

АНАЛІЗ МЕТОДІВ КРУГОВОЇ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

Романюк О., д.т.н, професор
Вінницький національний технічний університет

Романюк О., к.т.н., доцент
Вінницький національний технічний університет

Величко М., студент
Вінницький національний технічний університет

Дуги кіл, як і відрізки прямих, відносять до найбільш поширених графічних примітивів [1-6]. Існує декілька методів [2] завдання вихідних даних для кругового інтерполювання. Найчастіше вказують напрямок руху (за чи проти годинникової стрілки), прирости координат початкової та кінцевої точки дуги кола відносно його центру, а також координати початкової точки дуги в екранній системі координат (рис. 1).

При реалізації колового інтерполювання необхідно враховувати:

1. Коло є симетричною фігурою, що дозволяє суттєво скоротити час обчислення, оскільки для отримання всіх точок кола досить сформулювати їх лише для одного октанта.
2. Необхідно проводити аналіз переходу через границі октантів, оскільки при цьому змінюється напрямлення крокових приростів (рис. 2).
3. За рахунок похибки інтерполювання, а також округлень при визначенні початкової та кінцевої точок дуги існує ймовірність не попадання в кінцеву точку дуги, що обумовлює необхідність ведення в обчислювальний процес режиму доведення [1, 2] в кінцеву точку дуги.

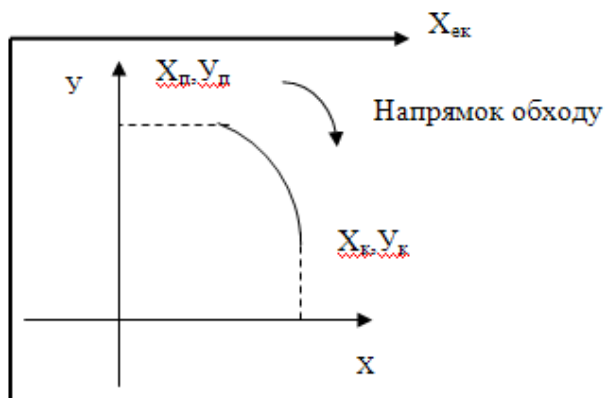


Рис. 1. Завдання дуги кола

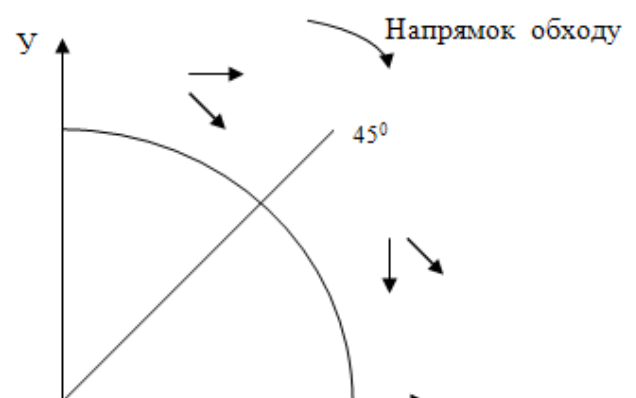


Рис. 2. Типи крокових приростів

Однією з можливих форм опису кола є завдання її в полярній системі координат [2]

$$X = X_c + R \cos Q, Y = Y_c + R \sin Q,$$

IMPACT OF MODERNITY ON SCIENCE AND PRACTICE

де X_c, Y_c - координати центра кола, R - радіус кола, Q - полярний кут.

Оскільки для обчислення координат точок кола X, Y необхідно задавати дискретні значення полярного кута, то виникає задача раціонального вибору кроку приросту цього кута - ΔQ . При малому кроці час побудови кола збільшується, але забезпечується висока точність відтворення кола. При великому значенні ΔQ якість відтворення погіршується, але час побудови зменшується.

Виходячи з дискретної структури растра, можна стверджувати, що мінімальна відстань між сусідніми точками кола не може бути меншим від 1. Отже всі точки кола, без пропусків, будуть відтворені, за умови, що крок приросту полярного кута обиратиметься із умови: $\Delta Q = 1 / R$.

Для скорочення часу формування кола із обчислювальної процедури бажано виключити громіздке обчислення тригонометричних функцій $\cos Q$ і $\sin Q$. Для цього обчислимо чергову $i+1$ точку кола у вигляді:

$$X_{i+1} = R \cos(Q + \Delta Q), \quad Y_{i+1} = R \sin(Q + \Delta Q).$$

Після заміни отримаємо:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_c + (X_i - X_c) \cos \Delta Q - (Y_i - Y_c) \sin \Delta Q, \\ Y_{i+1} &= Y_c + (X_i - X_c) \sin \Delta Q - (Y_i - Y_c) \cos \Delta Q. \end{aligned}$$

Отримані рекурентні співвідношення для даного підходу забезпечують максимальну швидкість обчислень, так як значення $\sin \Delta Q$ і $\cos \Delta Q$ розраховуються лише один раз.

Одними з найбільш ранніх методів, запропонованих для відтворення кіл, є методи, засновані на рішенні диференціальних і різницевих рівнянь із застосуванням цифрових інтеграторів [1].

Велика похибка інтерполяції обмежує їх застосування, незважаючи на простоту реалізації інтерполятора. Слід також зауважити, що важливою особливістю методів, заснованих на застосуванні цифрових інтеграторів, є сталість швидкості кругового руху точки по дузі кола для різних радіусів. При цьому кола різних радіусів реалізується за однаковий час, що в деяких випадках може призводити до істотного зменшення продуктивності інтерполятора. Підвищення продуктивності інтерполятора пов'язано з його ускладненням.

Згідно прямого методу [2] координати точок траєкторії кола визначаються з використанням виразу виду:

$$\tilde{O}^2 + \acute{O}^2 = R^2$$

де \tilde{O}, \acute{O} - поточні точки кола, а R - його радіус. При $\tilde{O} \geq \acute{O}$ значення абсциси послідовно збільшують на одиницю, а ординату обчислюють по формулі $\acute{O} = \sqrt{R^2 - \tilde{O}^2}$, а при $\tilde{O} < \acute{O}$ для поточного \acute{O} обчислюють значення $\tilde{O} = \sqrt{R^2 - \acute{O}^2}$. Похибка інтерполювання визначається кількістю розрядів, відведених для обчислення, а також способом округлення. Відносна складність обчислень суттєво обмежує застосування приведених методів.

Круговий інтерполятор з використанням постійної пам'яті [1] апроксимує дугу кола за допомогою лінійної інтерполяції [1]. Недоліками такого інтерполятора є:

необхідність досить великої кількості ділянок апроксимації для забезпечення високої точності. що призводить до наявності постійної пам'яті досить великої ємності; наявність похибок за рахунок апроксимації дуги ламано.; необхідність в корекції накопиченої похибки.

Для реалізації функції колового інтерполювання найбільш часто використовують метод оцінювальної функції. Вид оцінювальної функції вибирають таким чином, щоб всередині та за колом вона мала протилежні знаки, а на самому колі - нульове. Таким вимогам відповідає функція виду:

$$U_{ij} = X^2 + Y^2 - R^2.$$

При $U \geq 0$ (рис. 1.11) виконують інтерполяційний крок вздовж осі Y , а при $U < 0$ - вздовж осі X . Після кроку по осі X нове значення оцінювальної функції знаходять, підставляючи в формулу для U_{ij} замість X_i величину $X_{i+1} = X_i + 1$.

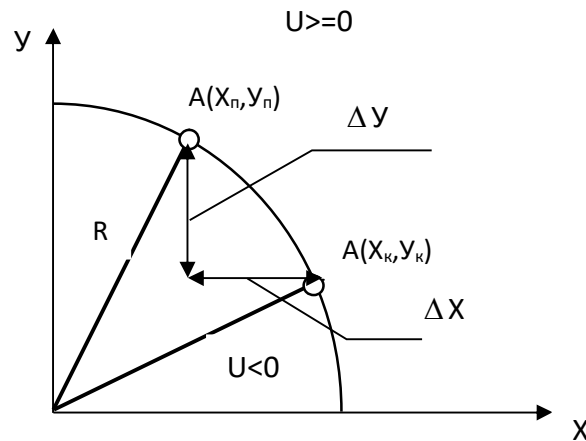


Рис. 3. Принцип формування оцінювальної функції

Тоді

$$U_{i+1,j} = (X_i + 1)^2 + Y_i^2 - R^2 = X^2 + Y^2 - R^2 + 2X_i + 1 = U_{ij} + 2X_i + 1.$$

Після кроку по осі Y нове значення оцінювальної функції можна визначити, підставивши у формулу для U_{ij} замість Y_i величину.

$$Y_{i+1} = Y_i - 1$$

Тоді значення оцінювальної функції після кроку по осі Y , буде дорівнювати:

$$U_{i+1,j} = X_i + (Y_i - 1) - R^2 = U_{ij} - 2Y_i + 1.$$

Таким чином, після кроку по осі X до значення оцінювальної функції необхідно додати величину $2X_i + 1$, а після кроку по осі Y величину $-2Y_i + 1$. Таким чином, у будь-якому випадку додається одиниця і прямиий чи доповняльний код величин $2X_i, 2Y_i$. Після цього необхідно скорегувати значення X_i, Y_i для одержання $X_{i+1} = X_i + 1, Y_{i+1} = Y_i - 1$