Окремі теореми геометрії про колінеарність трьох точок на площині та їх застосування при розв`язуванні задач

Робота учнів

Подільського науково-технічного ліцею для обдарованої молоді

Воронецького Івана
Івасюка Володимира
Андріяша Максима
Янчука Дмитра
Безкревного Олексія
Весельської Софії
Денисевича Кирила
Рущак Олександри

Керівник: Попова Ірина Василівна
Вчитель математики ПНТЛОБМ

Вінниця - 2020

АНОТАЦІЯ

Тема дослідження: «Окремі теореми геометрії про колінеарність трьох точок на площині та їх застосування при розв`язуванні задач»
Роботу виконували:
Воронецького Іван
Івасюк Володимир
Андріяш Максим
Янчук Дмитро
Безкревний Олексій
Весельська Софія
Денисевич Кирило
Рущак Олександра
Науковий керівник: Попова Ірина Василівна
В роботі було систематизовано теореми Менелая, Дезарга, Паппа, Паскаля, Ньютона, Гаусса, Монже і Сімсона. А також показано можливі їх застосування при розв`язуванні задач. Для окремих теорем були знайдені оригінальні способи доведення, відміні від загальноприйнятих. Були розроблені авторські задачі, які можна запропонувати учням на математичних олімпіадах різного рівня. При розв`язуванні цих задач є доцільним використання вище згаданих теорем.
Метою роботи було показати актуальність використання даних теорем при розв`язуванні олімпіадних задач. А також показати інтелектуально-емоційну складову такої науки як геометрія та переконати усіх, що красивий роз`язок задачі може приносити естетичне задоволення.
Результативність роботи: завдячуючи досвіду отриманому і знанням, отриманим при роботі над даною темою, були забезпеченні наші перемоги в олімпіадах різного рівня.
Робота може бути корисною учням та вчителям, які готуються до олімпіад з математики різного рівня.
Ключові слова: Теорема Менелая, теорема Дезарга, пряма Ньютона-Гауса, теорема Паппа, пряма Сімсона.

Summary: *The project organises theorems of Menelaus, Desargues, Pappus, Passcal, Newton, Gauss, Monge, and Simson. It also shows how these theorems may be used while solving mathematical problems. Some extraordinary ways were found to prove some theorems. Some original mathematical problems were created. Now they can be given to pupils at mathematical competitions of different levels. In order to solve the problems it's reasonable to use the above-mentioned theorems.*

The goal of the project is to show the significance of using these theorems while solving problems at competitions. It also shows that geometry deals not only with intelligence but with emotions as well and it shows everyone that unusual solutions of problem can bring c enjoyment.

The result of the project: thanks to the experience and knowledge that we gained after working on this project, we were sure to win the competitions of different levels.

The project can be used by pupils and teachers who are studying for the competitions of different levels.

ЗМІСТ

I. ВСТУП

З точки зору вчителя

Сучасне суспільство формує соціальне замовлення системі освіти: в епоху інформаційних технологій випускник школи, як майбутній мешканець інформаційного суспільства, повинен вміти реалізувати свої здібності і успішно організувати свою діяльність.

Він має вміти не просто повторювати певний алгоритм дій, а й проявляти творчість, креативність та нестандартність. Тільки така особистість матиме всі шанси для повної самореалізації.

Одним з основних завдань вчителя на сьогодні є не просто зацікавити учня у вивченні предмету, а й стимулювати його пізнавальну і творчу активність, бажання знаходити щось нове, пропонувати свої ідеї, своє бачення розв`язання тієї чи іншої проблеми.

На сьогодні головним принципом сучасного освітнього процесу є принцип активності, творчості і свідомості. Ми маємо прагнути виховати у своїх учнів такі якості як:

- самостійність -

не вчитель відповідає за учня, а учень, аналізуючи, усвідомлює свої можливості, сам робить свій власний вибір, визначає міру активності і відповідальності в своїй діяльності;

- здатність швидко знаходити сміливі рішення –

учень усвідомлює, що він може зробити тут і зараз, щоб стало краще; у разі помилки або невдачі не впадає у відчай, а оцінює ситуацію і, виходячи з нових умов, ставить перед собою нові цілі і завдання і успішно вирішує їх.

- конкурентоспроможність -

учень вміє робити щось краще за інших, діяти в будь-яких ситуаціях більш ефективно .

Справжнє навчання - це індивідуально-творчий розвиток кожної дитини, яка відчуває себе активно діяльною лише за умови, коли пізнавальна праця у процесі навчання захопить її емоційну сферу. Щоб дитина охоче вчилася, її інтелектуальне життя ні в якому разі не повинне обмежуватися лише запам`ятовуванням, заучуванням та відтворенням знань з метою перевірки їх учителем.

Потрібно намагатися не просто створювати інтелектуальний фон запам`ятовування, заучування, збереження в пам`яті програмного матеріалу. Потрібно думати над тим, як зробити предметом мислення, аналізу, спостереження те, що в даний момент вивчається або незабаром вивчатиметься на уроках.

Важливо дотримуватись виключно важливої закономірності шкільного навчання, а саме: чим більшим обсягом знань учень оволодіває, тим більше повинні застосовуватися раніше здобуті знання. Без постійного застосування знань взагалі неможливе навчання в середніх і особливо в старших класах. Якщо знання тільки засвоюються, то наступає момент, коли вже більше нічого учень не може засвоїти. Природа дитячого мислення вимагає того, щоб знання були не тільки метою, але й засобом, інструментом, знаряддям, за допомогою яких здобуваються нові знання. У процесі навчання учень має виступати не пасивним «споживачем» знань, а активним дослідником, самостійним здобувачем знань, відкривачем істини. Одним із найкращих наукових «майданчиків» для цього може бути така наука, як геометрія. І не важливо над якою темою працює учень. Головне, щоб ця тема була для нього цікавою, захоплювала його емоційну сферу, спонукала до творчості. Окрім того, дуже добре, якщо над темою працює учень не сам. Коли тема, що зацікавила одного – зацікавлює інших. І учні самостійно організовуються в групу, розподіляють між собою роботу, докладають зусиль для успіху колективної праці.

« Надзвичайно важливо показати дітям їх особисту зацікавленість у придбаних знаннях, які можуть і повинні стати в нагоді їм в житті. А для цього необхідна проблема, взята з реального життя, знайома і значуща для дитини, для вирішення якої їй необхідно докласти вже наявні знання та нові знання, які ще належить придбати»

Джон Дьюї.

II. Актуальність вибраної теми

З точки зору учнів

Маючи певний досвід участі в математичних олімпіадах і розв`язуючи задачі з геометрії, ми зрозуміли, що програмних знань, які отримуємо на уроках іноді не достатньо. Зокрема при розв`язуванні задач, де потрібно довести належність трьох точок прямій. До цього типу також відносяться задачі, де потрібно довести, що деяка пряма проходить через дану точку. Це спонукало нас шукати ще якісь шляхи вирішення даної проблеми. В процесі пошуків, ми зрозуміли, що є ціла низка дуже цікавих теорем, які і допомагають у вирішенні вище названої проблеми. Так, можливо в окремих випадках. Але кожна «олімпіадна» задача і є цим окремим випадком, не схожим на інші.

Ми систематизували ці теореми і показали можливі їх застосування при розв`язуванні задач.

Можна вважати, що в основі усіх цих теорем лежить дуже відома учням зі шкільного курсу геометрії теорема Менелая. Чому так? Бо практично всі запропоновані вам теореми можуть бути доведені з допомогою теореми Менелая. Але ми хочемо показати вам, на нашу думку, більш оригінальні доведення даних теорем. Отже, вашій увазі пропонуються теореми Дезарга, Паскаля, Паппа, Монже, Ньютона-Гаусса, Сімсона та їх застосування при розв`язуванні задач. Сподіваємось, що наша робота буде для вас цікавою і стане в нагоді при підготовці до чергової олімпіади.

III. Окремі теореми планіметрії про колінеарність трьох точок на площині

1. Теорема Менелая

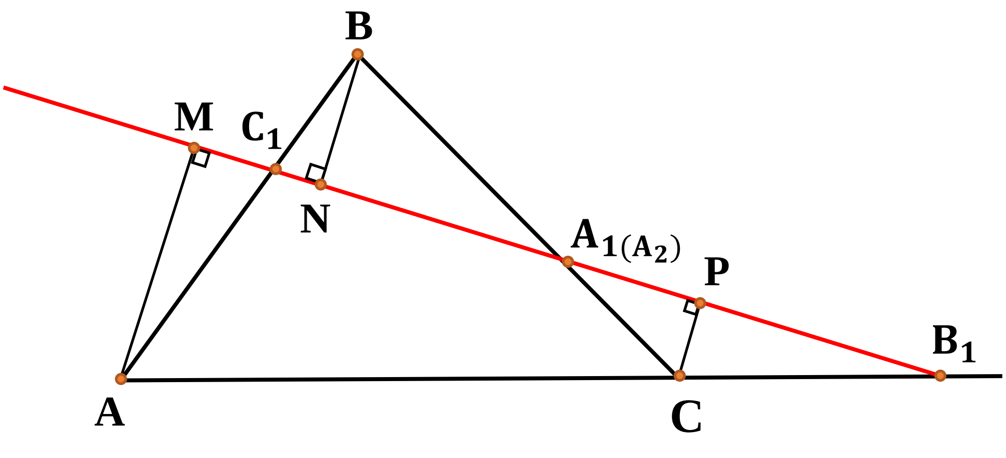
Менелай Олександрійський або Менелай з Александрії (Μενέλαος)
був грецьким математиком і астрономом.
Хоча й дуже мало відомо про життя Менелая, припускається, що він жив у Римі, куди він переїхав з Александрії. Менелаєм з Александрії його називали Папп Олександрійський та Прокл Діадох.
Головний твір Менелая — «Сферика» в трьох книгах. Його грецький оригінал втрачений, і зміст відомий завдяки арабським, а також подальшим повторним латинським та єврейським перекладам. Головним предметом «Сферики» є сферична геометрія. А для нас самим цікавим із цієї книги і є сама теорема, яку ми називаємо теорема Менелая.

Теорема Менелая є дуже важливою при вирішенні питання колінеарності трьох точок.
Вона лежить в основі практично усіх теорем, які будуть розглянуті в цій роботі.

<u>Теорема Менелая</u>

На сторонах *AB* і *BC* трикутника *ABC* взято відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони *AC* – точку B_1. Для того щоб точки A_1,B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно й достатньо, щоб виконувалась рівність: $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

<u>Доведення</u>



Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$ З вершин трикутника *ABC* опустимо перпендикуляр *AM, BN* і *CP* на пряму C_1.

Оскільки $\angle MC_1A=\angle NBC_1$, то $\Delta AMC_1 \sim \Delta BNC_1$ за двома кутами.

Звідси $\frac{AC_1}{A_1C}=\frac{AM}{BN}$.

З подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 маємо рівність $\frac{BA_1}{H_1C}=\frac{BN}{CP}$.

З подібності трикутників B_1CP і B_1AM маємо рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$.

З трьох отриманих пропорцій випливає, що

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1.$$

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$ то точки A_1, B_1, C_1 лежать на моїй прямій. Нехай пряма B_1C_1 перетинає сторону BC трикутника ABC у деякій точці A_2.

З доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$

Зіставляючи цю рівність з $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$, доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_1 і A_2 поділяють відрізок BC в одному і тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються.

Звідси випливає, що пряма B_1C_1 перетинає сторону BC у точці A_1.

■

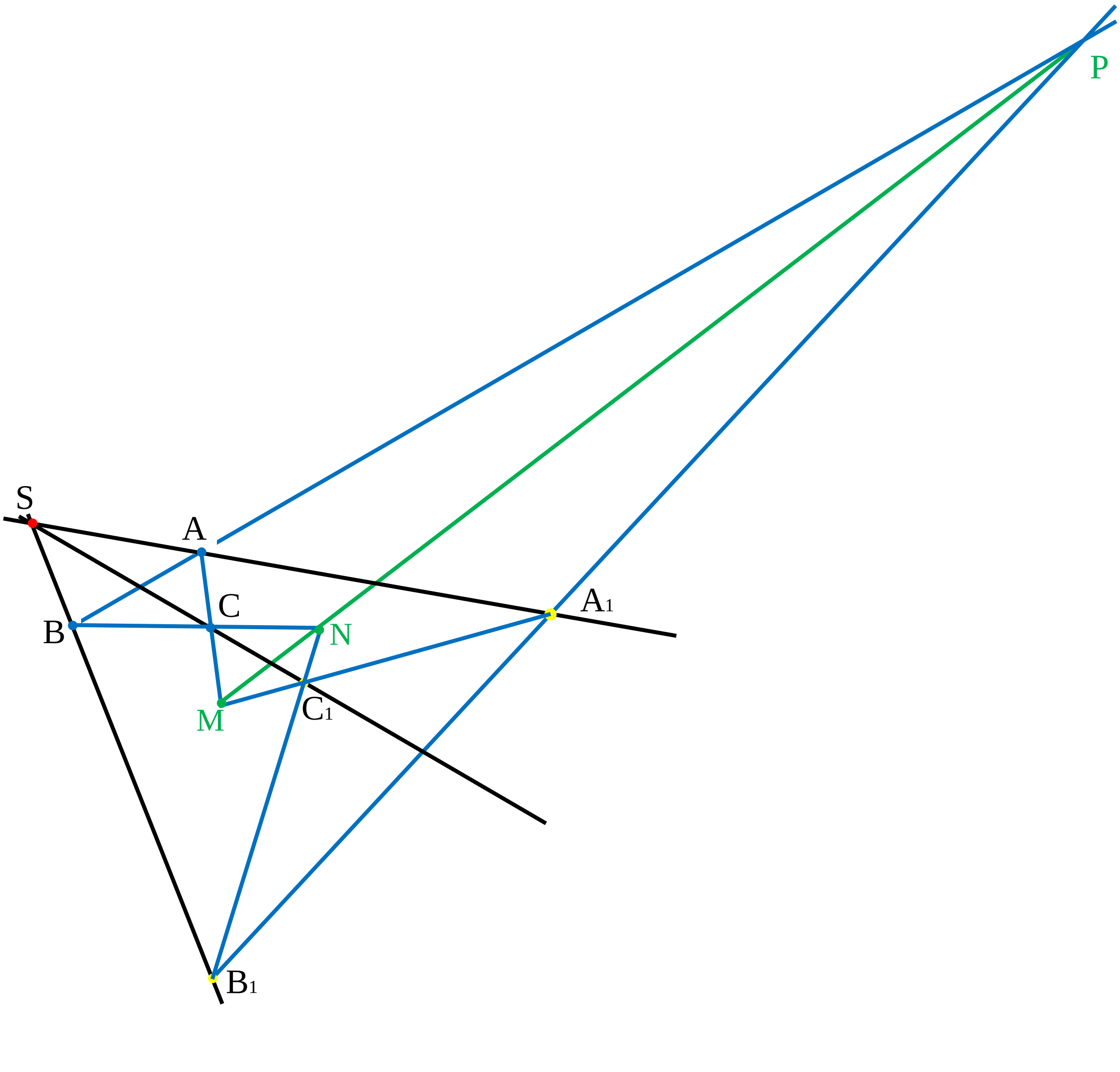
2. Теорема Дезарга

1591 – 1661

Французький вчений-математик, засновник нарисної та проективної геометрії. Жерар Дезарг був військовим інженером - будівельником. В своїх дослідженнях він системно застосовував зображення в перспективі. Дезарг першим ввів геометрію поняття нескінченно віддалених точок. Йому належить одна із основних теорем проективної геометрії — теорем Дезарга, а також твори про різьблення по каменю, про сонячні годинники, де він дав геометричні обґрунтування практичним операціям. Військовий фортифікатор і офіцер Жерар Дезарг після відставки заснував у Парижі приватну школу, де викладали теорію будівництва і математику для будівничих, ремісників, майстрів з виготовлення інструментів.

Теорема Дезарга :

Нехай прямі AA_1, BB_1, CC_1, що з'єднуючі відповідні вершини трикутників ABC та $A_1B_1C_1$, проходять через одну і ту ж точку S. Тоді три точки попарного перетину M, N, і P відповідних сторін AC і A_1C_1, BC і B_1C_1, AB і A_1B_1, лежать на одній прямій.



Доведення

Застосуємо стереометричний підхід до доведення даної теореми.
Уявімо собі, що даний малюнок (рис.1) є проекцією тривимірного малюнка(рис.2), а точніше тетраедра, з вершиною в точці S і основою A1B1C1, а площина (ABC) є перерізом даного тетраедра. Площини ABC і A1B1C1 перетинаються, а отже всі точки їх перетину на одній прямій .
Оскільки M, P і N є спільними точками цих площин, то вони лежань на прямій їх перетину. А оскільки самі точки лежать на одній прямій, то і їх проекції лежать на одній прямій.

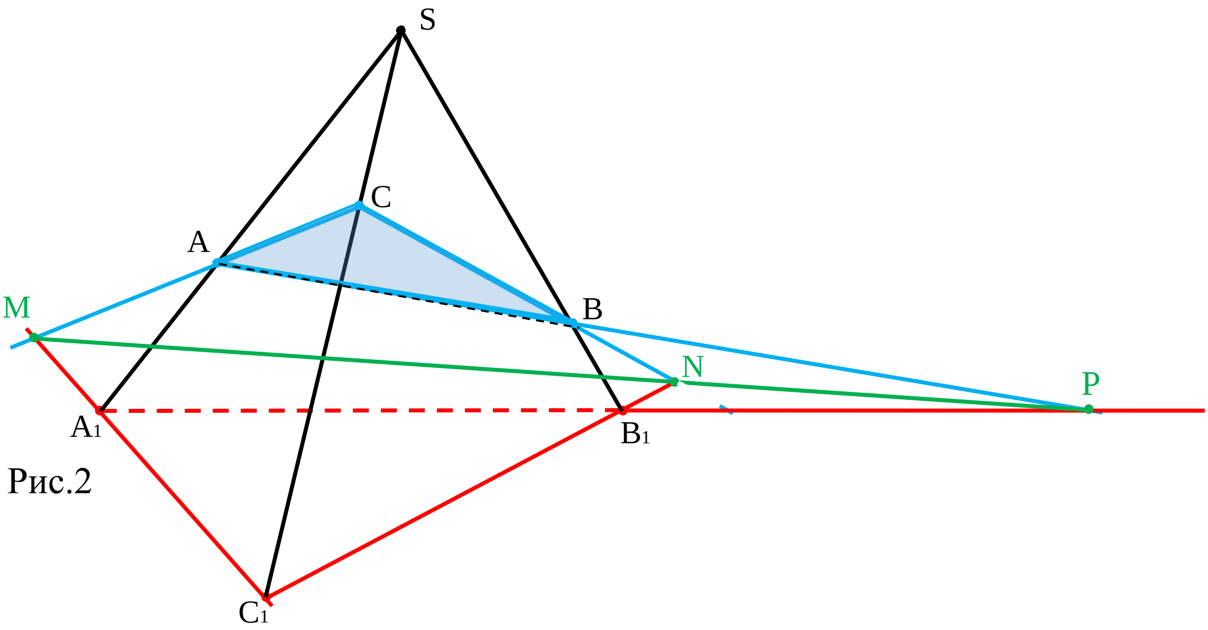


Рис.2

Теорема Дезарга має зміст, і якщо вершини трикутників лежать на паралельних прямих.

Задачі на застосування

На перший погляд може здатись, що теорема Дезарга не дуже зручна в застосуванні. Але це не так. В даних задачах ми покажемо, що теорема досить популярна, і її можна часто застосовувати.

Задача 1.
В довільний чотирикутник вписана трапеція так, що її основи паралельні одній з діагоналей чотирикутника. Довести що бічні сторони трапеції перетинаються на другій діагоналі чотирикутника.

Доведення

Нехай даний чотирикутник – ABCD а дана трапеція A1B1C1D1 (рис.3)
Розглянемо трикутники B1BA і C1D1C, вони є Дезарговими, оскільки
A1B1 || DB || D1C1 . Отже, точка перетину прямих B1C1 і A1D1 належить другій діагоналі, що треба було довести.

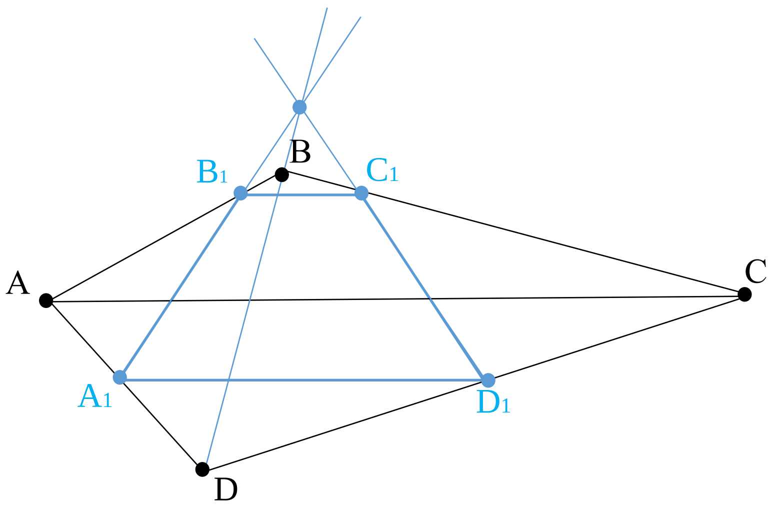
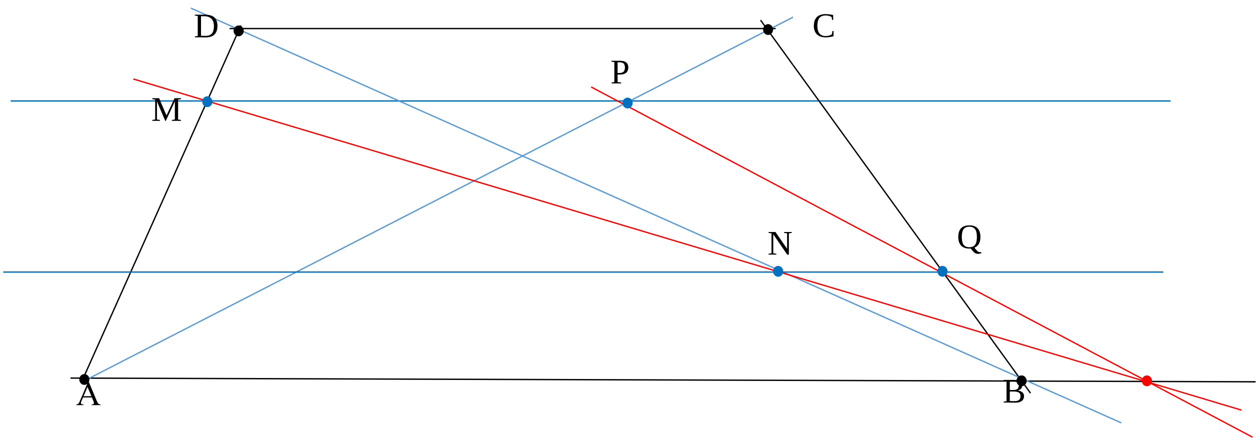


рис.3

Задача 2.
Прамі а та b при перетині з бічними сторонами трапеції ABCD (a та b паралельні основам AB та DC) утворили такі точки :
$a \cap AD = M$;
$a \cap AC = P$;
$b \cap BD = N$;
$b \cap BC = Q$.
Довести, що точка перетину прямих MN та PQ буде лежати на AB.

Доведення

Розглянемо трикутники DMN та CPQ, вони є дезарговими, бо відповідні вершини D і C, M і P, N і Q лежать на відповідних паралельних прямих.
Це означає, що точки перетину прямих $MD \cap CP = A$, $DN \cap CQ = B$, і MN та PQ лежать на одній прямій, що треба було довести.



Задача 3.
Дано дві прямі , що перетинаються в точці *S*, причому т.*S* лежить за межами малюнка . Точка *C* - будь-яка точка, яка не лежить на жодній із цих прямих. Побудувати пряму *CS*.

Роз'язання

Розв'язати задачу можна застосовуючи теорему Дезарга.
Побудова :

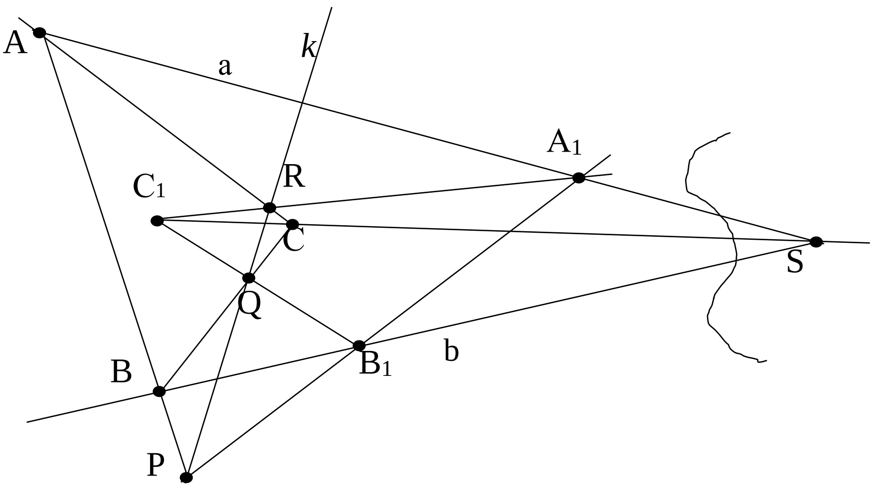
1.Позначимо дані прямі a і b та виберемо на них точки A і A_1 та B і B_1 відповідно так, щоб AB та A_1B_1 перетнулись в якійсь точці P.

2.Проведемо деяку пряму k, яка перетинає дані прямі a і b.

3.Точки перетину прямої k з прямими AC і BC позначимо R і Q відповідно.

4.Позначимо точку перетину прямих A_1R та B_1Q –т.C_1

5.Пряма CC_1 -шукана.



Доведення

Трикутники ARA_1 та BQB_1 є дезарговими , оскільки відповідні вершини A і B , R і Q, A_1 і B_1 лежать на прямих ,що перетинаються в одній точці P. Отже, за теоремою Дезарга для трикутників ARA_1 та BQB_1 точки перетину прямих AR і BQ, A_1R і B_1Q, AA_1 і BB_1 лежать на одній прямій, тобто точки C, C_1 та S – лежать на одній прямій.
Така пряма єдина.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача 1.

На сторонах трикутника як на діагоналях, побудовані паралелограми. Довести, що другі діагоналі перетинаються в одній точці (Застосовуючи теорему Дезарга).

Задача 2.

Пряма p лежить в площині трикутника ABC і перетинає сторони або продовження сторін; $K=BC\cap p$, $L=AC\cap p$,
$M=AB\cap p$, $R=BL\cap CM$, $S=CM\cap AK$, $T=AK\cap BL$.
Довести, що прямі AR, BS і CT перетинаються в одній точці.

Задача 3.

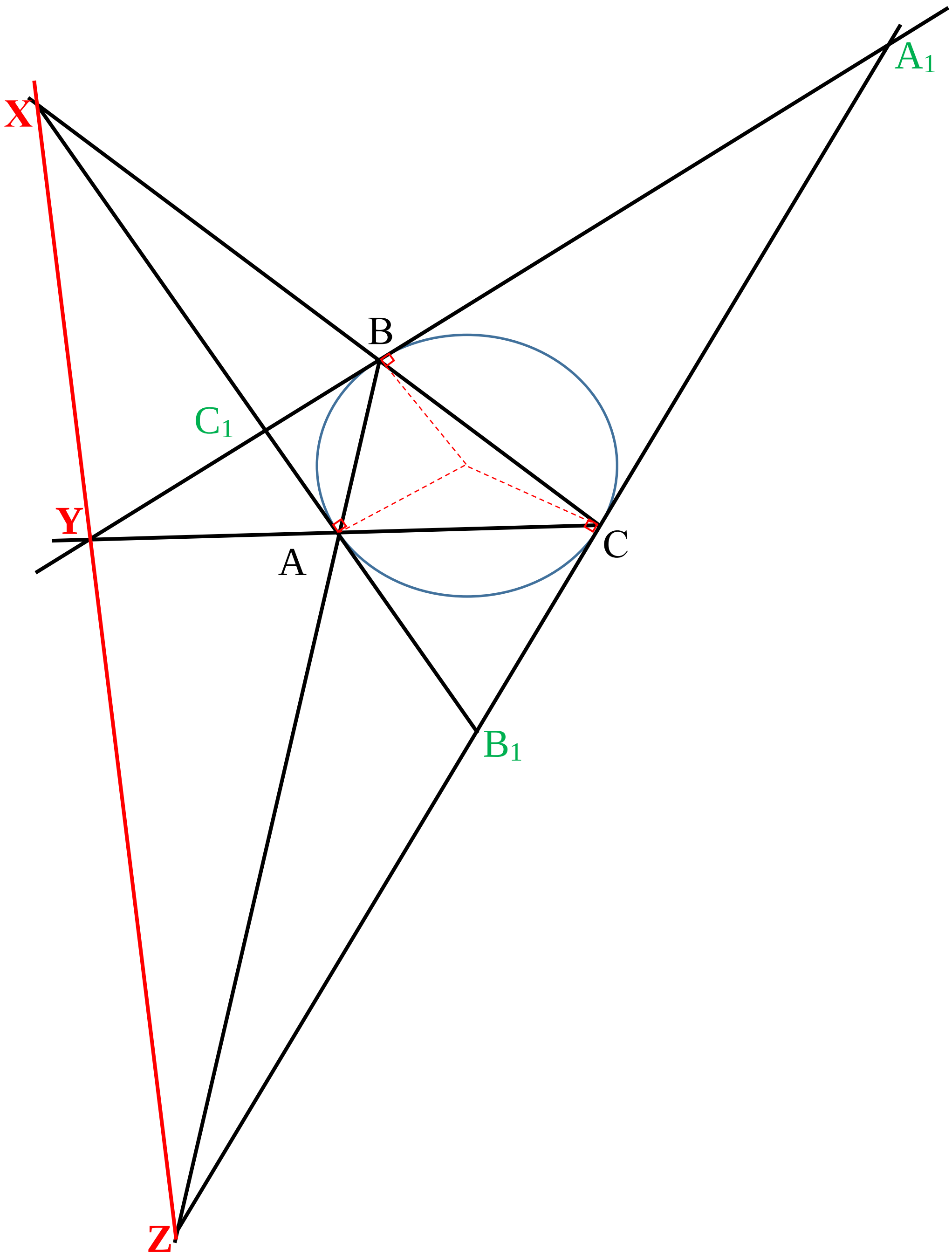
Дано $a\|b$, точка $C\notin a$, $C\notin b$. Побудувати пряму, паралельну даним, яка проходить через т.C, використовуючи тільки лінійку. (Ну і теорему Дезарга)

Задача 4.

Довести теорему Паскаля (для трикутника), застосовуючи теорему Дезарга.
Нехай Дано трикутник ABC, вписаний в коло. Нехай точка перетину дотичної до кола, проведеної через точку A, та прямої BC – це точка X , аналогічно дотична через точку B з AC – це точка Y та дотична через точку C з AB – це точка Z. Довести, що X, Y та Z лежать на одній прямій. (Рис.)

Доведення

Нехай дотична, проведена через точку A, перетинається з дотичною, проведеною через точку B, в точці C_1, аналогічно дотична через т. B та дотична через т. C перетнуться в т. A_1, а дотичні через т. A та дотична через т. C перетнуться в т. B_1. Тоді трикутники ABC і A1B1C1 є Дезарговими, бо прямі AA_1, BB_1 та CC_1 перетинаються в одній точці , а саме точці Жергона для трикутника A1B1C1 (точкою Жергона для трикутника ABC є точка перетину прямих, що сполучають вершити трикутника із точками дотику вписаного в даний трикутник кола та протилежними стронами даного трикутника). Тоді для даних трикутників (ABC і A1B1C1) за теоремою Дезарга – три точки попарного перетину



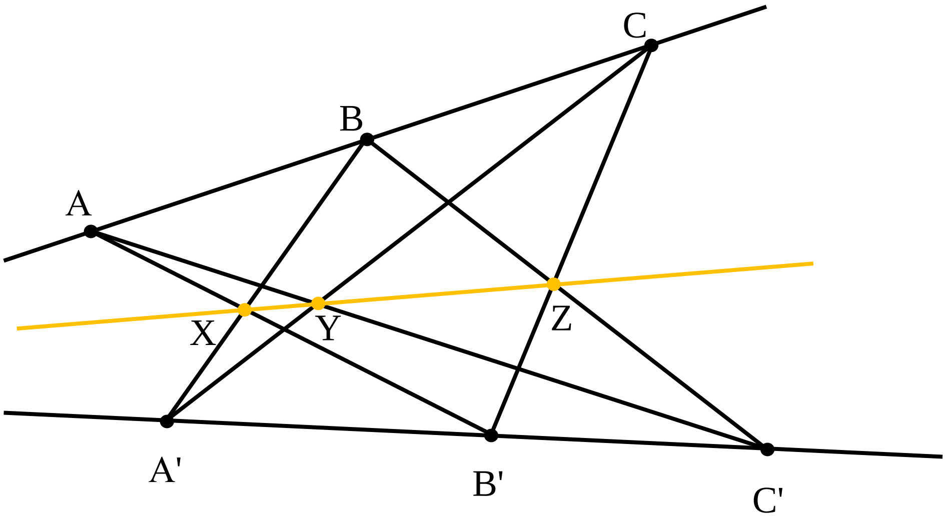
сторін AB та A_1B_1 – тобто т. Z, AC та A_1C_1 – тобто т. Y, BC та B_1C_1 – тобто т. X , лежать на одній прямій.

3. Теорема Паппа

Папп Олександрійський — математик і механік епохи пізнього еллінізму, що жив і працював в Александрії. Ні рік народження, ні рік смерті Паппа не відомі. Одні джерела відносять його діяльність до другої половини III століття, інші — до IV століття його вважають останнім геометром давнини та батьком проективної геометрії. Ось формулювання та доведення однієї з його теорем.

Теорема

Нехай A, B, C — три точки на одній прямій, A' , B' , C' — три точки на іншій прямій. Нехай три прямі AB' , BC' , CA' перетинають три прямі A'B, B'C, C'A, відповідно у точках X, Y, Z. Тоді точки X, Y, Z лежать на одній прямій. (рис.1)



Доведення

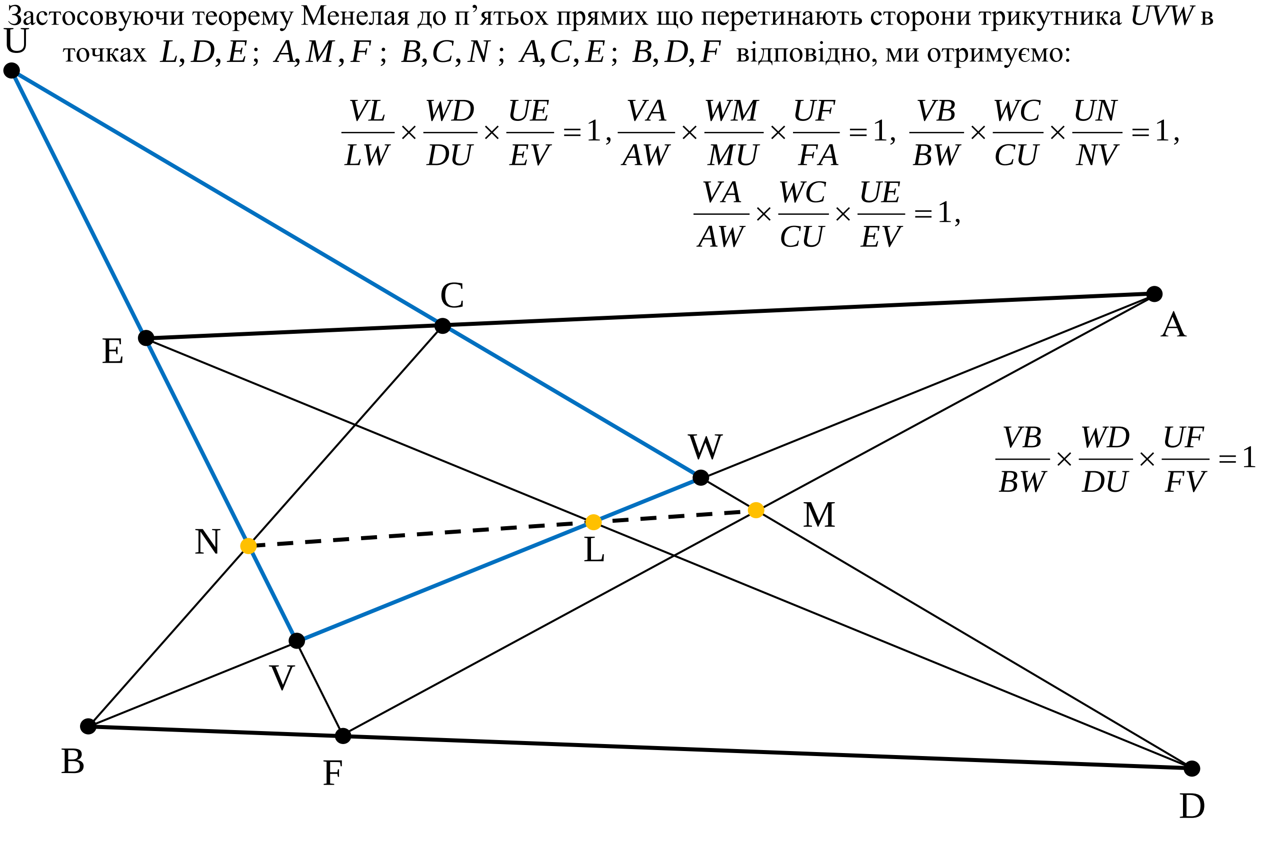
Відповідно до рис.2.

Нехай $U = EF \cap CD$, $V = EF \cap AB$, $W = AB \cap CD$.

Застосовуючи теорему Менелая до п'ятьох прямих що перетинають сторони трикутника UVW в точках L, D, E; A, M, F; B, C, N; A, C, E; B, D, F відповідно, ми отримуємо:

$$\frac{VL}{LW} \times \frac{WD}{DU} \times \frac{UE}{EV} = 1, \frac{VA}{AW} \times \frac{WM}{MU} \times \frac{UF}{FA} = 1, \frac{VB}{BW} \times \frac{WC}{CU} \times \frac{UN}{NV} = 1,$$

$$\frac{VA}{AW} \times \frac{WC}{CU} \times \frac{UE}{EV} = 1,$$



$$\frac{VB}{BW} \times \frac{WD}{DU} \times \frac{UF}{FV} = 1$$

Рис.2

Поділивши добуток перших трьох рівнянь на добуток останніх двох та здійснивши велику кількість скорочень, ми отримуємо:

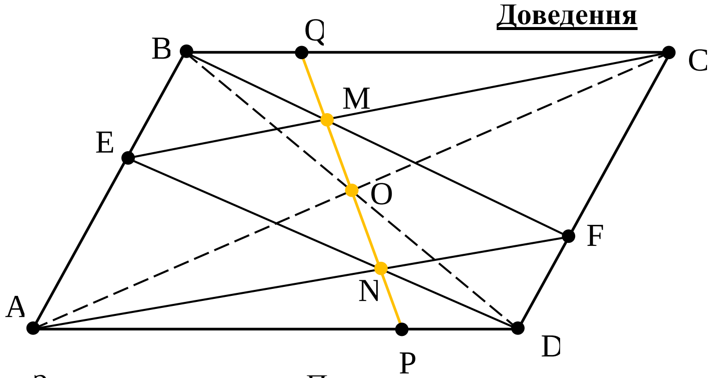
$$\frac{VL}{LW} \times \frac{WM}{MU} \times \frac{UN}{NV} = 1$$

тобто точки *L, M, N* належать одній прямій, що й треба було довести.

Застосування теореми Паппа при розв'язуванні задач

<u>Задача 1.</u> Нехай *E* та *F* - довільні точки відповідно на сторонах *AB* та *CD* паралелограма *ABCD*, *M* - точка перетину прямих *BF* та *EC*, *N* - точка перетину прямих *AF* та *ED*. Нехай пряма *MN* перетинає *AD* та *BC* в точках *P* та *Q* відповідно. Довести, що $AP = CQ$.

<u>Доведення</u>

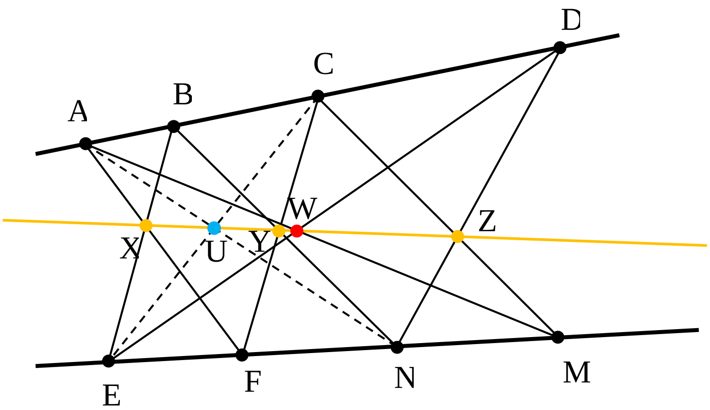


За допомоги теореми Паппа ми можемо стверджувати, що точки N,M і т.O (точка перетину діагоналей AC та належать одній прямій.

Але ж діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, тому $AO = OC$.

Очевидно, що $\angle PAO = \angle QCO$ та $\angle POA = \angle QOC$**.** З рівності пар цих кутів і рівності відрізків AO та OC слідує, що $\Delta POA = \Delta QOC$, тому $AP = CQ$, що і треба було довести.

<u>Задача 2</u>. Нехай A, B, C, D-послідовні точки на одній прямій, а E,F,N,M на іншій. Нехай $X = AF \cap EB, Y = BN \cap FC, Z = CM \cap ND$. Доведіть, що якщо X,Y,Z лежать на одній прямій то $W = AM \cap ED$ теж належить цій прямій.



<u>Доведення</u>

Оскільки A, B, C точки, що лежать на одній прямій, а E, F, N – точки, що лежать на іншій, то за теоремою Паппа X,Y і $U = AN \cap CE$ належать одній прямій .

Також A, C, D точки, що лежать на одній прямій, а E, N, M – на іншій, тому за теоремою Паппа U, Z і W належать одній прямій.

Отримали: X,Y,Z-на одній прямій $U \in XY \quad \Rightarrow W \in XZ$, що й треба було довести.

<u>Авторська задача</u>: Нехай A,B,C,D,E,F – шість точок на колі (відповідно рис.1). Нехай $K_1 = AC \cap FB$ $K_2 = AC \cap BD$; $K_3 = FD \cap AE$; $K_4 = FD \cap CE$; $N = K_1K_4 \cap K_2K_3$; $M = AE \cap FB$; $P = BD \cap EC$. Довести, що точки M,N,P належать одній прямій.

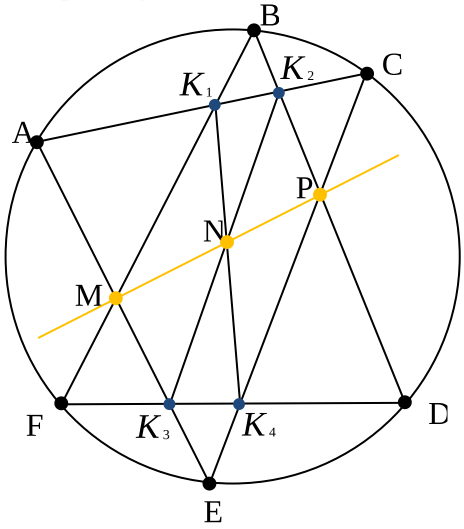


рис.1

<u>Доведення</u>

1)Нехай $X = AK_4 \cap FK_2$; $Y = AD \cap FC$; $Z = K_1D \cap K_3C$ (рис.2).

2)Застосуємо теорему Паппа для таких чотирьох пар з трьох точок на прямих AC і FD:
{A, K_1,K_2 і F, K_3,K_4},{K_1,K_2,C і K_3,K_4,D},
{A, K_2,C і F,K_4,D},{ A, K_1,C і F, K_3,D} і отримаємо, що точки {M,X,N},{N,Z,P},{X,Y,P},{M,Y,Z} належать відповідним їм прямим.

3)Розглянемо окремо ці чотири прямі (рис.3). M,N,P – будуть лежати на одній прямій якщо M,Y,P- теж лежать на одній прямій оскільки $M \neq X$ і $P \neq Z$, доведемо це через теорему Паскаля (рис.2) для точок A,B,C,D,E,F на колі. Отримаємо, що точки $M = AE \cap FB$; $P = BD \cap EC$; $Y = AD \cap FC$ належать одній прямій тобто усі точки M,X,Y,N,Z,P належать одній прямій (рис.4), а це означає, що точки M,N,P належать одній прямій, що й т.б.д.

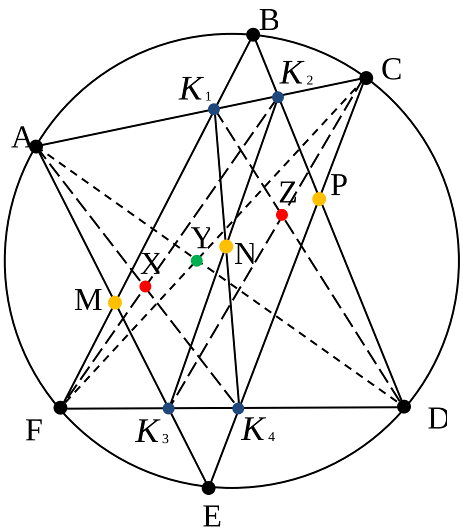


рис.2

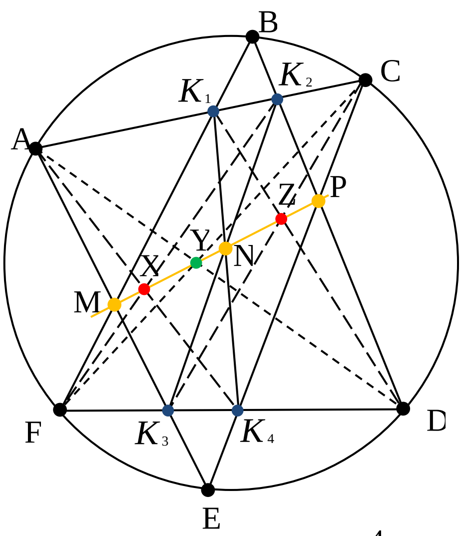


рис.4

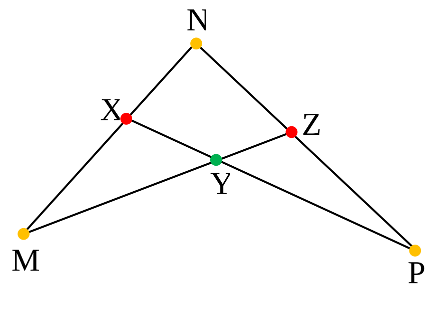


рис.3

4. Теорема Паскаля

1623-1622

Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей та проективної геометрії, творець перших зразків лічильної техніки, автор основного закону гідростатики. Відомий також відкриттям формули біноміальних коефіцієнтів, винаходом гідравлічного преса й шприца та іншими відкриттями. Автор знаменитих «Думок» та «Листів до провінціала», які стали класикою французької літератури.

На честь Паскаля названа одиниця вимірювання тиску (Паскаль), а також популярна мова програмування Pascal.

Теорема

Три точки попарного перетину протилежних сторін вписаного в коло, або еліпс шестикутника лежать на одній прямій.

Доведення

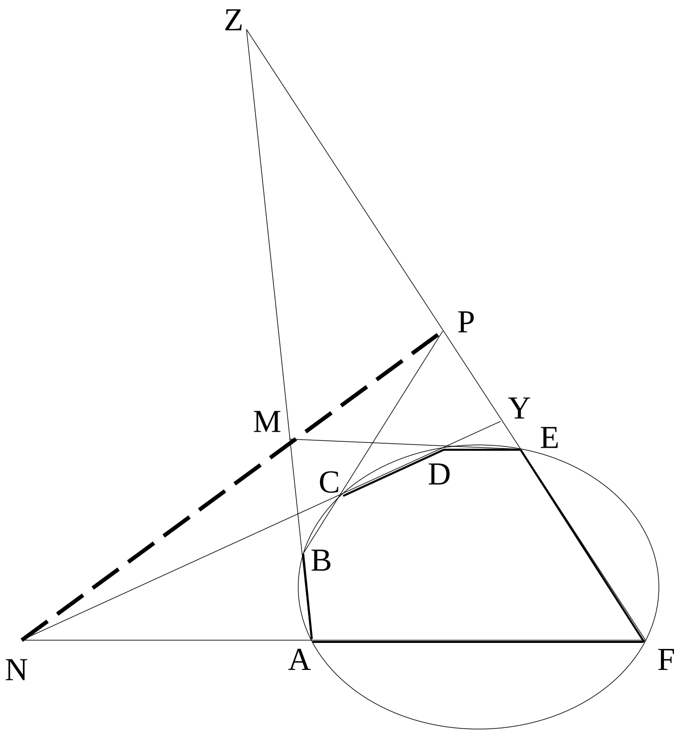


Рис. 1

Нехай шестикутник ABCDEF вписаний в коло, $M = AB \cap DE$, $P = BC \cap EF$, $N = CD \cap FA$. Доведемо, що точки M, P і N лежать на одній прямій.

Розглянемо точки попарного перетину сторін, взятих через одну: $X = AB \cap CD$, $Y = CD \cap EF$, $Z = EF \cap AB$. За теоремою про степінь точки отримаємо три рівності: $XA \cdot XB = XC \cdot XD$; $YC \cdot YD = YE \cdot YF$ і $ZA \cdot ZB = ZE \cdot ZF$ (1).

Розглянемо трикутник XYZ і три прямі, що перетинають його сторони: BC, DE і FA.

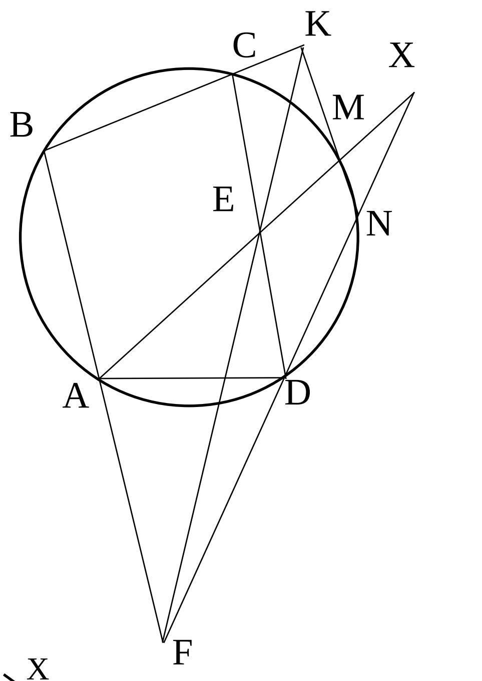
Застосовуючи в кожному випадку теорему Менелая, відповідно отримаємо:

$\frac{XB}{BZ} \cdot \frac{ZP}{PY} \cdot \frac{YC}{CX} = 1$; $\frac{XM}{MZ} \cdot \frac{ZE}{EY} \cdot \frac{YD}{DX} = 1$ і $\frac{XA}{AZ} \cdot \frac{ZF}{FY} \cdot \frac{YN}{NX} = 1$. Перемножимо почленно ці рівності і виконаємо скорочення, враховуючи рівності (1): $\frac{XM}{MZ} \cdot \frac{ZP}{PY} \cdot \frac{YN}{NX} = 1$.

Отже, точки M, P і N лежать на одній прямій.

<u>Задачі на застосування тереми Паскаля</u>

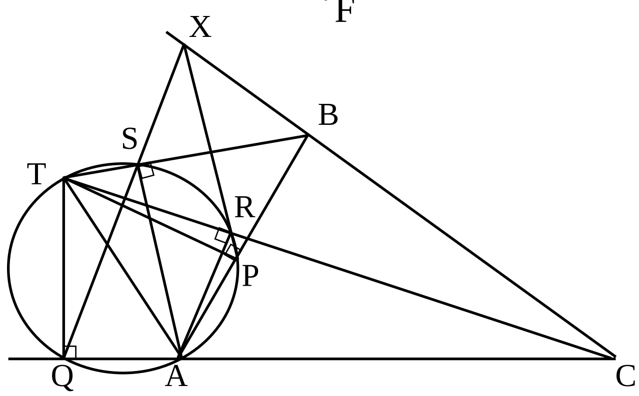
Задача 1.
Чотирикутник ABCD вписаний в коло S; X - довільна точка, M і N - другі точки перетину прямих XA і XD з колом S. Прямі DC і AX, AB і DX перетинаються в точках E і F. Доведіть, що точка перетину прямих MN і EF лежить на прямій BC.



Розв'язання

Нехай K - точка перетину прямих BC і MN. Застосовуючи теорему Паскаля до точок A, M, N, D, C, B, отримуємо, що точки E K і F лежать на одній прямій, а значить, K - точка перетину прямих MN і EF.

<u>Задача 2.</u>
Дано трикутник ABC і деяка точка T. Нехай P і Q - основи перпендикулярів, опущених з точки T на прямі AB і AC відповідно, а R і S - основи перпендикулярів, опущених з точки A на прямі TC і TB відповідно. Доведіть, що точка перетину X прямих PR і QS лежить на прямій BC.



Розв'язання

Оскільки кути APT, ART, AST і AQT прямі, то точки A, P, R, T, S, Q лежать на колі, побудованому на відрізку AT як на діаметрі. Отже, за теоремою Паскаля точки B, C і X лежать на одній прямій.

<u>Задача 3.</u>
Точка M лежить на описаному колі трикутника ABC; R - довільна точка. Прямі AR, BR і CR перетинають коло в точках A_1, B_1 і C_1. Доведіть, що точки перетину прямих MA_1 і BC, MB_1 і CA, MC_1 і AB лежать на одній прямій, що проходить через точку R.

<u>Задача 4.</u>
У трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і BB_1 і бісектриси AA_2 і BB_2; вписане коло дотикається сторін BC і AC в точках A_3 і B_3. Доведіть, що прямі A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 перетинаються в одній точці або паралельні.

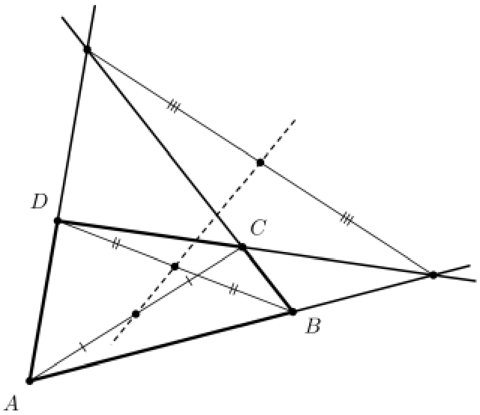
5. Теорема Ньютона
Пряма Гауса

Карл Гаус
1777-1855
німецький математик, астроном, геодезист та фізик. Вважається одним з найвидатніших математиків всіх часів, «королем математиків», Лауреат медалі Коплі (1838), іноземний член Шведської (1821) і Петербурзької (1824) академій наук, Королівського товариства.

Ісаак Ньютон
1643 - 1727
англійський вчений, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики та один із засновників числення нескінченно малих.

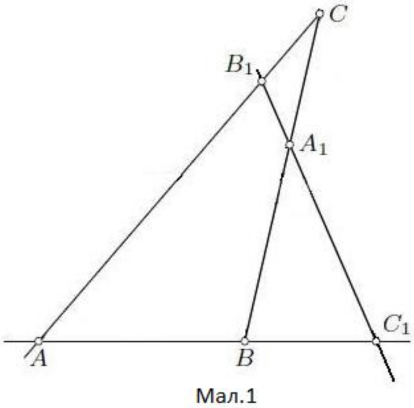
У книзі «Математичні начала натуральної філософії» Ньютон сформулював закони руху, відомі як закони Ньютона й закон всесвітнього тяжіння, які стали основою наукового світогляду впродовж трьох наступних століть і мали великий вплив не тільки на фізику, а й на філософію. Використовуючи свою теорію Ньютон зумів пояснити закони Кеплера, що описують рух планет навколо Сонця, чим заперечив останні сумніви щодо геліоцентричної системи світобудови.

Теорема Гаусса
Якщо в чотирикутнику дві пари протилежних сторін не паралельні, то дві середини його діагоналей лежать на прямій, що проходить через середину відрізка, який з'єднує точки перетину цих протилежних сторін.
Зазначена пряма називається прямою Гаусса. (Гаусса-Ньютона.)

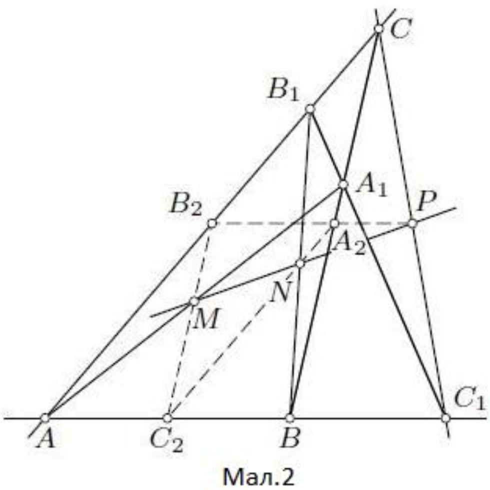


<u>У випадку трикутника.</u>

Якщо пряма, що не проходить через вершини трикутника ABC, перетинає його сторони BC, AC, AB в точках A_1, B_1,C_1 відповідно (мал.1), то середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 колінеарні.
(мал.2).



Мал.1



Мал.2

Доведемо теорему Гаусса

Дано: ΔABC , пряма перетинає сторони AC і BC в точках B_1 і A_1 відповідно , а продовження сторони AB – в точці C_1.

Довести: середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 колінеарні.

Доведення

Середини відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 позначимо як M, N і P відповідно. Ці точки лежать на прямих B_2C_2, C_2A_2 та A_2B_2, де A_2, B_2 та C_2 - середини сторін BC, AC та AB трикутника ABC.

З подібності трикутників A_2CP і BCC_1 маємо : $\frac{A_2P}{BC_1} = \frac{CP}{CC_1}$,

а з подібності трикутників B_2CP і ACC_1 : $\frac{B_2P}{AC_1} = \frac{CP}{CC_1}$.

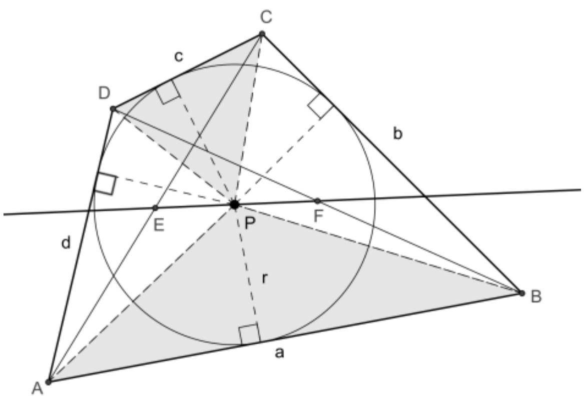
Звідси : $\frac{A_2P}{BC_1} = \frac{B_2P}{AC_1} \rightarrow \frac{A_2P}{B_2P} = \frac{BC_1}{AC_1}$.

Аналогічно отримуємо співвідношення : $\frac{B_2M}{C_2M} = \frac{CA_1}{BA_1}$ та $\frac{C_2N}{A_2N} = \frac{AB_1}{CB_1}$.

Перемноживши отримані три рівності, маємо :

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{C_2N}{A_2N} \cdot \frac{A_2P}{B_2P} \cdot \frac{B_2M}{C_2M}.$$

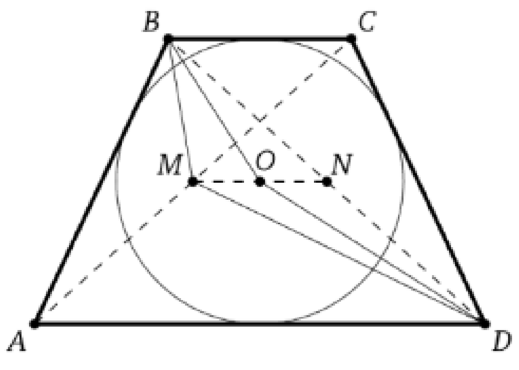
Оскільки точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій, то по теоремі Менелая ліва частина цієї рівності дорівнює 1.Тому , враховуючи праву частину рівності, по оберненій теоремі Менелая точки M, N і P лежать на одній прямій.



Теорема Ньютона

Якщо в чотирикутник вписано коло , то центр цього кола і середини діагоналей чотирикутника – колінеарні. (Пряма, якій належать ці точки називається пряма Ньютона-Гаусса)

Доведення



Т.O - інцентр чотирикутника ABCD, M та N- середини AC і BD відповідно.

Тоді MN – медіана трикутника BMD і умова $O \in MN$ рівносильна умові $S_{\Delta OBM} = S_{\Delta ODM}$.

Доведемо це за площами:

Маємо:

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = \frac{1}{2}(AB + CD)r,$$

$$S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}(BC + AD)r.$$

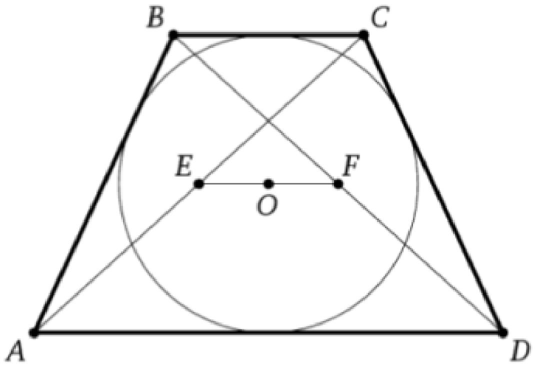
Але $AB + CD = BC + AD$ тому,

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}. (1)$$

Оскільки $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta CBM}$ і $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta CDM}$, то:

$$S_{\Delta ABM} + S_{\Delta CDM} = S_{\Delta BCM} + S_{\Delta ADM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}. (2)$$

Віднявши рівності 1 та 2 , маємо:



Мал.2

$$S_{\Delta AOB} - S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BCM} - S_{\Delta COD},$$

або, що рівносильно:

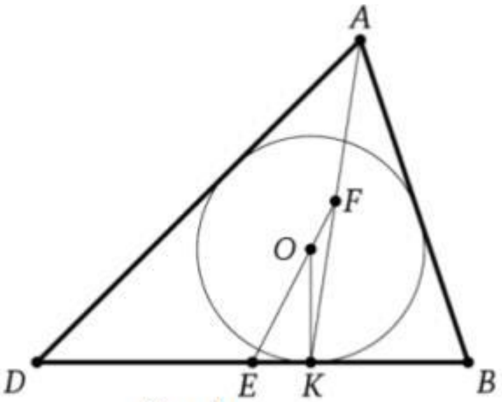
$$S_{\Delta MAO} + S_{\Delta MBO} = S_{\Delta MCO} + S_{\Delta MOD}.$$

Але $S_{\Delta MAO} = S_{\Delta MCO}$, тому $S_{\Delta OBM} = S_{\Delta ODM}$, що і потрібно було довести.

Задачі на застосування

Задача

Коло вписане у трикутник ABD дотикається до сторонни BD в точці К. Доведіть, що пряма, яка з'єднує середину BD (т.Е) з центром вписанного кола (т.О), ділить відрізок АК навпіл.



Мал.1

Доведення

Доведемо, що дана задача - окремий випадок теореми Ньютона (коли чотирикутник ABCD вироджується у трикутник ABD(мал.1)).

Тоді один з кутів, наприклад BCD, умовно рівний $180°$(мал.2). В цьому випадку ламана BCD перетворюється на BD – сторону трикутника ABD. Коло вписане у чотирикутник ABCD , мало спільні точки зі сторонами ВС і С. У трикутнику ABD ці точки співпадуть з точкою К.

За теоремою Ньютона середини відрізків АК і BD, а також центр кола (т.О) належать одній прямій. Доведено.

Задачі для самостійного розв'язування

Задача1.

Чотирикутник ABCD описаний навколо кола з центром I. Точки M і N - середини діагоналей AC і BD, відповідно .

Доведіть, що чотирикутник ABCD - вписаний тоді і тільки тоді, коли IM:AC = IN:BD.

Задача 2.

Продовження протилежних сторін AB і CD вписаного чотирикутника ABCD перетинаються в точці M, а сторін BC і AD – в точці N.

Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів AMD і DNC лежить на відрізку, що з'єднує середини діагоналей чотирикутника.

6.Теорема Монже

Гаспар Монже

(1746-1818) - відомий французький математик, громадський діяч, член Паризької академії наук. Ім'я Гаспара Монже внесено в список 72 найвеличніших вчених Франції і викарбувано на першому поверсі Ейфелевої вежі. Таким успіхом він завдячує своїм працям у проективній геометрії та стереометрії.

Теорема.

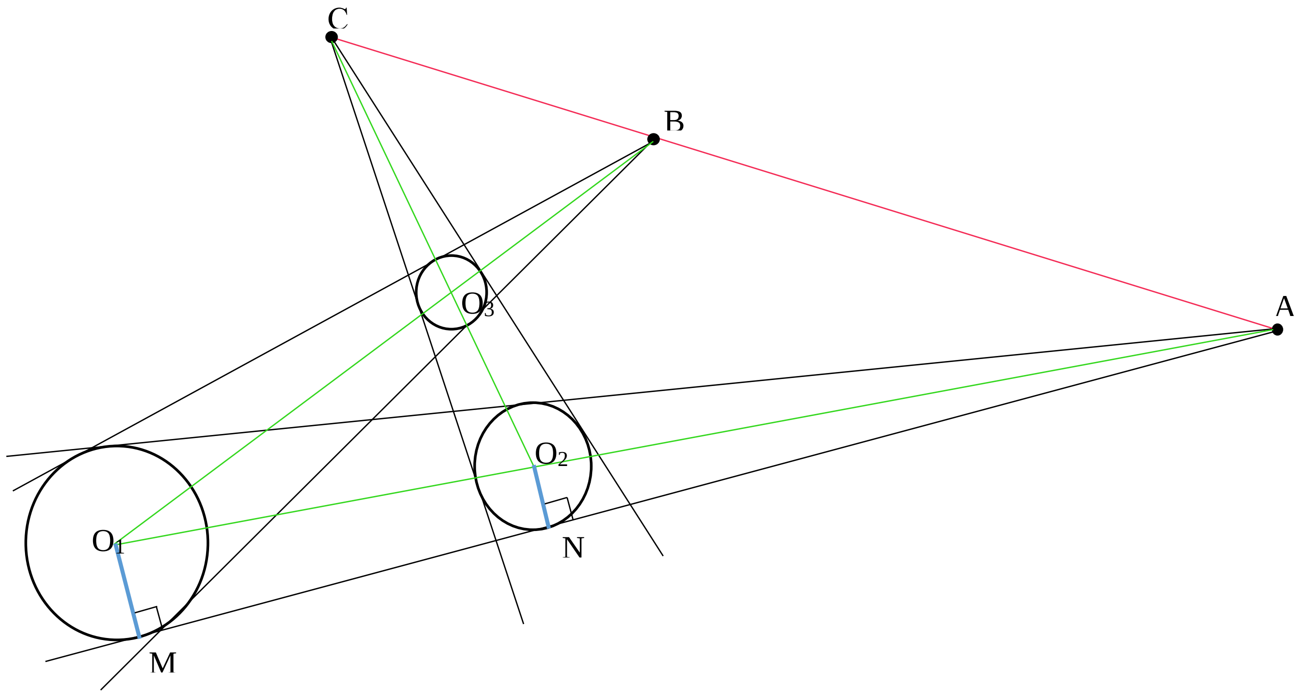
Для будь-яких трьох кіл на площині, жодне з яких не знаходиться всередині інших, три точки перетину трьох пар зовнішніх дотичних є колінеарні.

Існують різні доведення цієї теореми. Першим пропонуємо досить відоме.

Це доведення із шкільного курсу геометрії за 8 клас. Але існує досить цікаве «стереометричне» доведення даної тереми.

Доведення

У 8-му класі вивчається досить просте доведення цієї теореми, яке базується на теоремі Менелая, розглянемо спочатку його:



Позначимо радіуси кіл із центрами O_1 , O_2 і O_3 відповідно r_1, r_2, r_3. Відрізки O_1M і O_2N – радіуси, проведені в точки дотику.

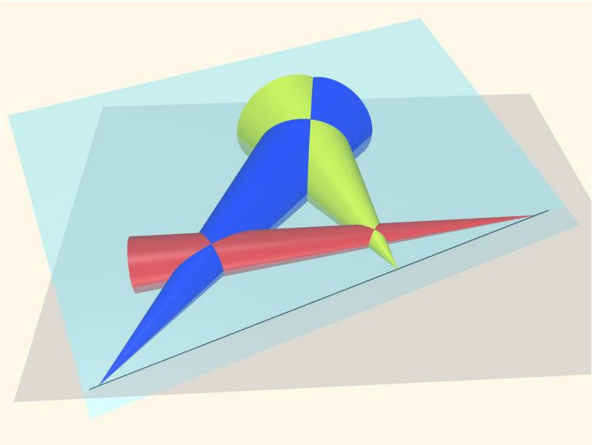
Легко показати, що точки O_1, O_2 і A лежать на одній прямій. Звідси $\Delta AO_1M \sim \Delta AO_2N$.

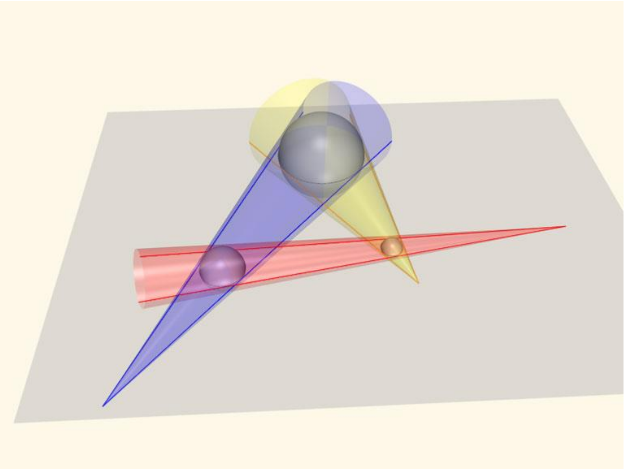
Отримуємо: $\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{O_1M}{O_2N} = \frac{r_1}{r_2}$. Аналогічно доводимо, що $\frac{BO_1}{BO_3} = \frac{r_1}{r_3}$, $\frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_2}{r_3}$.

Для точок A, B і C, які лежать на продовженнях сторін трикутника $O_1O_2O_3$ розглянемо добуток трьох відношень $\frac{O_2A}{AO_1} \cdot \frac{O_1B}{BO_3} \cdot \frac{O_3C}{CO_2}$. Цей добуток дорівнює $\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r_3} \cdot \frac{r_3}{r_2} = 1$. Отже, точки A, B і C лежать на одній прямій.

Проте є набагато краще доведення за допомогою стереометрії.

<u>**Доведення**</u>





Побудуємо три сфери, чиїми екваторами є початкові кола. В конусах, які попарно охоплюють сфери, будуть дотичні, що розглядаються в задачі. Точки, які за нашою гіпотезою будуть лежати на одній прямій, будуть вершинами конусів.

Покладемо на конуси площину. Верхні твірні конусів попарно перетинаються і визначають площину. Точки, які нас цікавлять – вершини конусів – належать як і цій площині, так і початковій площині, в якій лежать наші кола. А дві непаралельні площини завжди перетинаються по прямій. Отже, як і було припущено, ці три точки – точки перетину попарних дотичних до трьох довільних кіл, лежать на одній прямій.

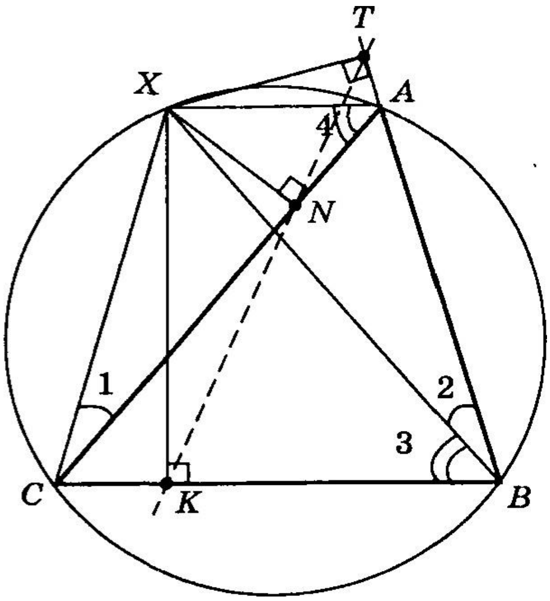
7. Пряма Сімсона-Воллеса

Роберт Сімсон

(14 жовтня 1687 — 1 жовтня 1768)

Шотландський математик, доктор медицини, професор математики в Глазговському університеті.

Пряма Сімсона - пряма , на якій лежать основи перпендикулярів, опущених з довільної точки P кола, описаного навколо трикутника на сторони трикутника. Пряма Сімсона ділить навпіл відрізок, що сполучає точку P і точку перетину висот вписаного трикутника. Відкриття цієї прямої тривалий час приписувалося Роберту Сімсону, але насправді вона була відкрита лише в 1797 році Вільямом Воллесом. Тому наряду з традиційною назвою часто використовується назва ***пряма Воллеса.***



Доведення

Якщо ми доведемо, що для ΔABC І точок T, N, K виконується рівність

$$\frac{CN}{NA} \times \frac{AT}{TB} \times \frac{BK}{KC} = 1$$

То, згідно оберненою теоремою Менелая точки T, N, K лежать на одній прямій .

Нехай $\angle 1 = \angle 2 = \alpha$ (вписані кути, які спираються на одну дугу). Аналогічно $\angle 3 = \angle 4 = \beta$

Нехай також $\angle XCB = \varphi$, тоді $\angle XAB = 180 - \varphi$. А суміжний з ним $\angle XAT = \varphi$

Маємо:

$$CN = CX \times \cos \propto; NA = AX \times \cos\beta;$$

$$BK = BX \times \cos \propto; TB = BX \times \cos$$

$$BK = BX \times \cos\beta \text{ і } CK = CX \times \cos\varphi.$$

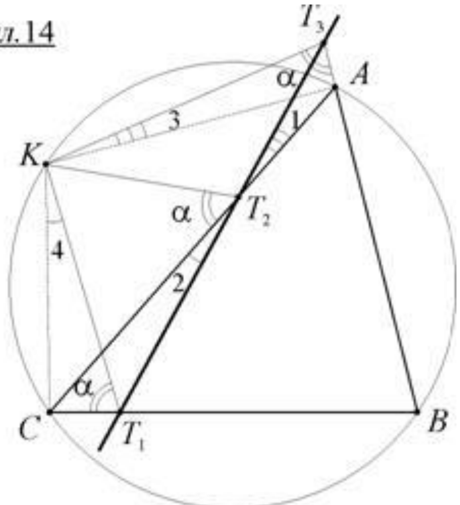
Тоді:

$$\frac{CN}{NA} \times \frac{AT}{TB} \times \frac{BK}{KC} = \frac{CX \times \cos\alpha}{AX \times \cos\beta} \times \frac{AX \times \cos\varphi}{BX \times \cos\alpha} \times \frac{BX \times \cos\beta}{CX \times \cos\varphi} = 1$$

Отже, точки T,N,К лежать на одній прямій .

Узагальнимо пряму Сімсона не тільки для прямого кута .

Мал.14



Теорема 2 (узагальнення).

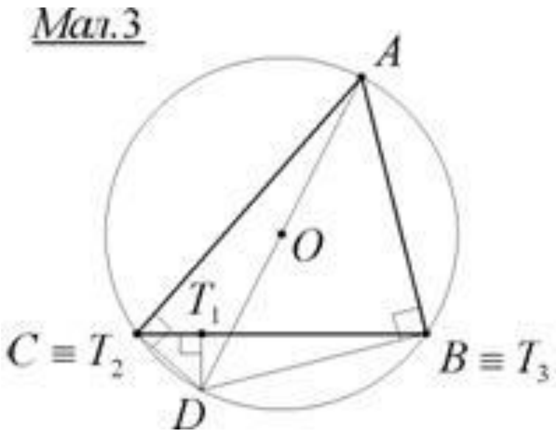
З довільної точки ***K*** описаного навколо трикутника ***ABC*** кола проведено прямі, що перетинають ***BC***, ***AC*** і продовження ***AB*** в точках T_1, T_2, T_3; відповідно (*мал.*14) – під рівними кутами $\boldsymbol{\alpha}$. Довести, що і в цьому випадку T_1, T_2, T_3 – одна пряма.

Доведення

Щоб довести теорему, покажемо рівність кутів 1 і 2.

Оскільки $\angle KT_2A = \mathbf{180^0} - \boldsymbol{\alpha}$, то навколо
KT_3AT чотирикутника можна описати коло, внаслідок чого $\angle 1 = \angle 3$.
Навколо KT_2T_1 також можна описати коло ($\angle KT_2C = \angle KT_1C = \alpha$) і .
Аналогічно можна описати коло KT_3BT_1.
Оскільки чотирикутники КАВС
і KT_3BT_1 вписані, то$\angle CKA = \angle T_1KT_3 = 180^0 - \angle B$. Звідки випливає, що $\angle 3 = \angle 4$,
або $\angle 1 = \angle 2$.
Теорему доведено.

Знайдемо Для яких точок пряма Сімсона співпадає з однією з сторін трикутника ***ABC***?



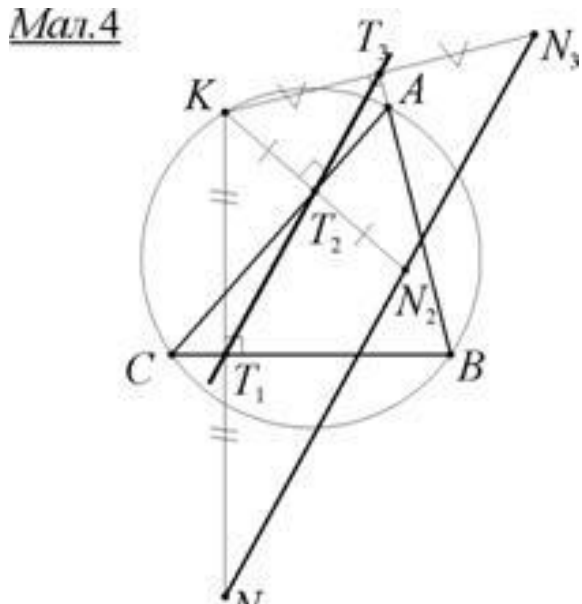
Розв'язання.
Нехай ***D*** – точка, діаметрально протилежна
точці ***A*** (*мал.*3). Оскільки $\angle DBA = \angle DCA = 90^0$ (вписані спираються на діаметр), то точки ***C*** і ***B*** відповідно співпадають з точками T_2 і T_3 прямої Сімсона, тобто пряма, що містить сторону ***BC*** і буде прямою Сімсона точки ***D***.
Отже, прямі Сімсона точок, діаметрально протилежних вершинам ***A, B, C***, містять стороні трикутника ***ABC***.
Неважко показати, що інших точок, для яких прямі Сімсона співпадають зі сторонами, не існує.

Пряма Штейнера

Для будь-якої точки ***K*** кола, описаного навколо трикутника ***ABC***, її симетричні образи відносно сторін трикутника належать одній прямій.

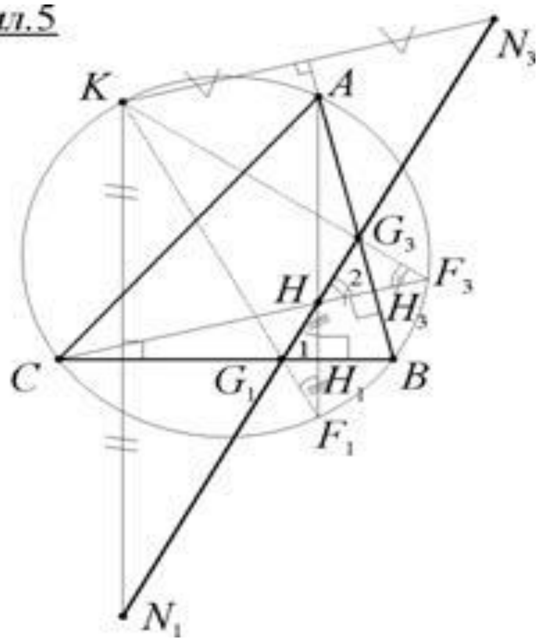
Доведення

Нехай точки N_1, N_2, N_3– симетричні образи точки ***K*** відносно
сторін ***BC, AC*** і ***AB*** відповідно (*мал.*4).
Оскільки середини відрізків KN_1, KN_2, KN_3 – точкиT_1, T_2, T_3 – належать одній прямій (прямій Сімсона), то й точки N_1, N_2, N_3 також належать одній прямій (іноді кажуть: тут ми маємо справу з *"подвоєним" Сімсоном*). І пряма Штейнера і є «Подвоєним» Сімсоном .



Властивість прямої Штейнера

Мал.5



Довести, що прямій прямій Штейнера (N1---N2---N3) належить також і точка ***H*** – ортоцентр трикутника ***ABC***.

Доведення

З'єднаємо точки N_1 *і* N_3 з ортоцентром ***H*** (*мал.*5). Нехай висоти AH_1 *і* CH_3 і перетинають описане коло в точках F_1 *і* F_3 відповідно. Відомо, що точки, симетричні ортоцентру відносно сторін трикутника, належать описаному колу, тобто $HH_1 = H_1F_1$ і $HH_3 = H_3F_3$.

З чотирикутника HH_1H_3 видно, що $\angle H_1HH_3 = 180^0 - \angle B$.

Якщо ми доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 = \angle B$, то задача буде розв'язана.

З міркувань симетрії KF_1 і HN_1 перетнуться в точці G_1, що належить ВС, а KF_3 і HN_3 – в точці G_3, що належить ***AB***.

Тоді , $\angle KF_1A = \angle 1$ а$\angle KF_3C = \angle 2$. Але

$\angle KF_1A = \frac{1}{2} \times \cup AK$ і $\angle KF_3C = \frac{1}{2} \times \cup KC$– як вписані.

Отже,

$$\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AK + \cup KC)$$

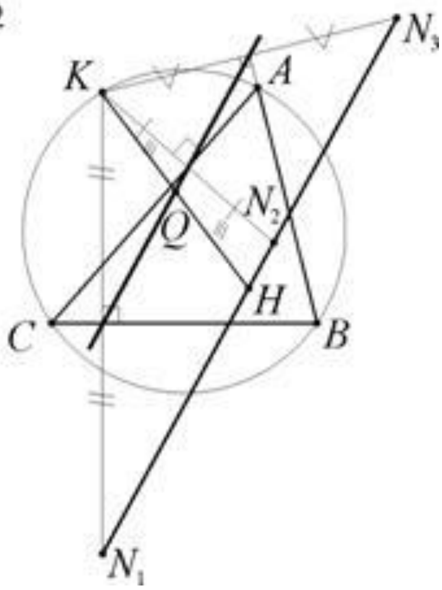
Враховуючи те, що $\cup AC = 2\angle B$ (на цю дугу спирається вписаний кут В), отримаємо:

$\angle 1 + \angle 2 = \angle B.$

Таким чином, ортоцентр Н належить прямій N_1, N_2, N_3.

Властивість прямої Сімсона

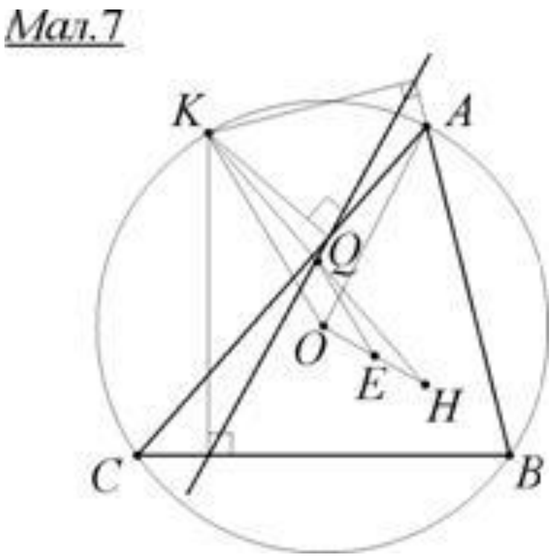
Мал.6



Пряма Сімсона для точки К ділить відрізок КН навпіл, де Н – ортоцентр.

Доведення

Оскільки за *властивістю прямої Штейнера* ортоцентр ***H*** належить прямій N_1, N_2, N_3, яка є "подвоєним" Сімсоном, то очевидно, що середина відрізка КН – точка Q – належить прямій T_1, T_2, T_3 – прямій Сімсона точки К (*мал.*6).



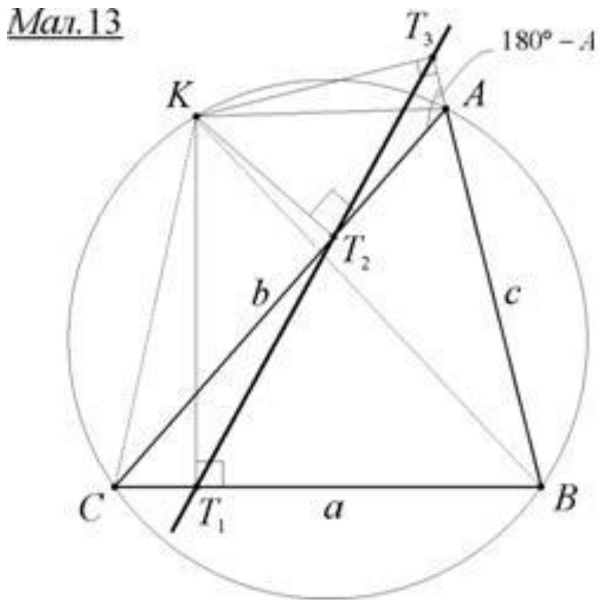
Задача 1

Точка перетину Q прямої Сімсона точки K і відрізку KH належить колу 9 точок трикутника ABC.

Доведення

Відомо, що центром кола 9 точок є точка E– середина відрізка OH, а радіус цього кола дорівнює $\frac{1}{2}R$– половині радіуса кола, описаного навколо трикутника ABC. Тоді очевидно, що QE – середня лінія в трикутнику OKH (*мал.*7), тобто .

$QE = \frac{1}{2}OK = \frac{1}{2}R$ Це і означає, що Q – середина KH – належить колу 9 точок трикутника ABC.



Задача 2

Скориставшись прямою Сімсона, доведемо *теорему Птоломея*: добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.

Розв'язання

KA – діаметр кола, описаного навколо чотирикутника KT_3AT_2 а (*мал.*13) і , $KA = \frac{T_2T_3}{\sin(180^0 - \angle A)}$ або

$T_2T_3 = KA \times \sin(\angle A)$.

KB – діаметр кола, описаного навколо KT_3BT_1, тоді ,

$BK = \frac{T_1T_3}{sin\angle B}$і $T_1T_3 = KB \times sin\angle B$

Аналогічно KC – діаметр кола, описаного навколо KT_2T_1, звідки $CK = \frac{T_1T_2}{sin\angle C}$ (теорема синусів для $\varDelta CT_2T_1$), або .$T_1T_2 = CK \times sin\angle C$

Враховуючи те, що $T_1T_3 = T_1T_2 + T_2T_3$, отримаємо:

$KB \times sin\angle B + KA \times sin\angle A$, або

$KB \times \frac{b}{2R} = KA \times \frac{a}{2R} + KC \times \frac{c}{2R}$,

Помножимо обидві частини рівності на 2R,

$KB \times b = KA \times a + KC \times c$

Це вже і є теоремою Птоломея для вписаного в коло чотирикутника KABC (дійсно, KB і b – його діагоналі; KA і a та KC і c – пари протилежних сторін).

<u>Задачі для самостійного опрацювання</u>

<u>Задача 1.</u>

Якщо через точку К описаного навколо трикутника АВС кола провести три довільні хорди і на кожній з них як на діаметрі побудувати коло, то ці кола попарно перетнуться в трьох точках, які належать одній прямій (*теорема Сальмона*).

<u>Задача 2.</u>

Відновіть трикутник АВС за кутом А та його *прямою Ейлера* (прямою, що містить центр описаного кола О і ортоцентр Н).

3. Пряма Сімсона точки К кола ,описаного кола описаного кола ,описаного рівностороннього трикутника АВС ділить радіус ОК навпіл.

IV. Підсумки

В роботі були запропоновані на нашу думку основні теореми, які можуть бути використані при розв`язуванні олімпіадних задач різного рівня. Ми не мали на меті розглянути всі способи доведення колінеарності трьох точок. Адже існує досить багато інших способів. Наприклад, метод мас, векторний метод.
В майбутніх роботах ми плануємо розглянути і ці методи.
Сподіваємося, що робота може стати в нагоді всім, хто готується до олімпіад і всім, кому просто цікава математика.

Літеатура та посилання

1. В. А. Ясінський, О. Б. Панасенко, Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад» Геометрія, Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2014.-225с.
2. А.С. Раухман, Д.Т. Белешко, П.О. Тадеєв, Геометрія чотирикутника, Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010.-152с.
3. І.Ф. Шаригін, Р.К. Гордін, Збірник задач з геометрії. 500 задач з відповідями, ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2001.- 400с.
4. Г.Б. Філіповський, Шкільна геометрія в мініатюрах, Бостон-Київ: Толиман, 2016 – 240с.
5. І.А. Кушнір, Трикутник і тетраедр, Київ: ФАКТ, 2004.
6. Р.К. Гордін, Теоремы и задачи школьной геометрии. Базовый ы профильный уровни. Москва: Изд. Московского центра непрерывного математического образования, 2015.- 160с.
7. Ісаак Кушнір, "Геометрія. Пошук і натхнення" ("Геометрія на барикадах")Київ - с.537-538.
8. Я. П. Понарин " Елементарна Геометрія " Том 1 –с.74.
9. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник. Киев, “Наукова думка”, 1983.
10. Бородин А.Н., Бугай А.С. Биографический словарь деятелей в области математики. Киев, “Радянська школа”, 1979.
11. Зетель С.И. Новая геометрия треугольник Москва, “Учпедгиз”, 1940.
12. Коксетер Г.С.М., Грейцер С.Л. Новые встречи с геометрией.
13. Москва, “Наука”, 1978
14. Кушнір І.А. Методи розв’язання задач з геометрії.
15. Київ, “Абрис”, 1994
16. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Часть 2. Москва, “Наука”, 1991
17. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия (библиотечка “Квант”). Москва, “Наука”, 1986
18. https://uk.wikipedia.org/wiki/Пряма_Ньютона
19. https://ru.wikipedia.org/wiki/Прямая_Гаусса
20. http://www.problems.ru/view_problem_details_new.php?id=65046
21. https://uk.wikipedia.org/wiki/Карл_Фрідріх_Гаусс
22. https://uk.wikipedia.org/wiki/Ісаак_Ньютон