УДК 004.89

Н. В. Івчук
Д. Ю. Руснак
Ю. Ю. Іванов

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА МЕТОДОМ ЛІТТЛА

Вінницький національний технічний університет

Анотація
У даній роботі проаналізовано задачу комівояжера та метод пошуку квазіоптимального рішення Літтла-Мурті-Суїні-Керолла, який базується на стратегії «розділяй та володарюй».
Ключові слова: оптимізація, задача комівояжера, гамільтоновий цикл, метод гілок та меж, метод Літтла-Мурті-Суїні-Керолла, квазіоптимальне рішення.

Abstract
In this paper is analyzed the salesman task and the Little-Murty-Sweeney-Karel method, based on the "divide and conquer" strategy, for finding quasi-optimal solution.
Keywords: *optimization, traveling salesman task, Hamiltonian cycle, branch and boundary method, Little-Murty-Sweeney-Karel method, quasi-optimal solution.*

Вступ

Метрична задача комівояжера полягає у знаходженні найвигіднішого маршруту x (гамільтонового циклу на графі), який проходить через вказані міста хоча б по одному разу з поверненням у вихідне місто. Вершини графа відповідають містам, а ребра (i, j) між вершинами i та j – шляхи сполучення цих міст. Якщо задача розглядається на площині, то обчислюється евклідова відстань між парами міст у певному маршруті з урахуванням умови замкнутості. Маршрут комівояжера, який задовольняє умову задачі, задається наступною перестановкою цілих чисел $x = \{(j_1, j_2), (j_2, j_3), (j_3, j_4), ..., (j_N, j_1)\}$. Кожному маршруту x ставиться у відповідність функція вартості (довжина) [1]

$$f(x) = L(j_1, j_2) + L(j_2, j_3) + L(j_3, j_4) + ... + L(j_N, j_1), \tag{1}$$

де $L(j_i, j_k)$ – елементи матриці суміжності.

Слід зазначити, що з погляду обчислювальної складності, задача комівояжера відноситься до *NP*-важких, тобто її перебірна складність не дозволяє знаходити точне рішення для великої кількості вершин графа за прийнятний час, навіть при введенні деяких обмежень. Тому застосовують методи, які визначають певний квазіоптимальний маршрут (можливо, зовсім не найкращий, але близький до нього). Часто дану задачу зводять до задачі цілочисельного лінійного програмування, для вирішення якої використовується метод гілок та меж, який базується на стратегії «розділяй та володарюй» [2-5]. Внаслідок того, що в процесі роботи деякі рішення не розглядаються, метод гілок і меж не може гарантувати знаходження точного рішення задачі. Відкинуте на початковому етапі «невигідне» рішення може опинитися врешті-решт кращим. Загалом вважається універсальним методом, оскільки добре підходить для рішення асиметричної задачі комівояжера, тоді як інші методи пристосовані в основному для вирішення симетричної задачі [5].

Групою авторів (Дж. Літтл, К. Мурті, Д. Суїні, К. Керолл) була запропонована модифікація методу гілок і меж, розроблена спеціально для розв'язання задачі комівояжера. Згодом вона отримала назву «метод Літтла» (за прізвищем першого автора наукової праці) [6].

Метою роботи є аналіз методу Літтла-Мурті-Суїні-Керолла для пошуку квазіоптимального рішення задачі комівояжера, який є універсальним вдосконаленим методом повного перебору з послідовним відсівом рішень, що здаються невигідними.

Результати дослідження

Алгоритм Літтла-Мурті-Суїні-Керолла можна сформулювати у вигляді наступних правил [6]:

Крок 1. Знайти матрицю найкоротших відстаней L із кожної вершини в іншу за алгоритмом Флойда-Уоршалла або Дейкстри [3, 5].

Крок 2. Знаходимо в кожному рядку матриці відстаней L мінімальний елемент і віднімаємо його від усіх елементів відповідного рядка. Отримаємо матрицю, приведену по рядках. Якщо в матриці, яка приведена по рядках, існують стовпці, що не містять нуля, то приводимо її по стовпцях.

Крок 3. Знаходимо суму значень мінімальних елементів, тобто визначаємо константу приведення, яка буде нижньою межею множини всіх допустимих гамільтонових циклів.

Крок 4. Для кожного нульового елемента приведеної матриці розрахуємо степінь нульового елемента. Для цього нуль в матриці замінюємо на знак «*» і знаходимо суму мінімальних елементів рядка і стовпця, які відповідають цьому нулю.

Крок 5. Вибираємо ребро (i_0, j_0), для якого степінь нульового елемента досягає максимального значення.

Крок 6. Розбиваємо множину всіх гамільтонових циклів Ω^0 на дві підмножини $\Omega^1_{i_0 j_0}$ і $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$. Підмножина $\Omega^1_{i_0 j_0}$ включає в себе ребро (i_0, j_0), а $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$ його не містить. Для отримання матриці вартості для підмножини $\Omega^1_{i_0 j_0}$ викреслюємо стрічку i_0 та стовпець j_0. Щоб не допустити виникнення негамільтонового циклу, потрібно знайти стрічку i і стовпець j без знака «∞», та на їх перетині поставити «∞».

Крок 7. Приводимо матрицю гамільтонових циклів $\Omega^1_{i_0 j_0}$ та розраховуємо нижню межу даної множини $\varphi(\Omega^1_{i_0 j_0})$. Аналогічні дії виконуємо для множини гамільтонових циклів $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$.

Крок 8. Виконуємо приведення матриці гамільтонових циклів $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$ та обчислюємо нижню межу даної множини $\varphi(\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}})$.

Крок 9. Порівнюємо нижні межі підмножин гамільтонових циклів $\Omega^1_{i_0 j_0}$ і $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$. Якщо $\varphi\left(\Omega^1_{i_0 j_0}\right) < \varphi\left(\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}\right)$, то подальшому галуженню підлягає множина $\Omega^1_{i_0 j_0}$, інакше – $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$. Процес розбиття множин на підмножини супроводжується побудовою дерева розгалужень.

Крок 10. Якщо в результаті розгалужень отримуємо матрицю 2×2, то визначаємо гамільтоновий цикл, який отримано розгалуженням, та розраховуємо його довжину $f(x)$.

Крок 11. Порівнюємо довжину гамільтонового циклу $f(x)$ з нижніми межами обірваних гілок. Якщо довжина $f(x)$ не перевищує їхніх нижніх меж, то задача вирішена. В іншому випадку розбиваємо гілки підмножин з нижньою межею, меншою отриманого шляху, до тих пір, поки не отримаємо маршрут з меншою довжиною або не переконаємося, що такого не існує.

Зазвичай необхідно повторити алгоритм для n-2 рівнів (етапів) дерева, де n – кількість пунктів у задачі комівояжера. Задовільних теоретичних оцінок даного алгоритму немає, але практика показує, що на сучасних ЕОМ він дозволяє знайти оптимальний розв'язок задачі комівояжера для графів з кількістю вершин $n \leq 100$ [7, 8].

Висновки

У роботі розглянуто ефективну евристичну процедуру Літтла-Мурті-Суїні-Керолла для пошуку квазіоптимального рішення задачі комівояжера, а також представлено алгоритм, який можна реалізувати у програмному забезпеченні.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Мудров В.И. Задача о коммивояжёре / В.И. Мудров. – М., 1969. – 62 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический поход / Н. Кристофидес. – М., 1978. – 360 с.
3. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб., 2001. – 384 с.
4. Ерзин А.И. Задачи маршрутизации / А.И. Ерзин, Ю.А. Кочетов. – Новосибирск, 2014. – 95 с.

5. Іванов Ю.Ю. Методи штучного інтелекту та наука про дані: лекції, алгоритми та задачі / Ю.Ю. Іванов. – Вінниця, 2018. – 104 с. – Режим доступу: https://iq.vntu.edu.ua/method/read_url.php?tbl_num=2&url=/fdb/1166/Artificial_Intelligence_by_Ivanov.djvu.

6. An Algorithm for the Traveling Salesman Problem / Operations Research // J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel. – 1963. – V. 11. – № 6. – P. 972-989.

7. Базилевич Р. Дослідження ефективності існуючих алгоритмів для розв'язання задачі комівояжера / Вісник НУ «Львівська політехніка» // Р. Базилевич, Р. Кутельмах. – 2009. – С. 235-245.

8. Костюк Ю.Л. Эффективная реализация алгоритма решения задачи коммивояжера методом ветвей и границ / Ю.Л. Костюк // Прикладная дискретная математика. Вычислительные методы в дискретной математике. – 2010. – №2. – С. 78-90.

Івчук Наталія Володимирівна — студентка магістратури, факультет комп'ютерних систем і автоматики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Руснак Дмитро Юрійович — студент групи І-15б, факультет комп'ютерних систем і автоматики, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця.

Іванов Юрій Юрійович — канд. техн. наук, старший викладач кафедри автоматизації та інтелектуальних інформаційних технологій, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, e-mail: Yura881990@i.ua.

Ivchuk Natalia V. — student, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia

Rusnak Dmytro Yu. — graduate student, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia.

Ivanov Yurii Yu. — Cand. Sc. (Eng), Senior Lecturer, Faculty of Computer Systems and Automation, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, e-mail: Yura881990@i.ua.