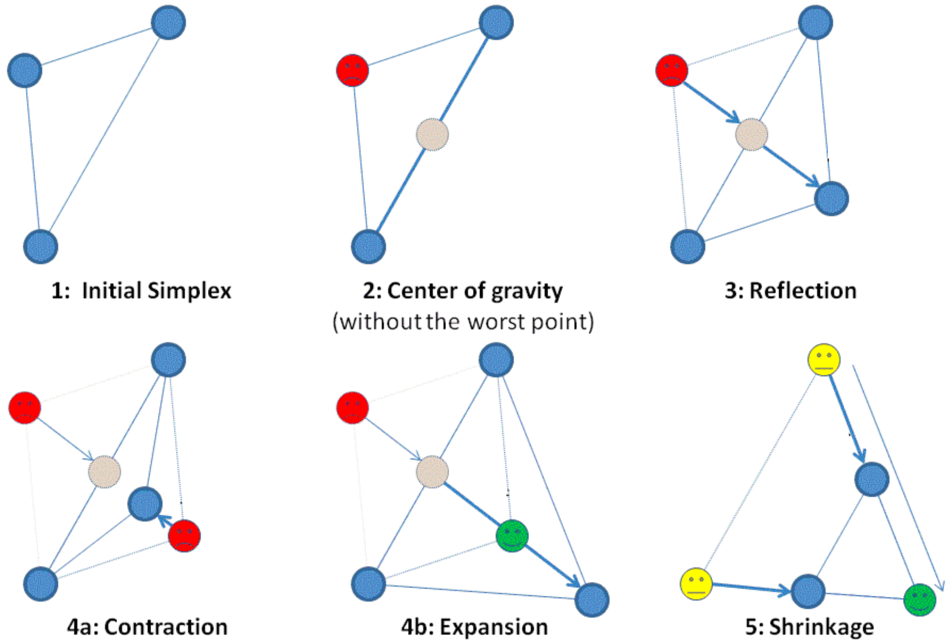

Рисунок 1 — Побудова нового симплексу та операції над ним

Метод використовує важливу властивість симплексу, згідно з яким новий симплекс можна побудувати на будь-якій грані початкового симплексу шляхом переносу вибраної вершини на належну відстань уздовж прямої, проведеної через центр інших вершин початкового симплексу. Отримана таким чином точка є вершиною нового багатогранника, а вибрана при побудові вершина початкового симплексу виключається [1, 4].

Алгоритм має декілька очевидних переваг: простота обчислень, відповідно програма на ЕОМ є відносно короткою; невисокі вимоги до пам'яті комп'ютера (використовується порівняно невелика кількість параметрів: координати початкової точки, коефіцієнти відображення, стиснення і розтягу, параметри закінчення пошуку). Перераховані фактори характеризують метод пошуку за симплексом дуже корисним при проведенні обчислень в реальному часі. Але також існує низка недоліків: алгоритм працює надто повільно, оскільки отримана на попередніх ітераціях інформація не використовується для прискорення пошуку; не існує простого способу розширення симплексу, що не вимагає перерахунку значень цільової функції у всіх точках; можливе зациклювання алгоритму, наприклад, якщо зустрічається область з вузьким «яром» або «хребтом» [4-6].

Метод Коші. У методі найшвидшого спуску пошук точки мінімуму функції проводиться в напрямку найшвидшого зменшення цієї функції (в напрямку антиградієнта). Пошук починають в довільній точці $x^{(0)}$, а наступні точки послідовності знаходять за формулою

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - l^{(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right), \tag{2}$$

де довжина кроку $l^{(k)}$ визначається як результат розв'язання задачі мінімізації функції

$$\varphi\left(l^{(k)}\right) = f\left(x^{(k)} - l^{(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right)\right) \to \min \tag{3}$$

відносно параметра $l^{(k)}$.

Для пошуку оптимальної довжини кроку $l^{(k)}$ можуть бути використані необхідні і достатні умови мінімуму функції $\varphi\left(l^{(k)}\right)$, або будь-який метод одновимірної мінімізації функцій. Пошук закінчують, коли норма градієнта $\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|$ стає меншою деякої малої величини ε [1, 4].

Метод найшвидшого спуску є достатньо потужним інструментом вирішення задач оптимізації. Практика показує, що він часто вимагає меншої кількості операцій, ніж градієнтний метод з постійним кроком. Але у загальному теоретична швидкість збіжності методу Коші не вище швидкості збіжності градієнтного методу з постійним (оптимальним) кроком. Недоліками даного методу є необхідність вирішувати одновимірну задачу оптимізації, а також обмежена область застосування [7, 8].

Висновки

У роботі наведено постановку задачі оптимізації та виконано аналіз пошукових методів оптимізації Нелдера-Міда (деформованого багатогранника або симплекса) та Коші (найшвидшого спуску). Слід зазначити, що ні один метод або клас методів не відрізняється високою ефективністю при вирішенні оптимізаційних задач різних типів. Зокрема, можливі випадки, коли відбувається переповнення пам'яті ЕОМ; в інших ситуаціях обчислення значень цільової функції вимагає надмірних витрат часу; в деяких завданнях потрібно отримати дуже точне рішення. Таким чином, інженер змушений налаштовувати кожний метод до певної конкретної задачі. Пошук рішення завжди залишається мистецтвом, якому можна навчитися лише шляхом проб і помилок, застосовуючи різні методи для вирішення конкретних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2005. – 544 с.
2. Гладких Б.А. Методы оптимизации и исследование операций для бакалавров информатики. Часть II. Нелинейное и динамическое программмирование: учебное пособие / Б.А. Гладких. — Томск: Издательство НТЛ, 2011. – 264 с.
3. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.
4. Іванов Ю.Ю. Методи штучного інтелекту та наука про дані: лекції, алгоритми та задачі / Ю.Ю. Іванов. – Вінниця, 2018. – 104 с. – Режим доступу: https://iq.vntu.edu.ua/method/read_url.php?tbl_num =2&url=/fdb/1166/Artificial_Intelligence_by_Ivanov.djvu.
5. Кузьмін І.В. Методи оптимізації складних систем: навчальний посібник / І.В. Кузьмін, М.М. Биков, С.М. Москвіна. – Вінниця: ВДТУ, 2003. – 165 с.
6. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
7. Полак Е. Численные методы оптимизации / Е. Полак. – М., 1974. – 376 с.
8. Корнеенко В.П. Методы оптимизации / В.П. Корнеенко. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.

Маліцький Юрій Олександрович — студент групи 1СІ-15б, факультет комп'ютерних систем і автоматики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Кривогубченко Сергій Григорович — канд. техн. наук, доцент кафедри автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Іванов Юрій Юрійович — канд. техн. наук, старший викладач кафедри автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: Yura881990@i.ua.

Malitskiy Yuriy O. — student, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Krivogubchenko Sergiy G. — Cand. Sc. (Eng), Docent, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Ivanov Yurii Yu. — Cand. Sc. (Eng), Senior Lecturer, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Yura881990@i.ua.