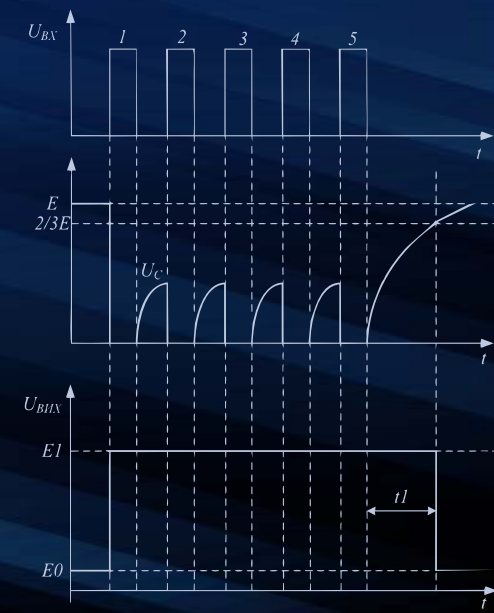


О. М. Васілевський  
В. В. Присяжнюк



# Оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань

$$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 + \dots + X_{N-2} \cdot X_{N-1} \cdot X_N$$

$$Y = X^m$$

$$Y = \ln(X_1/X_2) = \ln X_1 - \ln X_2$$

$$Y = \ln(X_1 X_2) = \ln X_1 + \ln X_2$$

$$Y = (X_1 \pm X_2)(X_3 \pm X_4)$$

$$Y = (X_1 \pm X_2)/(X_3 \pm X_4)$$

$$u_c^2(y) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 (u_B^2(x_1) + u_B^2(x_2) + u_B^2(x_3)) + (x_4 \cdot x_5 \cdot x_6)^2 (u_B^2(x_4) + u_B^2(x_5) + u_B^2(x_6)) + \dots + (x_{N-2} \cdot x_{N-1} \cdot x_N)^2 (u_B^2(x_{N-2}) + u_B^2(x_{N-1}) + u_B^2(x_N))$$

$$u_c(y) = m \cdot x^{m-1} u(x), \quad u_{CB}(y) = u_c(y)/y = m u(x)/x$$



$$u_{CB}(y) = \sqrt{\frac{u^2(x_1) + u^2(x_2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{u^2(x_3) + u^2(x_4)}{(x_3 + x_4)^2}}$$

Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

О. М. Васілевський  
В. В. Присяжнюк

**ОЦІНЮВАННЯ НЕПЕВНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ  
ВИМІРЮВАНЬ, КОНТРОЛЮ ТА ВИПРОБУВАНЬ**

**Практикум**

Вінниця  
ВНТУ  
2020

**УДК 621.317: 389.14**  
**B19**

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.04.2020 р.)

Рецензенти:

**Р. Н. Квєтний**, доктор технічних наук, професор

**О. В. Осадчук**, доктор технічних наук, професор

**А. Я. Кулик**, доктор технічних наук, професор

**Васілевський, О. М.**

B19      Оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань : практикум / О. М. Васілевський, В. В. Присяжнюк. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 150 с.

ISBN 978-966-641-811-4

У практикумі викладено методику розрахунку непевностей результатів вимірювань, контролю та випробувань з урахуванням міжнародних підходів до оцінювання характеристик точності вимірювань та подання їх результатів. Практикум містить короткі теоретичні відомості з концепції непевності, приклади розрахунку конкретних задач, що зустрічаються в метрологічній практиці, та завдання для набуття навичок оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань.

**УДК 621.317: 389.14**

**ISBN 978-966-641-811-4**

© ВНТУ, 2020

## ***ЗМІСТ***

ВСТУП.....	5
1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОНЦЕПЦІЇ НЕПЕВНОСТІ.....	6
1.1 Способи оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань .....	8
1.2 Форми подання складових непевності.....	12
1.3 Методика оцінювання непевності результатів динамічних вимірювань .....	24
1.4 Порівняльний аналіз двох підходів щодо вираження характеристик точності вимірювань .....	28
2 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ КОНЦЕПЦІЇ НЕПЕВНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ .....	37
2.1 Оцінювання непевності вимірювання надлишкового тиску газоподібного середовища за допомогою манометра МП-50М.....	37
2.2 Оцінювання непевності вимірювання сили електричного струму.....	40
2.3 Оцінювання непевності багаторазових вимірювань частоти синусоїдального сигналу .....	45
2.4 Оцінювання непевності вимірювання віброприскорення при калібруванні акселерометра.....	49
2.5 Оцінювання непевності вимірювання зусилля .....	52
2.6 Оцінювання непевності вимірювання густини твердого тіла.....	56
2.7 Оцінювання непевності вимірювання деформації клейковини .....	59
2.8 Оцінювання непевності вимірювального каналу активності іонів.....	62
2.9 Оцінювання непевності вимірювання частоти обертання роторних систем.....	66
2.10 Оцінювання непевності вимірювання обертового моменту електродвигунів.....	72
2.11 Оцінювання непевності вимірювального контролю якості електроенергії.....	75
2.12 Оцінювання непевності результатів вимірювального контролю різниці частот обертання роторів електродвигунів.....	81
2.13 Оцінювання непевності груп спостережень при калібруванні еталона напруги.....	86
2.14 Оцінювання непевності сукупного вимірювання маси .....	88
2.15 Методика оцінювання непевності результатів сукупних вимірювань .....	91
2.16 Оцінювання непевності результатів одноразових вимірювань з одноразовим спостереженням.....	96

2.17 Оцінювання непевності результатів випробувань при визначенні об'ємної частки бензолу.....	98
2.18 Методика встановлення міжкалібрувального інтервалу на основі концепції непевності.....	101
2.19 Оцінювання непевності вимірювань опору ізоляції .....	111
2.20 Оцінювання непевності вимірювань рН води.....	114
2.21 Оцінювання непевності динамічного вимірювання віброприскорення.....	116
2.22 Оцінювання непевності вимірювання динамічного моменту роторних систем.....	123
<b>3 ПЕРЕЛІК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОРОЗВ'ЯЗАННЯ.....</b>	<b>129</b>
3.1 Оцінювання непевності вимірювання кутової швидкості.....	129
3.2 Оцінювання непевності вимірювання тиску з одноразовим спостереженням .....	129
3.3 Оцінювання непевності опосередкованого вимірювання на основі заданого рівняння перетворення .....	129
3.4 Перерахунок характеристик похибок у характеристики непевності .....	130
3.5 Оцінювання непевності вимірювання деформації .....	130
3.6 Оцінювання непевності вимірювання обертового моменту .....	130
3.7 Оцінювання непевності вимірювання товщини .....	131
3.8 Оцінювання непевності вимірювання густини.....	131
3.9 Оцінювання непевності вимірювань масової частки вологи .....	132
3.10 Оцінювання непевності вимірювань відносного подовження еластичного герметика .....	133
3.11 Оцінювання непевності вимірювань твердості за Брінеллем .....	135
3.12 Оцінювання непевності результатів сукупного вимірювання .....	136
3.13 Оцінювання непевності динамічного вимірювання.....	136
<b>БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК .....</b>	<b>137</b>
<b>Додатки.....</b>	<b>142</b>
Додаток А.Варіанти завдання № 3.3 .....	143
Додаток Б. Варіанти завдання № 3.4.....	145
Додаток В. Варіанти завдання № 3.12 .....	146
Додаток Г. Варіанти завдання № 3.13.....	148

## ***ВСТУП***

Концепція непевності у вимірюваннях є відносно новою в метрологічній практиці, хоча оцінювання похибок вимірювань вже давно є окремою частиною науки про вимірювання та їх застосування – метрології. В даний час авторитетними міжнародними організаціями у сфері метрології, стандартизації, електротехнічною комісією та науковою спільнотою визнано, що коли всі відомі або передбачувані компоненти похибок були оцінені та введені відповідні поправки, все ще залишається сумнів (непевність) щодо правильності заявленого результату, тобто, наскільки добре результат вимірювання чи випробування характеризує досліджувану величину.

Подібно до того, як практично універсальне використання Міжнародної системи одиниць (SI) привело до узгодженості з усіма науково-технічними вимірюваннями, світовий консенсус щодо оцінювання та подання непевності дозволив надати значущості широкому спектру результатів вимірювань, контролю та випробувань у науці, приладобудуванні, комерції, промисловості та медицині, які стало легко зрозуміти та правильно інтерпретувати. У епоху глобального ринку необхідно, щоб методи оцінювання та способи подання непевності були однаковими в усьому світі, такими, щоб результати вимірювань, контролю та випробувань, що виконуються різними країнами, можна було легко порівняти.

Тому в практикумі пропонуються короткі теоретичні відомості концепції непевності, приклади розв'язування метрологічних задач, що часто зустрічаються в повсякденній практиці, а також задачі для саморозв'язування та довідкові дані. Основна мета практикуму – набуття здобувачами освіти умінь і знань (компетентностей) з питань оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань, способів перерахунку характеристик похибок в характеристики непевності та подання результатів досліджень на основі наведених практичних прикладів і методик розрахунку складових непевності.

Після ознайомлення з існуючими шляхами розв'язання метрологічних задач, що можуть зустрічатися на практиці, здобувачі освіти зможуть застосовувати набуті теоретичні й практичні знання та вміння для розв'язання інших подібних задач, що можуть їм зустрічатися під час професійної діяльності.

Пропонований практикум містить необхідну та достатню інформацію, що сприятиме самостійному та грамотному вирішенню метрологічних задач, які зустрічатимуться в практичній діяльності, та виконанню курсової роботи з дисципліни «*Основи теорії невизначеності вимірювань*».

## ***1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОНЦЕПЦІЇ НЕПЕВНОСТІ***

**Непевність вимірювання – невід’ємний параметр, пов’язаний з результатом вимірювання, який характеризує дисперсію значень, що можуть бути достатньо обґрунтовано приписані вимірюваній величині [1–3].**

Непевність вимірювання виражає той факт, що для даної вимірюваної величини і для даного результату її вимірювання немає єдиного значення, а є нескінченне число значень, розсіяних в околі результату, який узгоджується з усіма спостереженнями та даними, а також зі знанням фізичного світу, який з різним ступенем упевненості може бути приписаний вимірюваній величині.

На практиці існує багато можливих джерел непевностей при вимірюваннях, контролі та випробуваннях, зокрема такі:

- а) неповне визначення вимірюваної величини;
- б) неточна реалізація визначення вимірюваної величини;
- в) вибірка, що не відображається, – отримане значення може не відображати вимірювану величину;
- г) неточні відомості про вплив навколишнього середовища на вимірювання або недосконале вимірювання умов навколишнього середовища;
- д) суб’єктивна систематична похибка оператора при знятті показань з аналогових приладів;
- е) кінцева роздільна здатність засобу вимірювання або поріг чутливості;
- ж) неточні значення, приписані еталонам, що використовуються при вимірюванні, стандартним зразкам речовин і матеріалів;
- и) неточні значення констант й інших параметрів, що були отримані з зовнішніх джерел та використовуються в алгоритмі опрацювання даних;
- к) апроксимації та припущення, що використовуються у методі вимірювання та вимірювальній процедурі;
- л) зміни в повторних спостереженнях вимірюваної величини при явно однакових умовах [1, 4].

Ці джерела необов’язково є незалежними, і деякі з джерел (від а) до к) можуть вносити вклад у джерело л). Звичайно, невідомий систематичний ефект не може бути внесений в оцінку непевності результату вимірювання, але він робить внесок у його похибку.

Введення поняття «непевність» є вимушеною мірою, необхідною для одноманітного та спрощеного оцінювання достовірності результатів вимірювання, оскільки її визначення здійснюється на основі одержаних результатів вимірювання, відомих умов вимірювань і характеристик використовуваної апаратури, а не на невідомому істинному значенні вимірюваної величини.

Непевності вимірювання можна класифікувати за такими ознаками: **способи оцінювання** та **форми подання** [1–4].

Всі непевності **за способами оцінювання** поділяються на типи А і В. Метою поділу непевності на типи А та В є показ двох різних способів оцінювання компонентів непевності, і він використовується тільки для зручності обговорення; він не призначений для демонстрації факту існування розходження в природі цих компонентів, що є результатом даних двох типів оцінювання. Обидва типи оцінювання базуються на розподілах ймовірностей, а компоненти непевності кожного типу кількісно визначаються дисперсією або стандартним відхиленням.

**За типом А** оцінюються непевності, що підлягають повторним вимірюванням, до яких можна застосувати **статистичні методи**.

Апостеріорне оцінювання (aposteriori evaluation) проводиться за результатами вимірювання, контролю чи випробувань і за результатами можливе лише при проведенні багаторазових спостережень вимірюваної величини. Такі вимірювання можуть проводитися у двох варіантах:

а) в умовах повторюваності (для оцінювання та мінімізації непевності вимірювань, обумовленої випадковими ефектами);

б) при зміні однієї з умов спостережень так, щоб отримати спостережувану змінність результатів (для оцінювання і мінімізації непевності результатів вимірювань, обумовленої змінною частиною невилученої складової відомого систематичного ефекту) [5, 6].

В результаті опрацювання методами математичної статистики багаторазових спостережень можна отримати міру їх розсіювання в околі оцінки очікуваного (опорного) значення, що приймається за результат. Як оцінку міри розсіювання результатів спостережень беруть експериментальне стандартне відхилення, яке називається **стандартною непевністю типу А**.

**За типом В** оцінюються непевності, до яких статистичні методи застосувати неможливо. В таких випадках використовують інші відомі способи.

Апріорне оцінювання (apriori evaluation) складових непевності результатів вимірювань доводиться робити тоді, коли багаторазові спостереження не проводяться. В цьому випадку слід опиратися на інформацію, отриману з раніше проведених вимірювань, фізичних властивостей вимірюваної величини, паспортних даних на засіб вимірювальної техніки (ЗВТ) або довідники.

Оцінювання непевності за типом В, як правило, ґрунтується на базі порівняно надійної інформації. Ця база може містити [1, 4]:

- дані попередніх вимірювань (випробувань);
- дані про вигляд розподілу ймовірностей;
- дані з власного досвіду чи загальних знань про поведінку і властивості відповідних матеріалів та ЗВТ;



- специфікацію виробника, дані, що наводяться у відомостях про повірку, калібрування чи в інших сертифікатах;
- непевності констант і довідкових даних.

Розсіяність результатів вимірювань в цьому випадку характеризується оціненим стандартним відхиленням і називається **стандартною непевністю типу В**.

Таким чином, поділ непевностей на типи А і В показує відмінність в способах оцінювання складових, а не відмінність в джерелах їх виникнення. Обидва типи непевностей оцінюються на підставі розподілів ймовірностей (**спостережуваної** для типу А та **пропонованої** для типу В) і характеризуються кількісно стандартним відхиленням.

Що стосується класифікації непевностей **за формами подання**, то вони поділяються на стандартні, комбіновані, розширені, відносні стандартні, відносні комбіновані та відносні розширені [1, 4].

**Стандартна непевність** – непевність, що виражається як стандартне (середньоквадратичне) відхилення.

**Комбінована непевність** – непевність, що отримується шляхом підсумовування всіх складових стандартних непевностей, пов'язаних з вимірюваною величиною.

**Розширена непевність** – інтервал в околі результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

**Відносна стандартна непевність** – відношення стандартної непевності до оцінки вимірюваної (вхідної) величини.

**Відносна комбінована непевність** – відношення комбінованої непевності до оцінки **вихідної** величини.

**Відносна розширена непевність** – відношення розширеної непевності до оцінки **вихідної** величини.

## **1.1 Способи оцінювання непевності результатів вимірювань, контролю та випробувань**

**1.1.1 Оцінювання непевності типу А.** Експериментальну дисперсію, що характеризує складову непевності, отриману в результаті оцінювання за типом А, знаходять із рядів повторних спостережень, і вона є статистичною оцінкою дисперсії. Експериментальне стандартне відхилення отримують як додатний квадратний корінь з дисперсії, позначають як  $u_A$  і для зручності називають стандартною непевністю типу А[1–6].

Оцінення компонентів стандартної непевності за типом А засноване на розподілах частоті. Тому для оцінювання стандартної непевності за типом А необхідно провести  $n$  незалежних спостережень вимірюваної величини  $q$  в умовах повторюваності.

У більшості випадків найкращою доступною оцінкою математичного сподівання чи очікуваного значення  $\mu_q$  величини  $q$ , що змінюється випадковим чином, є середнє арифметичне або середнє значення  $\bar{q}$  з  $n$  спостережень

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k. \quad (1.1)$$

Експериментальне стандартне відхилення, що характеризує змінність значень  $q_k$ , або, точніше, їхню дисперсію  $\sigma^2$  щодо середнього значення  $\bar{q}$ , розраховують за формулою [1–8]

$$u_A(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n-1}}. \quad (1.2)$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань приймають середнє значення  $\bar{q}$ , то важливо оцінити його дисперсію.

Найкраща оцінка  $\sigma^2(\bar{q}) = \sigma^2/n$  дисперсії середнього значення  $u_A^2(\bar{q})$  виражається як

$$u_A^2(\bar{q}) = \frac{u_A^2(q_k)}{n}. \quad (1.3)$$

Експериментальна дисперсія середнього  $u_A^2(\bar{q})$  і експериментальне стандартне відхилення середнього значення  $u_A(\bar{q})$ , що дорівнює позитивному квадратному кореню з оцінки дисперсії  $u_A^2(\bar{q})$ , кількісно визначають наскільки добре  $\bar{q}$  оцінює очікування  $\mu_k$  величини  $q$ .

З урахуванням виразів (1.2) та (1.3) експериментальне стандартне відхилення середнього значення  $u_A(\bar{q})$  розраховується за формулою [1–12]

$$u_A(\bar{q}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)}}. \quad (1.4)$$

**1.1.2. Оцінювання непевності типу В.** Для оцінювання непевності за типом В вхідної величини  $X_i$ , яка не була отримана в результаті багаторазових спостережень, пов'язані з ними оцінені дисперсія  $u^2(x_i)$  або стандартна непевність  $u(x_i)$  визначаються на базі наукового судження, що базується на всій доступній інформації про можливу змінність  $X_i$ . Тобто, стандартну непевність типу В одержують з передбачуваної функції

щільності вірогідності, заснованої на ступені впевненості в тому, що подія обов'язково відбудеться (ця вірогідність часто називається **суб'єктивною вірогідністю**).

Правильне використання фонду доступної інформації, що наводиться вище при описі процедури апріорного оцінювання (apriori evaluation), вимагає інтуїції, що базується на досвіді та загальних знаннях і є майстерністю, яка приходить з досвідом.

Якщо оцінка  $x_i$  береться зі специфікації виробника, свідоцтва про повірку, довідника або іншого джерела а її непевність дається як деяке кратне стандартного відхилення, то стандартну непевність  $u(x_i)$  можна прийняти рівною зазначеному значенню, поділеному на множник, і оцінена дисперсія  $u^2(x_i)$  буде дорівнювати квадрату цієї частки.

**Наприклад:** свідоцтво про калібрування підтверджує, що напруга  $U_s$  зразкового засобу вимірювання з номінальним значенням 0,1 В складає 100007 мкВ і що непевність цього значення дорівнює 0,1 мкВ на рівні трьох стандартних відхилень. Тоді стандартна непевність зразкового засобу вимірювання напруги дорівнює  $u(U_s) = (0,1 \text{ мкВ})/3 = 33,33 \text{ нВ}$ . Оцінена дисперсія є  $u^2(U_s) = (33,33 \text{ нВ})^2 = 1110,89 \text{ нВ}^2$  [5].

Наведена непевність величини  $x_i$  необов'язково дається у вигляді кратного стандартного відхилення. Замість цього можна зустріти, що згадана непевність визначає інтервал, довірчий рівень якого складає 90, 95, 99 або 99,73%. Якщо не зазначене інше, то можна припустити, що використовувався нормальний розподіл для обчислення згаданої непевності, і стандартну непевність для  $x_i$  одержують діленням наведеної непевності на відповідний коефіцієнт для нормального розподілу. Коефіцієнти, що відповідають вищевказаним чотирьом рівням довіри, дорівнюють: 1,64; 1,96; 2,58 і 3.

**Наприклад:** свідоцтво про калібрування підтверджує, що опір еталонного резистора  $R_s$  з номінальним значенням 100 Ом складає  $100,000125 \text{ Ом} \pm 235 \text{ мкОм}$  при 25 °С і що згадана непевність 235 мкОм визначає інтервал, що складає 99,73% довірчого рівня. Стандартну непевність резистора можна прийняти як  $u(R_s) = (235 \text{ мкОм})/3 = 78,33 \text{ мкОм}$ . Оцінена дисперсія буде дорівнювати  $u^2(R_s) = (78,33 \text{ мкОм})^2 = 6,14 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}^2$  [5].

Розглянемо випадок, коли, використовуючи доступну інформацію, можна стверджувати, що існує можливість (п'ятдесят на п'ятдесят) того, що значення вхідної величини  $X_i$  знаходиться в інтервалі від  $\alpha_-$  до  $\alpha_+$  (іншими словами, можливість того, що  $X_i$  знаходиться в цьому інтервалі, складає 0,5 або 50 відсотків). Якщо можна припустити, що розподіл можливих значень  $X_i$  приблизно нормальний, то найкращу оцінку  $x_i$  величини  $X_i$  можна прийняти як середню точку цього інтервалу. Далі, якщо половина ширини цього інтервалу позначається як  $\alpha = (\alpha_+ - \alpha_-)/2$ , то можна прийняти  $u(x_i) = 1,48\alpha$ , тому що для нормального розподілу зі

сподіванням  $\mu$  і стандартним відхиленням  $\sigma$  інтервал  $\mu \pm \sigma/1,48$  охоплює приблизно 50% розподілу.

Якщо, базуючись на наявній інформації, можна стверджувати, що є приблизно 2 з 3 шансів, що значення  $X_i$  знаходиться в інтервалі від  $\alpha_-$  до  $\alpha_+$ , то, іншими словами, імовірність того, що  $X_i$  знаходиться в цьому інтервалі, складає біля 0,67. Тоді з достатньою підставою можна прийняти  $u(x_i) = \alpha$ , тому що для нормального розподілу зі сподіванням  $\mu$  і стандартним відхиленням  $\sigma$  інтервал  $\mu \pm \sigma$  охоплює приблизно 68,3 відсотка розподілу.

В інших випадках можна оцінити лише межі (верхню і нижню) для  $X_i$ , зокрема стверджувати, що імовірність того, що значення  $X_i$  знаходиться в інтервалі від  $\alpha_-$  до  $\alpha_+$  для всіх практичних цілей дорівнює одиниці, а імовірність того, що  $X_i$  перебуває за межами цього інтервалу, дорівнює нулю. Якщо немає конкретних відомостей про можливі значення  $X_i$  всередині інтервалу, то можна тільки припустити, що з однаковою імовірністю  $X_i$  може знаходитися в будь-якому місці в його межах (рівномірний або прямокутний розподіл можливих значень). Тоді  $x_i$ , сподівання або очікуване значення  $X_i$  є середньою точкою інтервалу,  $x_i = (\alpha_+ + \alpha_-)/2$ , з відповідною дисперсією

$$u^2(x_i) = (\alpha_+ - \alpha_-)^2/12. \quad (1.5)$$

Якщо різницю між межами  $(\alpha_+ - \alpha_-)$  позначити як  $2\alpha$ , то з рівняння (1.5) отримуємо

$$u^2(x_i) = \alpha^2/3. \quad (1.6)$$

Коли компонент непевності, отриманий таким чином, робить значний внесок у непевність результату вимірювання, має сенс скористатись додатковими даними для її подальшого визначення.

Складові стандартної непевності типу В, як правило, визначають на основі інформації про верхні і нижні межі  $[\alpha_-; \alpha_+]$  передбачуваного (апріорно визначеного) закону розподілу чи через інтервал  $U$ , що має заданий довірчий рівень  $p$ .

Для визначення стандартної непевності типу В потрібно взяти додатний квадратний корінь з добутку довірчого рівня кожного значення та квадрата відхилення цього значення, і всі добутки такого виду додати. Таким чином, загальний вигляд формули для обчислення стандартної непевності типу В при дискретних даних має вигляд

$$u_B(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( x_i - \sum_{i=1}^n x_i p_i \right)^2 p_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 p_i}. \quad (1.7)$$

Для неперервної вхідної величини  $X$  стандартна непевність (uncertainty) типу В обчислюється за формулою [1, 4]

$$u_B(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left( x - \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx \right)^2 p(x)dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 p(x)dx}. \quad (1.8)$$

## 1.2 Форми подання складових непевностей

**1.2.1 Форми подання стандартних непевностей.** Вихідними даними для визначення стандартної непевності типу А є результати багаторазових вимірювань. **Стандартну непевність типу А** одноразового спостереження визначають за формулою (1.2). **Стандартну непевність типу А багатократних спостережень**, залежно від середньоарифметичного значення, визначають за формулою (1.4).

Якщо для значення величини  $X_i$  можна оцінити верхню та нижню межі  $[\alpha_-; \alpha_+]$ , то **стандартні непевності типу В**, в припущенні про можливий вигляд закону розподілу, можна визначити за формулами [1–6]:

а) для трикутного закону розподілу

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{24}}; \quad (1.9)$$

б) для трапецеїдального закону розподілу, (рис. 1.1).

$$u_B(X_i) = \frac{[\alpha_+ - \alpha_-] \sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{24}}, \quad (1.10)$$

де  $\beta$  – параметр, який визначається таким відношенням

$$\beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad (1.11)$$

$$\text{де } \lambda_1 = \frac{|(\alpha_{1+} - \alpha_{1-}) - (\alpha_{2+} - \alpha_{2-})|}{2};$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{2};$$

$$\alpha_+ = \alpha_{1+} + \alpha_{2+}, \quad \alpha_- = \alpha_{1-} + \alpha_{2-}.$$

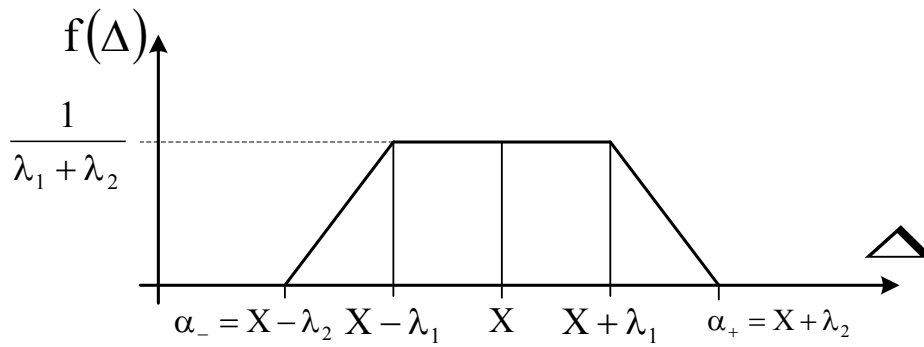


Рисунок 1.1 – Трапецеїдальна функція розподілу ймовірності

При зміні  $\beta$  від 0 до 1 трапецеїдальний розподіл змінюється від трикутного до рівномірного;

в) для експоненціального закону розподілу

$$u_B(X_i) = \sqrt{\frac{(\alpha_+ - x)(x - \alpha_-) - (\alpha_+ - 2x + \alpha_-)}{\lambda}}, \quad (1.12)$$

де  $x$  – очікуване|сподіване| значення;

$\lambda$  – параметр розподілу (рис. 1.2);

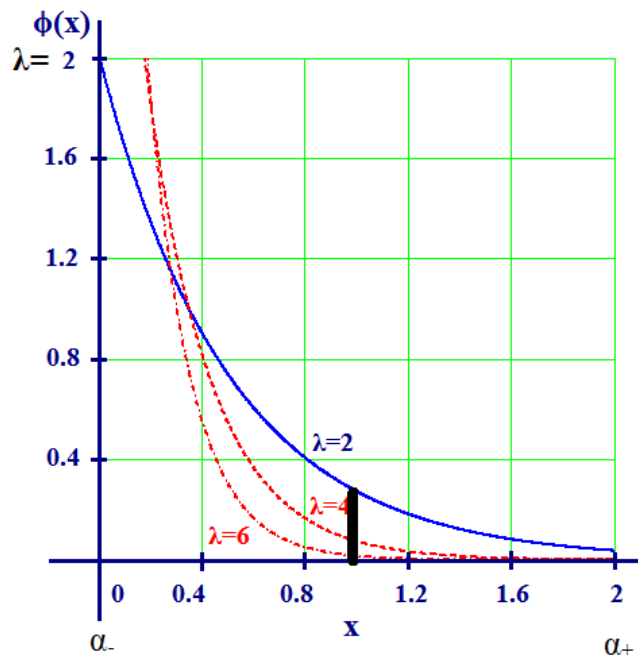


Рисунок 1.2 – Експоненціальний закон розподілу

г) для арксинусного закону розподілу (рис. 1.3)

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{8}}; \quad (1.13)$$

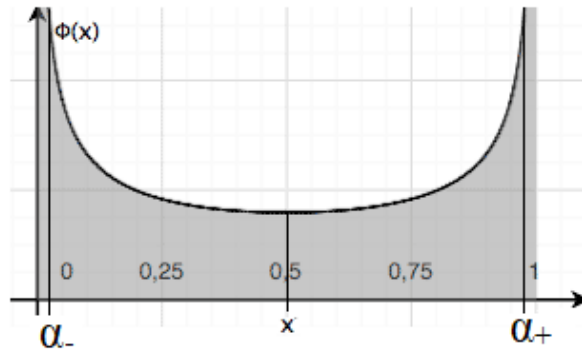


Рисунок 1.3 – Арксинусний закон розподілу

д) для рівномірного закону розподілу (рис. 1.4)

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}; \quad (1.14)$$

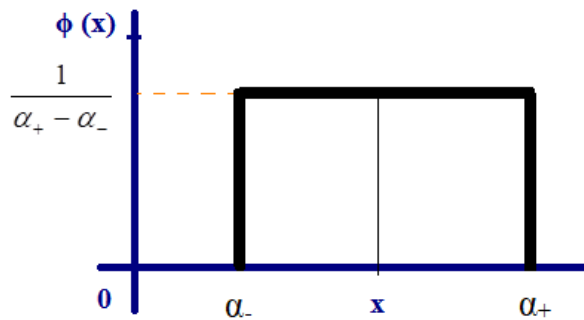


Рисунок 1.4 – Рівномірний закон розподілу

е) для розподілу Парето

$$u_B(X_i) = \frac{x_m}{k-1} \sqrt{\frac{k}{k-2}}, \quad (1.15)$$

де  $x_m$  – початкове значення величини  $X_i$ ;

$k$  – параметр розподілу (значення щільності для  $x_m$ ) [13].

Для заданих інтервалів  $U_p$  з відомим рівнем довіри  $p$ , в припущенні нормального закону розподілу, непевність типу В визначається за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{U_p}{k_p}, \quad (1.16)$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу, дорівнює 1,64; 1,96; 2,58 і 3 для довірчих рівнів 0,9; 0,95; 0,99 і 0,9973 [1–10].

Наприклад, для результату вимірювання, що описується нормальним законом розподілу, стандартну непевність типу В для довірчого рівня  $p = 99,73\%$  (рис. 1.5) можна оцінити за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{6}.$$

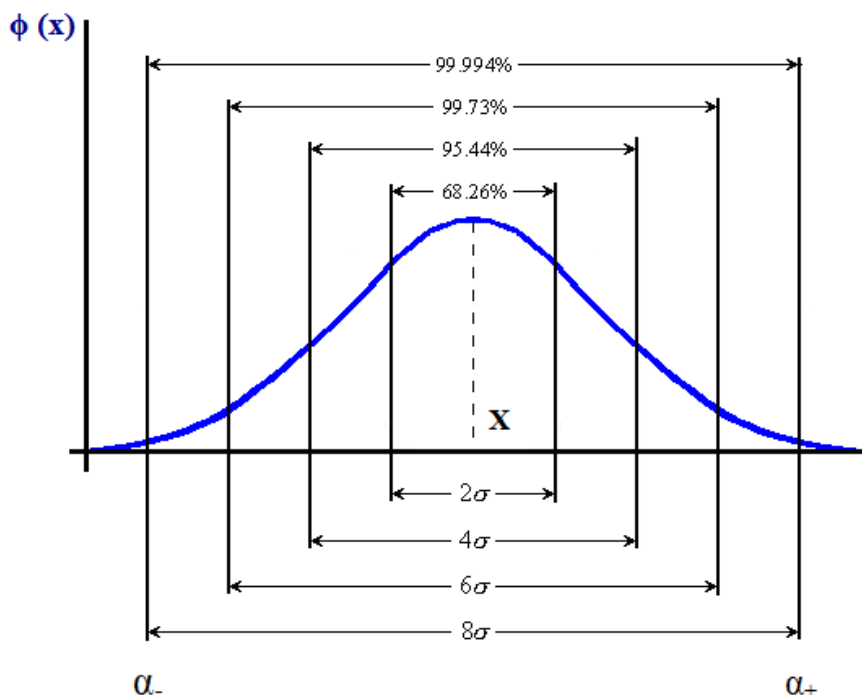


Рисунок 1.5 – Нормальний закон розподілу

Для симетричних меж  $\pm \alpha_i$  стандартну непевність типу В при відсутності інформації про закон розподілу вхідної величини  $X_i$  можна визначити за формулою

$$u_B(X_i) = \frac{2\alpha_i}{\sqrt{12}} = \frac{\alpha_i}{\sqrt{3}}. \quad (1.17)$$

Вираз для визначення стандартної непевності зчитування показів з аналогової шкали засобу вимірювання (ЗВ), в припущенні про рівномірний закон розподілу, має вигляд

$$u_B(X_i) = \frac{\left(x + \frac{C}{4}\right) - \left(x - \frac{C}{4}\right)}{\sqrt{12}} = \frac{C}{4\sqrt{3}}, \quad (1.18)$$

де  $x$  – виміряне значення величини;

$C$  – ціна поділки шкали засобу вимірювання [1].



Якщо шкала нерівномірна, то стандартну непевність визначають окремо для кожного діапазону, для якого визначена ціна поділки.

**1.2.2 Форма подання комбінованої непевності за відсутності кореляційного зв'язку між вхідними величинами.** Стандартна непевність оцінки  $y$  вимірюваної величини  $Y$ , отже, результату вимірювання, утворюється шляхом відповідного підсумовування стандартних непевностей вхідних оцінок  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Така стандартна непевність оцінки  $y$  позначається як  $u_c(y)$  і називається комбінованою.

Кожну вхідну оцінку  $x_i$  і пов'язану з нею стандартну непевність  $u_c(x_i)$  одержують з розподілу можливих значень вхідної величини  $X_i$ . Цей розподіл вірогідності, як уже було сказано, може бути заснований на рядах спостережень  $X_{i,k}$  величин  $X_i$ , або він може бути апіорним розподілом.

Результати вимірювань вважаються некорельованими, коли всі вхідні величини є незалежними.

**Комбінована непевність** результату вимірювання  $u_c(y)$  є позитивним квадратним коренем із комбінованої дисперсії  $u_c^2(y)$ , яка розраховується за формулою [1, 5]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i), \quad (1.19)$$

де  $f$  – функція, що описує рівняння перетворення ЗВТ;

$u(x_i)$  – стандартна непевність, оцінена за типом А або за типом В, як було описано вище.

Комбінована непевність  $u_c(y)$  є оціненим стандартним відхиленням і характеризує розсіювання значень, які можуть бути з достатньою підставою приписані вимірюваній величині  $Y$ .

Частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  у виразі (1.19) дорівнюють  $\frac{\partial f}{\partial X_i}$  при  $X_i = x_i$ . Ці

похідні називаються **коефіцієнтами чутливості**, показують, як вихідна оцінка  $y$  змінюється зі зміною значень вхідних оцінок  $x_1, x_2, \dots, x_N$ . Зокрема, зміна в  $y$ , викликана невеличкою зміною  $\Delta x_i$  у вхідній оцінці  $x_i$ , визначається формулою  $(\Delta y)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (\Delta x_i)$ . Якщо ця зміна утворена

стандартною непевністю оцінки  $x_i$ , то відповідна зміна в  $y$  буде  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)$ .

Тому сумарну дисперсію  $u_c^2(y)$  можна розглядати як суму членів, кожний з

яких є оціненою дисперсією, пов'язаною з вихідною оцінкою  $y$ , викликаною оціненою дисперсією, пов'язаною з кожною вхідною оцінкою  $x_i$ . Це припускає запис рівняння (1.19) у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i \cdot u(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2(y), \quad (1.20)$$

де  $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $u_c(y) = |c_i| u(x_i)$ .

Частинні похідні  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i}$ , оцінені на сподіваннях  $X_i$ . Але на практиці

частинні похідні оцінюються як  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial X_i} \Big|_{x_1, x_2, \dots, x_N}$ .

Коефіцієнти чутливості  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  замість того, щоб розраховуватися з

функції  $f$  іноді визначаються експериментальним шляхом за допомогою вимірювань зміни в  $Y$ , викликаної зміною в обраному  $X_i$ , підтримуючи при цьому інші вхідні величини незмінними. У цьому випадку знання функції  $f$  зводиться до її емпіричного розкладення в ряд Тейлора першого порядку, заснованого на вимірних коефіцієнтах чутливості.

Якщо  $Y$  має вигляд  $Y = c X_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdot \dots \cdot X_N^{p_N}$  і відомо, що степені  $p_i$  є додатними або від'ємними числами, що мають малі непевності, то сумарну дисперсію, рівняння (1.20), можна виразити як

$$\left[ \frac{u_c(y)}{y} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right]^2. \quad (1.21)$$

Це рівняння має такий же вигляд, як і рівняння (1.20), але з комбінованою дисперсією  $u_c^2(y)$ , вираженою як відносна комбінована

дисперсія  $\left[ \frac{u_c(y)}{y} \right]^2$  і оціненою дисперсією  $u_c^2(x_i)$ , пов'язаною з кожною

вхідною оцінкою, вираженою як оцінена відносна дисперсія  $\left[ \frac{u(x_i)}{x_i} \right]^2$ .

Комбіновані непевності для різних видів рівнянь вимірювань зведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Комбіновані непевності для рівнянь вимірювань різного виду

Рівняння вимірювання	Комбіновані непевності
$Y = X_1 \pm X_2 \pm \dots \pm X_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N u^2(x_i)}$
$Y = C_1 X_1 \pm C_2 X_2 \pm \dots \pm C_N X_N$	$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N C_i^2 u^2(x_i)}$
$Y = \prod_{i=1}^N X_i = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_N$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{u^2(x_i)}{x_i^2}}$ , де $u_{cb}(y) = \frac{u_c(y)}{y}$ , $u_b(x_i) = \frac{u(x_i)}{x_i}$
$Y = \frac{X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4}{X_5 \cdot X_6 \cdot X_7 \cdot X_8}$	
$Y = X_1 / X_2 / X_3 / \dots / X_N$	
$Y = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 + X_4 \cdot X_5 \cdot X_6 + \dots + X_{N-2} \cdot X_{N-1} \cdot X_N$	$u_c^2(y) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^2 (u_b^2(x_1) + u_b^2(x_2) + u_b^2(x_3)) +$ $+(x_4 \cdot x_5 \cdot x_6)^2 (u_b^2(x_4) + u_b^2(x_5) + u_b^2(x_6)) + \dots +$ $+(x_{N-2} \cdot x_{N-1} \cdot x_N)^2 (u_b^2(x_{N-2}) + u_b^2(x_{N-1}) + u_b^2(x_N))$ де $u_b(x_N) = u(x_N)/x_N$
$Y = X^m$	$u_c(y) = m \cdot x^{m-1} u(x)$ , $u_{cb}(y) = u_c(y)/y = mu(x)/x$
$Y = \ln(X_1/X_2) = \ln X_1 - \ln X_2$	
$Y = \ln(X_1 X_2) = \ln X_1 + \ln X_2$	
$Y = (X_1 \pm X_2)(X_3 \pm X_4)$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\frac{u^2(x_1) + u^2(x_2)}{(x_1 + x_2)^2} + \frac{u^2(x_3) + u^2(x_4)}{(x_3 + x_4)^2}}$
$Y = (X_1 \pm X_2)/(X_3 \pm X_4)$	
$Y = X_1^m \pm X_2^z$	$u_c(y) = \sqrt{[m \cdot x_1^{m-1} u(x_1)]^2 + [z \cdot x_2^{z-1} u(x_2)]^2}$
$Y = X_1^m \cdot X_2^z$	$u_{cb}(y) = \sqrt{\left(m \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(z \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
$Y = X_1^m / X_2^z$	
$Y = (X_1^m \pm X_2^z) / (X_3^k \pm X_4^p)$	$u_{cb}^2(y) = \frac{(mx_1^{m-1}u(x_1))^2 + (zx_2^{z-1}u(x_2))^2}{(x_1^m + x_2^z)^2} +$ $+\frac{(kx_3^{k-1}u(x_3))^2 + (px_4^{p-1}u(x_4))^2}{(x_3^k + x_4^p)^2}$
$Y = (X_1^m \pm X_2^z) \cdot (X_3^k \pm X_4^p)$	

**1.2.3 Форма подання комбінованої непевності за наявності кореляційного зв'язку між вхідними величинами.** Рівняння (1.19) і ті рівняння, що виведені з нього, (1.20) та (1.21), справедливі лише в тому випадку, якщо вхідні величини  $X_i$  незалежні або некорельовані. Якщо які-

небудь із  $X_i$  значною мірою корельовані, то кореляцію необхідно брати до уваги.

Коли вхідні величини корельовані, то вираз для комбінованої дисперсії  $u_c^2(y)$ , пов'язаної з результатом вимірювання, буде мати вигляд [1–10]

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_i, x_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \quad (1.22)$$

де  $x_i$  і  $x_j$  – є оцінками  $X_i$  і  $X_j$ ;

$u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  є оціненою коваріацією  $x_i$  і  $x_j$ .

Коваріація – властивість пари випадкових змінних величин, яка для двох неперервних випадкових величин  $X_1$  і  $X_2$ , що характеризуються спільною функцією густини ймовірності  $p(x)$ , виражається формулою [1]

$$u(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (1.23)$$

При дискретних рівноточних вхідних вимірюваних величинах коваріація розраховується за формулою

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N_j} (x_{i_l} - \bar{x}_i)(x_{j_l} - \bar{x}_j). \quad (1.24)$$

Ступінь кореляції між  $x_i$  і  $x_j$  характеризується оціненим коефіцієнтом кореляції [1, 2]

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} = \frac{\sum_{l=1}^{N_j} (x_{i_l} - \bar{x}_i)(x_{j_l} - \bar{x}_j)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{N_j} (x_{i_l} - \bar{x}_i)^2 \sum_{l=1}^{N_j} (x_{j_l} - \bar{x}_j)^2}}, \quad (1.25)$$

де  $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$  – коефіцієнт кореляції, який може знаходитися в таких межах  $-1 < r(x_i, x_j) < +1$ . Якщо оцінки  $x_i$  і  $x_j$  незалежні, то  $r(x_i, x_j) = 0$ , і зміна однієї з них не означає очікуваної зміни іншої.

У термінах коефіцієнтів кореляції, які легше зрозуміти, ніж коваріації, вираз для комбінованої дисперсії (1.22) можна записати у вигляді

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) u(x_j) r(x_i, x_j). \quad (1.26)$$

У випадку, коли всі вхідні оцінки корельовані з коефіцієнтами кореляції  $r(x_i, x_j) = 1$ , рівняння (1.22) зводиться до вигляду

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N [c_i u(x_i)]^2 = \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} u(x_i) \right]^2. \quad (1.27)$$

Таким чином, комбінована непевність  $u_c(y)$  є позитивним квадратним коренем із лінійної суми членів, що являють собою дисперсію вихідної оцінки  $y$ , викликану стандартною непевністю кожної вхідної оцінки  $x_i$ . Цю лінійну суму не варто плутати з загальним законом поширення похибок, хоча вони і мають схожу форму; стандартні непевності не є похибками.

Якщо функція перетворення  $Y$  має вигляд полінома  $Y = c X_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdot \dots \cdot X_N^{p_N}$  і вхідні величини  $X_i$  корельовані, то праву частину рівняння (1.21) потрібно доповнити виразом

$$2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left[ \frac{p_i u(x_i)}{x_i} \right] \left[ \frac{p_j u(x_j)}{x_j} \right] r(x_i, x_j). \quad (1.28)$$

Кореляції між вхідними величинами не можна ігнорувати, якщо вони є і значні. Пов'язані з ними коваріації слід оцінювати експериментально, змінюючи корельовані вхідні величини за типом А або використовуючи всю наявну інформацію про корельовану змінність даних величин за типом В. Правильне розуміння, що базується на минулому експерименті і загальних знаннях, особливо необхідне при оцінюванні степеня кореляції між вхідними величинами, що виникає через такі загальнозпливані ефекти, як температура навколишнього середовища, атмосферний тиск і вологість. На щастя, у багатьох випадках ефекти таких впливів мають малий взаємозв'язок, так що можна припустити, що вхідні величини, зазнаючи таких впливів, некорельовані. Проте якщо не можна припустити, що вони некорельовані, самі кореляції можуть бути вилучені, якщо загальні впливи введені в рівняння вимірювання як додаткові незалежні вхідні величини [1, 4].

Кореляція між двома вхідними величинами може існувати, якщо при їх визначенні використовують один і той же ЗВТ, фізичний еталон вимірювання або довідкові дані, що мають значну непевність. Наприклад, якщо поправка на температуру, що необхідна для оцінювання вхідної величини  $X_i$ , отримується за допомогою деякого термометра, і така ж поправка на температуру, необхідна для оцінювання вхідної величини  $X_j$ , теж отримується за допомогою цього ж термометра, то дві вхідні величини можуть бути корельовані. Проте, якщо  $X_i$  і  $X_j$  визначаються як величини без поправок, або якщо величини, які визначають калібрувальну криву

термометра, внесені в рівняння вимірювання як додаткові вхідні величини з незалежними стандартними непевностями, кореляція між  $X_i$  і  $X_j$  усувається.

**1.2.4 Форма подання розширеної непевності.** Міжнародний стандарт ISO/IEC GUIDE 98-3:2008 [3] та Рекомендація об'єднаного Комітету керівників з метрології JCGM 100:2008 [2] підтримують використання комбінованої непевності  $u_c(y)$  як параметра для кількісного подання непевності результату вимірювання, контролю чи випробування.

Хоча комбінована непевність  $u_c(y)$  може повсюдно використовуватися для подання непевності результату вимірювання, контролю чи випробування, проте в окремих випадках: у торгівлі, промисловості і регулювальних актах, а також коли справа стосується здоров'я і безпеки, доцільно додатково вказувати інтервальну міру непевності, що визначає інтервал для результату дослідження. Існування такої вимоги було визнано Рекомендацією JCGM 100:2008 [2].

Додаткова міра непевності, що відповідає інтервальній оцінці непевності, називається **розширеною непевністю** і позначається символом  $U$ . Розширену непевність одержують шляхом множення комбінованої непевності  $u_c(y)$  на коефіцієнт охоплення  $k_p$  [1–7]

$$U = k_p \cdot u_c(y). \quad (1.29)$$

Результат вимірювання записується у вигляді  $Y = y \pm U$ , це означає, що найкращою оцінкою значення, яке приписується величині  $Y$ , є величина  $y$ , і що інтервал від  $y - U$  до  $y + U$  містить велику частину розподілу значень, які можна з достатньою підставою приписати вимірюваній величині  $Y$ . Такий інтервал також можна подати у вигляді  $y - U \leq Y \leq y + U$  [1, 4].

Терміни «довірчий інтервал» і «довірчий рівень» мають в статистиці спеціальні означення і застосовуються до інтервалу, що визначається  $U$ , лише у тому випадку, коли виконані певні умови, враховуючи умову, що всі складові непевності, що входять в  $u_c(y)$ , були отримані з оцінювання за типом А. У концепції непевності, при розгляді  $U$  як інтервалу в околі результату вимірювання, що містить велику частину розподілу ймовірності  $p$ , є довірчим рівнем для цього інтервалу [1, 4].

Значення коефіцієнта охоплення  $k_p$  вибирається на основі рівня довіри, що потрібен інтервалу від  $y - U$  до  $y + U$ . Як правило, коефіцієнт охоплення  $k_p$  знаходиться в діапазоні від 2 до 3. Проте в особливих випадках  $k_p$  може виходити за межі цього діапазону. Багатий досвід і повне знання способів застосування результату вимірювання може прискорити вибір потрібного значення коефіцієнта охоплення  $k_p$ .

В ідеальному випадку хотілося б мати можливість вибрати конкретне значення коефіцієнта охоплення  $k_p$ , що забезпечувало б інтервал  $Y = y \pm U$  ( $Y = y \pm k_p \cdot u_c(y)$ ), відповідало б обраному рівню довіри, такому як 95 або 99%. Так само, для заданого значення  $k_p$  хотілося б мати можливість чітко зазначити рівень довіри, пов'язаний з цим інтервалом. Проте це нелегко здійснити на практиці, оскільки потребує повного знання розподілу ймовірностей, що характеризуються результатом вимірювання  $y$  і його комбінованою непевністю  $u_c(y)$ . Хоча ці параметри мають велику значимість, самі по собі вони недостатні для того, щоб встановити інтервали, що мають точно відомі рівні довіри.

Якщо вимірювана величина  $Y$  є єдино нормально розподіленою величиною  $X$ ,  $Y = X$ ; і якщо як оцінка  $X$  береться середнє арифметичне  $\bar{X}$  від незалежних спостережень  $X_k$  величини з експериментальним стандартним відхиленням середнього  $s(\bar{X})$ , то найкращою оцінкою  $Y$  є  $y = \bar{X}$  і експериментальним стандартним відхиленням цієї оцінки є  $u_c(y) = s(\bar{X})$ , то розширена непевність  $U$ , яка визначає інтервал від  $y - U$  до  $y + U$ , що зручно записувати як  $Y = y \pm U$ , дорівнюватиме

$$U = k_p \cdot u_c(y) = t_p(\nu) \cdot u_c(y), \quad (1.30)$$

де  $t_p(\nu)$  – коефіцієнт з розподілу Стюдента для ймовірності охоплення  $p$  та числа ступенів вільності  $\nu = n - 1$  [1–5].

Число ступенів вільності  $\nu$  дорівнює  $n - 1$  для єдиної величини, оціненої середнім арифметичним із  $n$  незалежних спостережень.

У міру того, як  $\nu \rightarrow \infty$ ,  $t$ -розподіл наближається до нормального і наближені значення коефіцієнта Стюдента можна розрахувати за формулою

$$t_p(\nu) \approx k_p (1 + 2/\nu)^{1/2}, \quad (1.31)$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, необхідний для одержання інтервалу з рівнем довіри  $p$  для нормально розподілу.

Для того, щоб одержати точніше наближення для оцінки розширеної непевності, необхідно скористатися  $t$ -розподілом. Але в загальному випадку  $t$ -розподіл не буде описувати  $(y - Y)/u_c(y)$ , якщо  $u_c^2(y)$  є сумою двох або більше оцінених компонентів дисперсії  $u_i(y) = c_i^2 \cdot u^2(x_i)$ , навіть якщо кожне  $x_i$  – оцінка нормально розподіленої вхідної величини  $X_i$ . Проте розподіл цієї змінної може бути апроксимований  $t$ -розподілом при числі ефективних ступенів вільності  $\nu_{eff}$ , отриманим з формули Велча-Саттерсвейта

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4(y)}{v_i}}. \quad (1.32)$$

При окремому опрацюванні стандартних непевностей за типом А і за типом В необхідно додатково до  $v_{eff}$  розрахувати і повідомляти також значення  $v_{effA}$  і  $v_{effB}$ , обчислені з рівняння (1.32) [1–5].

При підсумовуванні непевностей середніх значень вхідних величин, визначуваних за типом А, число ступенів вільності  $\nu$  необхідно вибирати рівним  $n-1$ .

При підсумовуванні непевностей вхідних величин, що визначались за типом В, число ступенів вільності  $\nu$  приймається рівним нескінченності  $\nu_i \approx \infty$ .

Якщо комбінована непевність  $u_c(y)$  оцінюється окремо за типом А  $u_{c_A}(y)$  і за типом В  $u_{c_B}(y)$ , то згадані величини пов'язані співвідношеннями  $u_c^2(y) = u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)$ . З урахуванням цього, вираз (1.32) можна записати в такому вигляді

$$v_{eff} = (n-1) \frac{[u_{c_A}^2(y) + u_{c_B}^2(y)]^2}{u_A^4(y)}. \quad (1.33)$$

**1.2.5 Форма подання відносних непевностей.** Враховуючи те, що відносна величина – це відношення двох однорідних фізичних величин, відносною непевністю називають відношення стандартної, комбінованої або розширеної непевності до оцінки досліджуваної величини. Вирази для визначення відносної стандартної, відносної комбінованої та відносної розширеної непевності мають вигляд [1, 4, 5]:

$$\tilde{u}_{A(B)} = \frac{u_{A(B)}(x)}{|x|}, \text{ при } |x| \neq 0; \quad (1.34)$$

$$\tilde{u}_c = \frac{u_c(y)}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0; \quad (1.35)$$

$$\tilde{U} = \frac{U}{|y|}, \text{ при } |y| \neq 0. \quad (1.36)$$

Зазначені вище відносні непевності можуть виражатися не тільки у відносних величинах, але й у відсотках. Для цього рівняння (1.34)–(1.36) необхідно домножити на 100%.



### 1.3 Методика оцінювання непевності результатів динамічних вимірювань

При складанні звіту щодо результатів динамічних вимірювань необхідно подати кількісне значення якості експерименту так, щоб можна було правильно оцінити його надійність [1, 14–20]. Без такого значення результати динамічних вимірювань не можна порівняти ні між собою, ні з аналогічними результатами, виконаними провідними лабораторіями світу. При виконанні динамічних вимірювань фізичних величин завжди виникає перехідний режим роботи засобів вимірювання, при якому сигнал на його виході суттєво змінюється в часі [18, 21–23]. Дана обставина пояснюється інерційними властивостями засобів вимірювання, оскільки вони складаються, в загальному випадку, з набору різних мас і пружин, ємностей та індуктивностей або інших інерційних елементів, які зумовлюють появу непевностей в динамічних режимах роботи [1, 18]. Крім того, в цифрових засобах вимірювання спостерігається запізнення сигналу, обумовлене кінцевим часом його перетворення в цифровий код. Це приводить до того, що рівняння перетворення засобів вимірювання, яке відображає його статику, в динамічному режимі є неприйнятним. В такому випадку переходять до диференціальних рівнянь, які описують динамічний взаємозв'язок вихідної  $y(t)$  і вхідної  $x(t)$  величин засобів вимірювання. При складанні диференціальних рівнянь у праву частину записують вхідні сигнали, тобто причину, що привела засоби вимірювання у дію, а в ліву частину диференціального рівняння – вихідний сигнал (реакцію засобу вимірювання) [18–23]

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t), \quad (1.37)$$

де  $x(t)$ ,  $y(t)$  – відповідно, вхідна та вихідна величини;

$i, k$  – порядок похідних;

$a, b$  – коефіцієнти, що характеризують властивості засобу вимірювання.

Для подання диференціального рівняння в частотній області, символ диференціювання за координатою часу  $\frac{d}{dt}$  замінимо на  $j\omega$ , і тоді рівняння

(1.37) набуває вигляду

$$\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = S_0 \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + 1}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + 1},$$

або

$$y(j\omega) = S(j\omega)x(j\omega), \quad (1.38)$$

де  $y(j\omega)$ ,  $x(j\omega)$  – відповідно, спектральні функції вихідного та вхідного вимірюваних сигналів;

$S_0 = b_0/a_0$  – статична чутливість, тобто чутливість до постійної вхідної величини (при  $j\omega = 0$ );

$S(j\omega)$  – передатна функція засобу вимірювання або операторна чутливість.

Найхарактернішими для засобів вимірювання є динамічні характеристики, які описуються диференціальними рівняннями першого і другого порядків, а в окремих випадках третього та вищих порядків [17–23].

Інформація про динамічні характеристики має міститися в нормативно-технічних документах на засоби вимірювання, якщо ж така інформація відсутня, то її можна отримати на основі апріорних даних про засоби вимірювання.

**Непевністю динамічного вимірювання називається складова непевності, яка обумовлена реакцією засобу вимірювання на частоту (швидкість) зміни вимірюваної величини (вхідного сигналу), що залежить від динамічних властивостей засобу вимірювання і частотного спектра вхідного сигналу**[1, 16–18].

Якщо рівняння перетворення засобу вимірювання, що працює в динамічному режимі, можна подати у вигляді

$$Y = K_C X, \quad (1.39)$$

де  $X$  – значення фізичної величини, що вимірюється (вхідний сигнал);

$K_C$  – коефіцієнт перетворення засобу вимірювальної техніки (ЗВТ);

$Y$  – результат вимірювання (вихідний сигнал),

то математичне очікування вхідного сигналу буде дорівнювати  $M[X]$ , а математичне очікування вихідного сигналу буде дорівнювати

$$M[Y] = K_C M[X], \quad (1.40)$$

де  $M[Y]$  і  $M[X]$  – відповідно, математичні очікування вихідного і вхідного сигналів ЗВТ.

Спектральна щільність вхідного сигналу  $X(t)$  має вигляд [17–19]

$$N_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2T)^{-1} |X(j\omega)|^2 \quad (1.41)$$

де  $X(j\omega)$  – зображення Фур'є, що отримується шляхом заміни в операторному зображенні сигналу  $X(s)$  значення  $s$  на  $j\omega$ ;

$T$  – час спостереження;

$\omega = 2\pi f$ .

Вираз для спектральної щільності вихідного сигналу може бути поданий таким чином

$$H_Y(\omega) = \lim(2T)^{-1} |Y(j\omega)|^2 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (1.42)$$

Відношення зображень вихідної і вхідної величин утворює вираз для передатної функції ЗВТ [19]

$$K_C(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^m B_k s^k}{\sum_{q=0}^n A_q s^q}, \quad (1.43)$$

де  $Y(s)$ ,  $X(s)$  – операторні зображення вихідного  $Y(t)$  і вхідного  $X(t)$  сигналів, відповідно;

$k$ ,  $q$  – порядок похідних від  $Y$  і  $X$ , відповідно;

$A_q$ ,  $B_k$  – коефіцієнти диференціального рівняння.

Спектральна щільність потужності похибки, що обумовлює появу непевності, приведеної до входу, буде дорівнювати [19]

$$H_{\Delta X}(\omega) = \left| \frac{K_C(j\omega)}{K_C} - 1 \right|^2 H_X(\omega), \quad (1.44)$$

де  $K_C$  – частотна характеристика ЗВТ при  $\omega = 0$ .

А спектральна щільність вихідного сигналу описується виразом [17–20]

$$H_Y(\omega) = |K_C(j\omega)|^2 H_X(\omega), \quad (1.45)$$

де  $K_C(j\omega)$  – частотна характеристика ЗВТ.

Стандартне відхилення вихідного сигналу  $Y$  в частотній області при динамічних вимірюваннях можна оцінити як квадратний корінь з інтеграла від спектральної щільності вихідного сигналу на всіх частотах [17–20]

$$\begin{aligned} \sigma_Y(\omega) &= \pi^{-1/2} \left( \int_0^{\pi F_s} |K_C(j\omega)|^2 H_X(\omega) d\omega \right)^{1/2} = \\ &= \pi^{-1/2} \left( (2T)^{-1} \int_0^{\pi F_s} |K_C(j\omega)|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

де  $|K_c(j\omega)|$  – модуль частотної характеристики ЗВТ, що можна використати як математичну модель ЗВТ при динамічних вимірюваннях для оцінювання динамічної непевності;

$F_s$  – частота дискретизації.

Аналогічно, стандартне відхилення похибки в частотній області, що обумовлює появу динамічної непевності, буде описуватися виразом [19, 20]

$$\sigma_{\Delta X}(\omega) = \pi^{-1/2} \left( (2T)^{-1} \int_0^{\pi F_s} \left| \frac{K_c(j\omega)}{K_c} - 1 \right|^2 |X(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (1.47)$$

Модуль частотної характеристики ЗВТ визначається за формулою

$$|K_c(j\omega)| = (a^2(\omega) + b^2(\omega))^{1/2}, \quad (1.48)$$

де  $a(\omega)$ ,  $b(\omega)$  – дійсна і уявна частини частотної характеристики ЗВТ  $K_c(j\omega)$ , відповідно до [17–20].

Спектральна функція вхідного сигналу  $X(j\omega)$  пов'язана зі своєю часовою функцією  $X(t)$  виразом Лапласа

$$X(j\omega) = \int_0^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.49)$$

де  $\omega$  – циклічна частота [1].

При скінченному інтервалі часу знак нескінченності може бути замінений на сумарний час спостереження  $T$  [1].

Для подання непевності динамічних вимірювань в часовій області  $u_D(t)$  необхідно виконати обернену трансформацію Фур'є за виразом [17–20]

$$\begin{aligned} u_D(t) &= \pi^{-1/2} \int_0^{\pi F_s} \sigma_{\Delta X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \pi^{-1/2} \left[ \int_0^{\pi F_s} \sigma_{\Delta X}(\omega) \cos(\omega t) d\omega + j \int_0^{\pi F_s} \sigma_{\Delta X}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Оскільки вираз (1.50) складається з дійсної та уявної частин, і при оцінюванні непевності цікавить саме амплітудне (найбільше) значення динамічної непевності, то вираз (1.50) можна подати у вигляді модуля

$$|u_D(t)| = \left[ \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} \sigma_{\Delta X}(\omega) \cos(\omega t) d\omega \right)^2 + \left( \int_0^{\pi F_s} \pi^{-1/2} \sigma_{\Delta X}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (1.51)$$

Таким чином, амплітудне значення непевності, що вноситься за рахунок інерційних властивостей використовуваного під час динамічних вимірювань ЗВТ, можна оцінити нестатистичним методом в часовій області на основі модельного рівняння спектральної функції вхідного сигналу і частотної характеристики використовуваного ЗВТ за виразом (1.51).

#### 1.4 Порівняльний аналіз двох підходів щодо вираження характеристик точності вимірювань

Метою вимірювань є отримання оцінки істинного значення вимірюваної величини. Поняття похибки вимірювання як різниці між результатом вимірювань і істинним (дійсним, опорним) значенням вимірюваної величини використовується для опису точності вимірювань в нормативних документах з метрології в галузі забезпечення єдності вимірювань. Говорячи про оцінювання похибки, в метрологічній практиці мають на увазі оцінювання її характеристик (рис. 1.6) [1, 10].

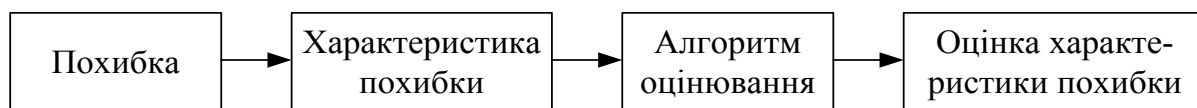


Рисунок 1.6 – Підхід, що використовується при оцінюванні характеристик похибок вимірювань

В Керівництві для вираження точності вимірювань вживається поняття непевності вимірювань. Непевність вимірювань розуміють як неповне знання значення вимірюваної величини, і для кількісного вираження цієї неповноти вводять розподіл ймовірностей можливих (обґрунтовано приписаних) значень вимірюваної величини. Таким чином, параметр цього розподілу (непевність) кількісно характеризує точність результату вимірювань [1].

Однаковими для обох підходів є такі послідовності операцій при оцінюванні характеристик похибки і непевності вимірювань:

- аналіз рівняння вимірювання;
- виявлення всіх джерел похибки (непевності) вимірювань і їх кількісне оцінювання;
- введення поправок на систематичні похибки (ефекти), які можна вилучити.

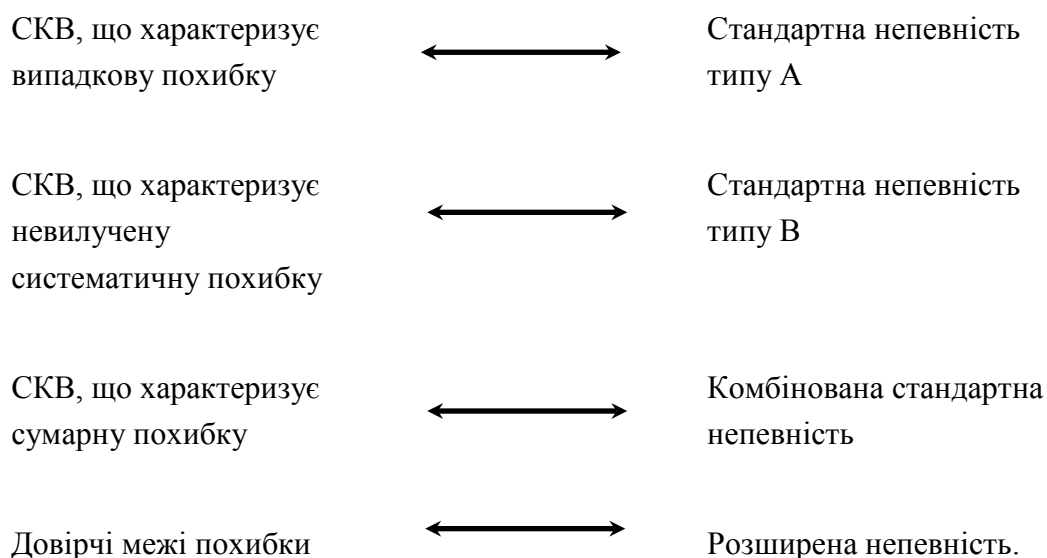
Методи обчислення непевності, як і методи оцінювання характеристик похибки, запозичені з математичної статистики, але при цьому

використовуються різні інтерпретації закону розподілу ймовірностей випадкових величин. Окрім викладених в Керівництві з вираження непевності вимірювань і в чинних нормативних документах з метрології методів розрахунку непевності та оцінювання характеристик похибки на практиці широко використовуються й інші методи.

Розбіжності двох підходів проявляються в тлумаченні непевності і характеристик похибки, що засноване на різних інтерпретаціях ймовірностей: частотної та суб'єктивної. Наприклад, довірчі межі похибки  $(y-\Delta_p; y+\Delta_p)$  (відкладені від результату вимірювання) покривають істинне значення вимірюваної величини з заданою довірчою ймовірністю (частотна інтерпретація ймовірності). В той же час аналогічний інтервал  $(y-U_p; y+U_p)$  тлумачиться в Керівництві з вираження непевності вимірювань як інтервал, який вміщує задану частку розподілу значень, які б могли бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині (суб'єктивна інтерпретація ймовірності) [1].

В загальному випадку не існує однозначної відповідності між випадковими похибками і непевностями, обчисленими за типом А, а також невилученими систематичними похибками і непевностями, обчисленими за типом В. Поділ на систематичні і випадкові похибки обумовлений природою їх виникнення і проявом в ході вимірювального експерименту, а поділ на непевності, що розраховуються за типом А і за типом В, – методами їх розрахунку.

При зіставленні оцінок характеристик похибки і непевностей результатів вимірювань рекомендується така схема відповідності [1, 4]:



Процедура оцінювання характеристик похибки результату вимірювань наведена в табл. 1.2 [1, 10].

Таблиця 1.2 – Процедура оцінювання характеристик похибки

<b>Похибка</b>	$\Delta y = y_e - y_i \Leftrightarrow y_e = y_i + \Delta y$		
<b>Модель похибки</b>	$\Delta y$ – випадкова величина зі щільністю розподілу ймовірності $p(x, M, \sigma^2)$ , де $M$ – математичне очікування; $\sigma^2$ – дисперсія.		
<b>Характеристики похибки</b>	$S$ – середньоквадратичне відхилення	$\Theta$ – межі невилученої систематичної похибки	$\Delta_p$ – довірчі межі
<b>Початкові дані для оцінювання характеристик похибки</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Модель об'єкта дослідження.</li> <li>2. Експериментальні дані <math>x_{iq}</math>, де <math>q = 1, \dots, n</math>; <math>i = 1, \dots, m</math>.</li> <li>3. Інформація про закони розподілу.</li> <li>4. Відомості про джерела похибок, їх природу і характеристики складових (<math>S(x_i)</math>, <math>\Theta_i</math>).</li> <li>5. Стандартні довідкові дані та інші довідкові матеріали.</li> </ol>		
<b>Методи оцінювання характеристик:</b>			
<b>а) випадкових похибок</b>	$S(x_{iq}) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}}; \quad S(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{(n_i - 1)n_i}}; \quad S_\Sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s^2(\bar{x}_i)}.$		
<b>б) невилучених систематичних похибок</b>	$\Theta(p) = k \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Theta_i^2},$ <p>де <math>k = 1,1</math> при <math>p = 0,95</math>; <math>k = 1,4</math> при <math>p = 0,99</math> і <math>m &gt; 4</math>.</p>		
<b>в) сумарної похибки</b>	$\Delta_p = \frac{t_p(f_{eff}) S_\Sigma + \Theta(p)}{S_\Sigma + \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\Theta_i^2}{3}}} \sqrt{S_\Sigma^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\Theta_i^2}{3}},$ <p>при виконанні нерівності <math>0,8 \leq \frac{\Theta(p)}{S_\Sigma} \leq 8,0</math>; <math>\Delta_p = t_p(f_{eff}) S_\Sigma</math>,</p> <p>при <math>\frac{\Theta(p)}{S_\Sigma} &lt; 0,8</math>, тобто нехтують систематичною складовою похибки; <math>\Delta_p = \Theta(p)</math>, при <math>\frac{\Theta(p)}{S_\Sigma} &gt; 8,0</math>, тобто нехтують випадковою складовою похибки;</p> $f_{eff} = \frac{\left(\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 s^2(\bar{x}_i)\right)^2 - 2 \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 s^4(\bar{x}_i)}{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4 s^4(\bar{x}_i)}.$		
<b>Форма подання характеристик похибки</b>	$\Theta(p)$ , $S_\Sigma$ , $n$ , $f_{eff}$ , $\Delta_p$ .		
<b>Інтерпретація отриманих результатів</b>	Інтервал $(-\Delta_p; +\Delta_p)$ з ймовірністю $p$ має похибку вимірювання, що рівнозначно тому, що інтервал $(y - \Delta_p; y + \Delta_p)$ з ймовірністю $p$ має істинне значення вимірюваної величини.		

Процедура оцінювання непевності вимірювань наведена в табл. 1.3 [1, 10].

Таблиця 1.3 – Процедура оцінювання непевності вимірювань

<b>Модель непевності</b>	ε – випадкова величина зі щільністю розподілу ймовірності p(x, y, u <sup>2</sup> ), де y – математичне очікування; u <sup>2</sup> – дисперсія.		
<b>Непевність (кількісна міра)</b>	Стандартна U	Комбінована $u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^m u_i^2}$	Розширена U <sub>p</sub> = k u <sub>c</sub>
<b>Початкові дані для оцінювання непевності</b>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Модель об'єкта дослідження.</li> <li>2. Експериментальні дані x<sub>iq</sub>, де q = 1, ..., n; i = 1, ..., m.</li> <li>3. Інформація про закони розподілу.</li> <li>4. Відомості про джерела непевності та інформація про значення непевності.</li> <li>5. Стандартні довідкові дані та інші довідкові матеріали.</li> </ol>		
<b>Методи оцінювання непевності:</b>			
<b>а) за типом А</b>	$u_{A, i} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}};$ $u_A(\bar{x}_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i} (x_{iq} - \bar{x}_i)^2}{(n_i - 1)n_i}}.$		
<b>б) за типом В</b>	$u_B(x_i) = \frac{\alpha_+ - \alpha_-}{\sqrt{12}}.$		
<b>в) розширеної непевності</b>	$U_p = t_p(v_{eff}) \sqrt{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)},$ <p>де <math>v_{eff} = \frac{u_s^4}{\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^4 \frac{u^4(x_i)}{v_i}}</math>,</p> <p>причому v<sub>i</sub> = n<sub>i</sub> - 1 – для непевностей типу А; v<sub>i</sub> = ∞ – для непевностей типу В.</p>		
	<p>Для більшості практичних випадків можна прийняти:  U<sub>0,95</sub> = 2u<sub>c</sub>, U<sub>0,99</sub> = 3u<sub>c</sub> – для нормального закону;  U<sub>0,95</sub> = 1,65u<sub>c</sub>, U<sub>0,99</sub> = 1,71u<sub>c</sub> – для рівномірного закону.</p>		
<b>Форма подання непевності</b>	u <sub>c</sub> , U <sub>p</sub> , k, u <sub>i</sub> , v <sub>i</sub> .		
<b>Інтерпретація отриманих результатів</b>	Інтервал (y-U <sub>p</sub> ; y+U <sub>p</sub> ) містить велику частку (p) розподілу значень, які можуть бути обґрунтовано приписані вимірюваній величині.		



Якщо відсутня інформація для розрахунку непевності, то її оцінка  $\hat{u}$  може бути отримана на основі оцінок характеристик похибки за наведеними нижче схемами (рис. 1.7 і рис. 1.8).

$y$ – результат вимірювань;	$y$ – результат вимірювань;
$\Delta_p$ – довірчі межі похибки вимірювань;	$\hat{U}_p = \Delta_p$ – оцінка розширеної непевності;
$p$ – довірна ймовірність.	$\hat{u}_c = \frac{\Delta_p}{z_p}$ – оцінка сумарної стандартної непевності;
	$z_p$ – квантиль нормального розподілу.

Рисунок 1.7 – Схема оцінювання непевності через довірчі межі похибки вимірювань

$y$ – результат вимірювань;	$y$ – результат вимірювань;
$S$ – СКВ випадкової похибки результату вимірювань;	$\hat{u}_A = S$ – оцінка стандартної непевності типу А;
$\theta(p)$ – довірчі межі невилучених систематичних похибок результату вимірювань;	$\hat{u}_B = \frac{\theta(p)}{k\sqrt{3}}$ – оцінка стандартної непевності типу В, при цьому: $k = 1,1$ – при $p = 0,95$ ; $k = 1,4$ – при $p = 0,99$ і $m > 4$ ;
$m$ – кількість вхідних величин;	$\hat{u}_s = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2}$ – оцінка сумарної стандартної непевності;
$f_{eff}$ – оцінка ефективного числа ступенів вільності;	$\hat{v}_{eff} = f_{eff} \left(1 + \frac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2}\right)^2$ – оцінка ефективного числа ступенів вільності;
$f_{eff} = n - 1$ – при прямих вимірюваннях, де $n$ – кількість вимірювань.	$\hat{U}_p = t_p(\hat{v}_{eff})\hat{u}_s$ – оцінка розширеної непевності.

Рисунок 1.8 – Схема оцінювання непевності через СКВ випадкової похибки результату вимірювання і довірчі межі невилучених систематичних похибок

Схеми, що наведені на рис. 1.7 та 1.8, відповідають двом різним способам подання результатів вимірювань, прийнятих в нормативних документах з метрології. Необхідно відмітити, що оцінки непевностей, які отримуються за наведеними вище двома схемами, в низці випадків можуть не збігатися зі значеннями непевностей, що розраховуються за наведеними в підрозділах 1.1 і 1.2 способами оцінювання.

Оцінити непевність типу А і типу В окремо, знаючи тільки  $\Delta_p$ , неможливо.

**1.4.1 Методика перерахунку характеристик похибок в характеристики непевності вимірювань.** При зіставленні результатів вимірювань і оцінок їх достовірностей, які здійснювались різними способами, виникає задача перерахунку характеристик похибок в характеристики непевності та навпаки. Тому розглянемо методику перерахунку і мінімальний набір параметрів, що необхідні для здійснення такого перерахунку.

Спосіб перерахунку, що наведений на рис. 1.8, дозволяє розрахувати розширену непевність, використовуючи відомі характеристики випадкової та систематичної похибок для рівних рівнів довіри і довірчої ймовірності. Але довірчі межі похибок первинних та вторинних еталонів необхідно оцінювати для довірчої ймовірності 0,99. Саме у таких випадках краще скористатися формулами для взаємного перерахунку довірчої похибки і розширеної непевності.

Вихідними даними для перерахунку характеристик похибки в характеристики непевності є: довірчі межі загальної похибки вимірювання  $\Delta_p$ ; довірна ймовірність  $P$ ; відношення  $\gamma = \Theta(p)/S_\Sigma$  довірчих меж невилученої систематичної похибки  $\Theta(p)$  до середньоквадратичної випадкової похибки  $S_\Sigma$ ; кількість повторюваних вимірювань  $n$ ; кількість невилучених підсумовуваних систематичних похибок  $m$  [1, 5].

Для перерахунку довірчих меж похибки прямих одноразових вимірювань, відомих із ймовірністю 0,95 або 0,99; у розширену непевність з рівнем довіри 0,95 потрібно скористатися такими виразами [5, 10]:

- для похибки з ймовірністю  $P = 0,95$

$$U_{0,95} = \begin{cases} \Delta_{0,95} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{2\Delta_{0,95}}{K[\gamma + 2]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8; \\ 2\Delta_{0,95} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (1.52)$$

- для похибки з ймовірністю  $P = 0,99$  [14]

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99}}{1,3} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{K[\gamma + 2,6]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3d^2}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \frac{2\Delta_{0,99}}{d} \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3d^2}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (1.53)$$

де  $d$  – корегувальний коефіцієнт, який для  $P = 0,99$  дорівнює 1,2 при  $m = 2$ ; 1,3 при  $m = 3$ ; 1,4 при  $m = 4$ ; 1,45 при  $m > 4$ ;

$K$  – коефіцієнт, значення якого, залежно від  $P$  і  $\gamma$ , наведено в таблиці 1.4 [5].

Таблиця 1.4 – Значення коефіцієнта  $K$  для різних  $P$  і  $\gamma$

$\gamma$	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_{0,95}$	0,76	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81
$K_{0,99}$	0,84	0,82	0,80	0,81	0,82	0,83	0,83	0,84	0,85

При перерахунку довірчих меж похибки прямих багаторазових вимірювань, відомих з вірогідністю 0,95 або 0,99; у розширену непевність з рівнем довіри 0,95 необхідно використати такі формули [5]:

- для похибки з ймовірністю  $P = 0,95$

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{eff})}{t_{0,95}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{\Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{eff})}{K[\gamma + t_{0,95}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{3,63}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8; \\ \Delta_{0,95} t_{0,95}(v_{eff}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{3,63}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (1.54)$$

- для похибки із ймовірністю  $P = 0,99$  [14]

$$U_{0,95} = \begin{cases} \frac{\Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{eff})}{t_{0,99}(n-1)} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } \gamma < 0,8 \\ \frac{\Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{eff})}{K[\gamma + t_{0,99}(n-1)]} \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{5,88}}, & \text{при } 0,8 \leq \gamma \leq 8, \\ \Delta_{0,99} t_{0,95}(v_{eff}) \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{5,88}}, & \text{при } \gamma > 8 \end{cases} \quad (1.55)$$

де  $t_{0,95}(v_{eff}), t_p(n-1)$  – коефіцієнти Стюдента, відповідно для ймовірності  $p$ , кількості ступенів вільності  $(n-1)$  та ефективної кількості ступенів вільності  $v_{eff}$ , яка визначається за формулою [1, 5]

$$v_{eff} = (n-1) \left[ 1 + \frac{\gamma^2}{3d^2} \right]^2. \quad (1.56)$$

Відповідно до міжнародних нормативних документів при поданні результату вимірювання за міру непевності може бути вказана розширена або комбінована непевність.

При поданні результату вимірювання розширеною непевністю вказуються такі характеристики:

- результат вимірювання  $y$ ;
- розширена непевність  $U_p$ ;
- коефіцієнт охоплення  $k_p$ ;
- рівень довіри  $p$ ;
- кількість стандартних непевностей типу В (для  $p = 0,99$ ) [2, 5].

В такому випадку оцінки довірчих меж похибок прямих одноразових вимірювань можна отримати з формул (1.53) та (1.55).

Додатково до перерахованих характеристик для розрахунку похибок багаторазових вимірювань потрібно знати:

- кількість спостережень  $n$ ;
- ефективну кількість ступенів вільності  $v_{eff}$ .

При цьому можна отримати [2, 5]:

- оцінку середньоквадратичного відхилення, що характеризує сумарну похибку

$$S_{\Sigma} = \frac{U_p}{k_p} = u_s; \quad (1.57)$$

- оцінку середньоквадратичного відхилення (СКВ) випадкової похибки

$$S = u_A = S_{\Sigma} \sqrt[4]{\frac{n-1}{v_{eff}}}; \quad (1.58)$$

- оцінку СКВ, що характеризує невилучену систематичну похибку,

$$S_{\Theta} = u_B = \sqrt{S_{\Sigma}^2 - S^2}; \quad (1.59)$$

- оцінку довірчих меж невилученої систематичної похибки

$$\Theta(P) = kS_{\Theta} \sqrt{3}; \quad (1.60)$$

- оцінку довірчих меж похибки

$$\Delta_p = \frac{t_p(n-1)S + \Theta(P)}{S + S_{\Theta}} S_{\Sigma}. \quad (1.61)$$

При відсутності ефективної кількості ступенів вільності її можна отримати через значення коефіцієнта охоплення  $k_p$  з таблиці розподілу Стьюдента.

**1.4.2 Методика перерахунку характеристик непевності в характеристики похибки.** В міждержавному нормативному документі РМГ 43-2001 сказано, що оцінка непевності результату вимірювання може подаватися у вигляді комбінованої непевності або у вигляді розширеної непевності, якщо вимірювання стосуються здоров'я людини чи екології.

Якщо оцінка непевності результату вимірювання була подана у вигляді комбінованої непевності, то, відповідно до пунктів 5.3 та 5.4 РМГ 43-2001 [24], можна перерахувати такі характеристики непевності в характеристики похибки:

- оцінку стандартної непевності типу А  $u_A(\bar{x})$  – в оцінку СКВ випадкової похибки  $S(\bar{x})$ , тобто  $S(\bar{x}) = u_A(\bar{x})$ ;

- оцінку стандартної непевності типу В  $u_B$  – в оцінку СКВ невилученої систематичної похибки  $\Theta(p)$ , тобто  $\Theta(p) = u_B$ ;

- оцінку комбінованої непевності  $u_c(y)$  – в оцінку СКВ, що характеризує сумарну похибку  $S_{\Sigma}$ , тобто  $S_{\Sigma} = u_c(y)$ .

Якщо ж оцінка непевності результату вимірювання була подана у вигляді розширеної непевності, то перераховуються такі характеристики непевності в характеристики похибки:

- оцінка розширеної непевності  $U_p$  – в оцінку довірчих меж похибки  $\Delta_p$ , тобто  $\Delta_p = U_p = k u_c(y)$ ;

- оцінка комбінованої непевності  $u_c(y)$  – в оцінку СКВ, що характеризує сумарну похибку  $S_{\Sigma}$ , тобто  $S_{\Sigma} = U_p/k$ .

## 2 ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ КОНЦЕПЦІЇ НЕПЕВНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

### 2.1 Оцінювання непевності вимірювання надлишкового тиску газоподібного середовища за допомогою манометра МП-50М

Проводиться вимірювання з багаторазовими спостереженнями надлишкового тиску газоподібного середовища за допомогою манометра МП-50М. Покази манометра  $P$  складають, МПа: 15; 16; 15; 14; 15; 16; 17; 14; 15; 16; 14; 15; 16; 15; 13; 16; 17; 16; 15; 16.

Необхідно оцінити непевність вимірювання тиску при довірчому рівні  $p = 0,95$  в припущенні про нормальний закон розподілу результатів вимірювань.

Складаємо специфікацію вимірювань:

а) аналізуємо умови вимірювань:

- вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;

б) аналізуємо технічні характеристики засобу вимірювання:

- робочі умови застосування засобу вимірювання: температура навколишнього повітря від  $-30$  до  $+50\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;

- верхня межа вимірювання складає  $P_n = 25$  МПа;

- клас точності засобу вимірювання тиску складає 2,5.

Перевіримо результати вимірювань на наявність грубих промахів.

Для цього розрахуємо:

- середнє арифметичне отриманих результатів

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^n P_k}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{20} P_k}{20} = 15,3 \text{ МПа};$$

- стандартне відхилення результатів від середнього арифметичного значення (непевність типу А)

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (P_k - \bar{P})^2}{n-1}} = 1,03 \text{ МПа};$$

- інтервал непевності, що відповідає довірчому рівню 0,95 в припущенні про нормальний закон розподілу результатів спостережень

$$U = 1,96u_A = 2,02 \text{ МПа};$$

- межі цього інтервалу для результатів спостережень складають:

$$P_{\min} = 13,28 \text{ МПа}; P_{\max} = 17,32 \text{ МПа.}$$

Отже, як показують розрахунки, найменший результат спостереження зі значенням 13 МПа виходить за межі довірчого інтервалу, і тому вилучається з числа результатів спостереження як такий, що обтяжений промахом чи грубою похибкою.

Таким чином, після перевірки результатів вимірювань на наявність промахів і вилучення їх з результатів спостережень, обчислимо середнє арифметичне виправлених результатів спостережень, що приймається за результат вимірювання,

$$\bar{P} = \frac{\sum_{k=1}^{19} P_k}{19} = 15,42 \text{ МПа.}$$

Далі перераховуємо експериментальне стандартне відхилення результату спостереження (непевність типу А), яка дорівнює

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{19} (P_k - \bar{P})^2}{19 - 1}} = 0,9 \text{ МПа.}$$

Оскільки за результат багаторазових вимірювань приймають середнє значення  $\bar{P}$ , то важливо оцінити саме його дисперсію. Найкраща оцінка дисперсії середнього значення знаходиться за виразом (1.3). Тому експериментальна непевність типу А результату вимірювання (середнього значення) складатиме

$$u_A(\bar{P}) = \sqrt{\frac{u_A^2}{n}} = 0,21 \text{ МПа.}$$

Відносну стандартну непевність типу А розрахуємо за виразом (1.34) і отримаємо

$$\tilde{u}_A = \frac{u_A(\bar{P})}{\bar{P}} 100\% = \frac{0,21}{15,42} 100\% = 1,36\%.$$

Далі перейдемо до оцінювання стандартної непевності типу В, що вноситься за рахунок технічних обмежень засобу вимірювання.

Як відомо, непевність типу В може оцінюватися на основі інформації, що наведена у специфікації виробника (паспорті), довідкових даних, даних попередніх вимірювань, даних про вигляд розподілу ймовірностей тощо.

Оскільки зі специфікації виробника відомо, що клас точності засобу вимірювання тиску складає 2,5; то стандартну непевність типу В, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, що вноситься засобом вимірювання тиску за рахунок обмеженої точності  $\gamma$  цього засобу вимірювання, можна оцінити за виразом

$$u_B = \frac{|\Delta|}{\sqrt{3}}, \quad (2.1)$$

де  $\Delta$  – межі абсолютної похибки, яку в даному випадку можна розрахувати через клас точності за виразом

$$\Delta = \frac{\gamma P_n}{100\%} = \frac{2,5}{100} 25 = 0,63 \text{ МПа.}$$

Підставляючи розраховане значення абсолютної похибки у рівняння (2.1) для визначення стандартної непевності типу В, що вноситься засобом вимірювання тиску за рахунок обмеженого класу точності  $\gamma$ , отримаємо стандартну непевність типу В, що дорівнює 0,36 МПа, а відносна стандартна непевність типу В дорівнює  $\tilde{u}_B = u_B 100\% / \bar{P} = 2,33\%$ .

Комбіновану стандартну непевність результату вимірювання тиску розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\bar{P}) + u_B^2} = \sqrt{0,21^2 + 0,36^2} = 0,42 \text{ МПа.}$$

Відносна комбінована непевність результату вимірювання розраховується за виразом (1.35) і дорівнює

$$\tilde{u}_c = \frac{u_c}{\bar{P}} 100\% = \frac{0,42}{15,42} 100\% = 2,72\%.$$

Ефективне число ступенів вільності визначається для розрахунку розширеної непевності результату вимірювання за виразом

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4}{\frac{u_A^4}{\nu_A} + \frac{u_B^4}{\infty}}, \quad (2.2)$$



де  $\nu_i$  – число ступенів вільності, яке при розрахунку непевності типу А дорівнює  $n - 1$ , а при розрахунку непевності типу В дорівнює нескінченності ( $\nu_i = \infty$ ).

Таким чином, при підставленні розрахованих значень комбінованої непевності і непевності типу А у вираз (2.2), ефективне число ступенів вільності складає

$$\nu_{eff} = (n - 1) \frac{u_c^4}{u_A^4} = (19 - 1) \frac{0,42^4}{0,21^4} = 288.$$

Задавшись довірчим рівнем  $p = 0,95$  розрахуємо розширену непевність за формулою (1.30) з урахуванням кількості проведених вимірювань  $n = 19$  та ефективного числа ступенів вільності, яке  $\nu_{eff} \gg 30$ . Коефіцієнт розподілу Стюдента при цьому приймається рівним 1,96.

Таким чином, розширена непевність результату вимірювання тиску складає

$$U_{0,95} = 1,96u_c = 0,82 \text{ МПа}.$$

Отже, результат вимірювання тиску запишемо у вигляді

$$P = \bar{P} \pm U_p = 15,42 \pm 0,82 \text{ МПа}, p = 0,95,$$

або

$$14,60 \leq P \leq 16,24 \text{ МПа}, p = 0,95.$$

## 2.2 Оцінювання непевності вимірювання сили електричного струму

Схема вимірювань показана на рис. 2.1 [1, 24].

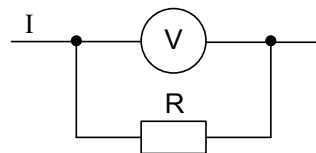


Рисунок 2.1 – Схема вимірювання сили струму

Рівняння вимірювань має вигляд

$$I = f(V, R) = \frac{V}{R}, \quad (2.3)$$

де  $I$  – сила струму;  $V$  – напруга;  $R$  – опір шунта.

В результаті вимірювання напруги отримані такі значення  $V_i$  в мілівольтах:

100; 100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,6; 100,68; 100,76; 100,64 при температурі  $t = (23 \pm 0,05) ^\circ\text{C}$ .

На основі отриманих значень напруги обчислимо її середнє значення за виразом

$$\bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i = 100,72 \text{ мВ.}$$

Значення опору шунта встановлено при калібруванні для  $I = 10 \text{ А}$  і  $t = 23,0 ^\circ\text{C}$  та дорівнює  $R_0 = 0,010088 \text{ Ом}$ .

Результат вимірювань сили струму отримаємо за формулою (2.3)

$$I = \frac{\bar{V}}{R_0} = 9,984 \text{ А.}$$

Визначимо середньоквадратичне відхилення (СКВ) середньо-арифметичного значення напруги  $S(\bar{V})$ , що характеризує випадкову складову похибки при вимірюваннях напруги

$$S(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \text{ мВ.}$$

Тоді відносне значення середньоквадратичного відхилення (СКВ)  $\bar{V}$  буде дорівнювати

$$\tilde{S}(\bar{V}) = \frac{S(\bar{V})}{\bar{V}} = 0,034\%.$$

Межі невилученої систематичної похибки вольтметра визначені при його калібруванні у вигляді такого виразу (у виразах для меж похибок при рівних значеннях відхилень будемо нехтувати знаком  $\pm$ )

$$\theta_V = 3 \cdot 10^{-4} V + 0,02 \text{ мВ.}$$

Тоді при  $V = \bar{V}$  отримуємо

$$\begin{aligned} \theta_V &= 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ мВ,} \\ \tilde{\theta}_V &= 0,050 \%. \end{aligned}$$

Межі невилученої систематичної похибки значення опору шунта, визначені при його калібруванні, дорівнюють

$$\tilde{\theta}_R = 0,070\%.$$

Тоді при  $R = R_0$  отримуємо:  $\theta_R = 7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0 = 7,1 \cdot 10^{-6}$  Ом.

Межі невилученої систематичної складової похибки значення опору шунта, які обумовлені похибкою вимірювання температури, знаходимо з формули

$$R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)], \quad (2.4)$$

де  $R_0$  – значення опору при  $t = t_0$  ( $t_0 = 23,00$  °C;  $R_0 = 0,010088$  Ом);

$\alpha$  – температурний коефіцієнт ( $\alpha = 6 \cdot 10^{-6} K^{-1}$ ).

Якщо межі вимірювання температури дорівнюють  $\Delta t$ , то межі відповідної складової похибки значення опору дорівнюють

$$\theta_{R,t} = \alpha \Delta t \cdot R.$$

При  $\Delta t = 0,05$  °C отримуємо

$$\theta_{R,t} = 3,0 \cdot 10^{-9} \text{ Ом}, \quad \tilde{\theta}_{R,t} = 3,0 \cdot 10^{-5}\%.$$

Цю складову похибки можна далі не враховувати, оскільки вона має мале числове значення порівняно з іншими складовими.

Для додавання невилучених систематичних похибок робимо припущення про рівномірний закон розподілу їх всередині меж  $\theta_V$  і  $\theta_R$ . Тоді СКВ сумарної невилученої систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \frac{\theta_R^2}{3}}, \quad (2.5)$$

де  $\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$  – коефіцієнти чутливості.

Тоді отримуємо

$$S_\theta = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \frac{\theta_V^2}{3} + \left(\frac{\bar{V}}{R^2}\right)^2 \frac{\theta_R^2}{3}} = 5,0 \cdot 10^{-3} A,$$

$$\tilde{S}_\theta = 0,05\%.$$

Довірчі межі сумарної невилученої систематичної складової похибки результату вимірювань сили струму при ймовірності  $p = 0,95$  оцінюємо за виразом

$$\theta(0,95) = 1,1 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \theta_V^2 + \left(\frac{-V}{R^2}\right)^2 \cdot \theta_R^2} = 9,5 \cdot 10^{-3} A.$$

$$\tilde{\theta}_{(0,95)} = 0,95\%.$$

СКВ випадкової складової похибки результату вимірювань сили струму визначаємо за формулою

$$S = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot S(\bar{V}) = 3,4 \cdot 10^{-3} A.$$

$$\tilde{S} = 0,034\%.$$

СКВ сумарної похибки результату вимірювань сили струму обчислюємо за формулою

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S^2 + S_{\theta}^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} A,$$

$$\tilde{S}_{\Sigma} = 0,060\%.$$

Довірчі межі похибки результату вимірювань сили струму при  $p = 0,95$  і числі ефективних ступенів вільності  $\nu_{eff} = n - 1 = 9$  обчислюємо за формулою

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(9)S + \theta(0,95)}{S + S_{\theta}} \cdot S_{\Sigma} = 0,012 A,$$

$$\tilde{\Delta}_{0,95} = 0,012\%.$$

За типом А обчислюємо стандартну непевність, обумовлену джерелом непевності, що має випадковий характер.

Стандартну непевність вимірювання напруги, обумовлену джерелом непевності, що має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}}, \quad (2.6)$$

$$u_A(V) = 3,4 \cdot 10^{-2} mB,$$

$$\tilde{u}_A = 0,034\%.$$

Стандартну непевність вимірювання сили струму, обумовлену джерелом непевності, що має випадковий характер, визначаємо за формулою

$$u_A = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot u_A(V) = 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ А}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{u}_A = 0,034\%.$$

За типом В обчислюємо стандартні непевності, обумовлені джерелами непевності, що мають систематичний характер. Закон розподілу всередині меж вважаємо рівномірним.

Межі систематичного зміщення при вимірюваннях напруги, які визначені при калібруванні вольтметра, дорівнюють  $3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{V} + 0,02$ . Тоді відповідну стандартну непевність обчислюємо за формулою

$$u_{B,V} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{V} + 0,02}{\sqrt{3}} = 2,9 \cdot 10^{-2} \text{ мВ}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{u}_{B,V} = 0,029\%.$$

Межі, всередині яких лежить опір шунта, визначені при калібруванні шунта і дорівнюють  $7 \cdot 10^{-4} \cdot R$ . Тоді при  $R = R_0$  відповідну стандартну непевність обчислюємо з виразу

$$u_{B,R} = \frac{7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ Ом},$$

$$\tilde{u}_{B,R} = 0,040\%.$$

Межі зміни значення опору шунта, обумовленого зміною температури, дорівнюють  $\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0$ . Відповідну стандартну непевність отримуємо згідно з формулою

$$u_{B,t} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 1,7 \cdot 10^{-9} \text{ Ом},$$

$$\tilde{u}_{B,t} = 1,7 \cdot 10^{-5}\%.$$

В подальшому цією складовою можна знехтувати.

Комбіновану непевність, обчислену за типом В, визначаємо з формули [24]

$$u_{cB} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 U_{B,V}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 U_{B,R}^2} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ А}, \quad (2.9)$$

$$\tilde{u}_B = 0,050\%.$$

Комбіновану непевність результату вимірювання обчислюємо так

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_{cB}^2} = 6,0 \cdot 10^{-3} A,$$

$$\tilde{u}_c = 0,060\%.$$

Ефективне число ступенів вільності визначаємо за формулою

$$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\frac{\left(\frac{1}{R} \cdot u_A\right)^4}{n-1} + \frac{\left(\frac{1}{R} \cdot u_{B,V}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{V}{R^2} \cdot u_{B,R}\right)^4}{\infty}} = 87. \quad (2.10)$$

Коефіцієнт охоплення для такого ефективного числа ступенів вільності складає  $k = t_{0,95}(v_{eff}) = 1,96$ .

Розширена непевність визначається за виразом

$$U_{0,95} = k \cdot u_c = 0,012 A,$$

$$\tilde{U}_{0,95} = 0,12\%.$$

Отже, результат вимірювань запишемо у вигляді [24]

$$I = 9,984 \pm 0,012; p = 0,95.$$

### 2.3 Оцінювання непевності багаторазових вимірювань частоти синусоїдального сигналу

*Проводиться вимірювання з багаторазовими спостереженнями частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення. Покази частотоміра  $f$  складають, Гц [1]: 50,8; 49,7; 48,2; 48,8; 48,5; 49,3; 49,9; 50,4; 56,1; 51,1; 49,4; 51,6; 51,9; 50,5; 50,8; 49,9; 50,2; 50,4; 50,1; 50,3; 50,1.*

*Необхідно оцінити непевність вимірювання частоти при довірчому рівні  $p = 0,95$ .*

Складаємо специфікацію вимірювань:

- вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $+ 23$  °С;
- клас точності засобу вимірювання частоти складає 0,25;
- температурний коефіцієнт зміни частоти кварцового резонатора не більше  $\pm 1,5 \cdot 10^{-6}$  на 1 °С.

Найкращою оцінкою багаторазових прямих рівноточних вимірювань, що дає змогу зменшити вплив випадкових складових похибки вимірювання кожного окремого спостереження, є середнє значення

$$\bar{f} = \frac{\sum_{k=1}^{20} f_k}{20} = 50,38 \text{ Гц.}$$

Стандартне відхилення результатів від середнього арифметичного складає

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n-1}} = 1,6 \text{ Гц.}$$

Перевіримо крайні члени ряду результатів вимірювань на наявність промахів. Для цього розрахуємо співвідношення:

$$s_1 = \frac{\bar{f} - f_{\min}}{u_A} = 1,36;$$

$$s_2 = \frac{f_{\max} - \bar{f}}{u_A} = 3,57.$$

Оскільки довірчий рівень приймається рівним  $p_d = 0,95$ , то для вибору допустимого значення нормованого відхилення розрахуємо параметр  $\alpha$ , який дорівнює  $\alpha = 1 - p_d = 1 - 0,95 = 0,05$ . За цим параметром і кількістю проведених вимірювань  $n = 20$  з табл. 2.1 вибираємо допустиме значення нормованого відхилення для крайніх членів ряду, яке складає  $s_{ДОП} = 2,56$ . Порівнюючи вибране допустиме значення  $s_{ДОП}$  з розрахованими  $s_1$  та  $s_2$  можна зробити нижченаведений висновок.

Оскільки параметр  $s_1$  менший за допустиме значення  $s_{ДОП}$ , то гіпотезу про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидають. Тобто, найменше значення результатів вимірювань не є аномальним. А при порівнянні допустимого значення  $s_{ДОП}$  з параметром  $s_2$  видно, що  $s_2 > s_{ДОП}$ . Це означає, що найбільше значення з ряду спостережень є промахом. Промахи потрібно вилучати з результатів спостережень. Тому відкидаємо найбільше значення частоти 56,1 Гц з результатів вимірювань і перераховуємо середнє значення частоти та стандартне відхилення

$$\bar{f} = \frac{\sum_{k=1}^{19} f_k}{19} = 50,1 \text{ Гц;}$$

$$u_{A2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n-1}} = 0,95 \text{ Гц.}$$

Таблиця 2.1 – Допустимі значення нормованих відхилень

Обсяг вибірки $n$	Надійність $\alpha$			
	0,100	0,075	0,050	0,025
3	1,15	1,15	1,15	1,15
4	1,42	1,44	1,46	1,48
5	1,60	1,64	1,67	1,72
6	1,73	1,77	1,82	1,89
7	1,83	1,88	1,94	2,02
8	1,91	1,96	2,03	2,13
9	1,98	2,04	2,11	2,21
10	2,03	2,10	2,18	2,29
11	2,09	2,14	2,23	2,36
12	2,13	2,20	2,29	2,41
13	2,17	2,24	2,33	2,47
14	2,21	2,28	2,37	2,50
15	2,25	2,32	2,41	2,55
16	2,28	2,35	2,44	2,58
17	2,31	2,38	2,48	2,62
18	2,34	2,41	2,50	2,66
19	2,36	2,44	2,53	2,68
20	2,38	2,46	2,56	2,71

Після цього знову перевіряємо крайні члени ряду спостережень на наявність промахів

$$s_1 = \frac{\bar{f} - f_{\min}}{u_{A2}} = 1,99;$$

$$s_2 = \frac{f_{\max} - \bar{f}}{u_{A2}} = 1,9.$$

Для значення  $\alpha$  і кількості проведених вимірювань  $n = 19$  з табл. 2.1 вибираємо нове допустиме значення нормованого відхилення для крайніх членів ряду, яке складає  $\epsilon_{\text{ДОП}} = 2,53$ . Порівнюючи допустиме значення



нормованого відхилення  $s_{ДОП} = 2,53$  із новими розрахованими значеннями  $s_1$  та  $s_2$ , видно, що вони є меншими за допустиме значення нормованого відхилення, а це означає, що крайні члени ряду результатів вимірювань не містять промахів.

Отже, оскільки промахи вилучені з результатів багаторазових вимірювань, то можна оцінити стандартну непевність типу А залежно від середнього значення

$$u_A(\bar{f}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (f_k - \bar{f})^2}{n(n-1)}} = \frac{u_{A2}}{\sqrt{n}} = 0,22 \text{ Гц.}$$

Оцінимо складові непевності, що вносяться за рахунок технічних обмежень та відхилення температури навколишнього середовища від нормальних умов.

Складову інструментальної непевності, що вноситься засобом вимірювання частоти за рахунок обмеженої точності  $\gamma$ , оцінимо за формулою

$$u_1 = \frac{\gamma_{\max}}{100\% \sqrt{3}} = 0,1 \frac{51,9}{173} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Складову непевності, що обумовлена зміною частоти кварцового резонатора при відхиленні температури навколишнього середовища від нормальної  $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $t_n = 23 \text{ }^\circ\text{C}$ , оцінимо через температурний коефіцієнт зміни частоти кварцового резонатора ( $k_t = \pm 1,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ) за формулою

$$u_2 = \bar{f} \frac{|t_n - t_1|}{\sqrt{3}} k_t = 50,1 \frac{(23 - 20)}{\sqrt{3}} 1,5 \cdot 10^{-6} = 0,13 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Комбіновану непевність типу В результату вимірювання оцінимо за виразом

$$u_{cB} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(75 \cdot 10^{-3})^2 + (0,13 \cdot 10^{-3})^2} = 75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Як показують розрахунки комбінованої непевності типу В, складовою непевності  $u_2$ , зважаючи на її мале значення, можна знехтували.

Комбіновану непевність результату багаторазових спостережень частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення розрахуємо за формулою

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\bar{f}) + u_{cB}^2} = 0,23 \text{ Гц.}$$

Задавшись довірчим рівнем  $p = 0,95$  (коефіцієнт охоплення  $k = 1,96$ ) розрахуємо розширену непевність за виразом

$$U = ku_c = 1,96 \cdot 0,23 = 0,45 \text{ Гц.}$$

Результат багаторазового вимірювання частоти синусоїдального сигналу електричної мережі загального призначення подамо у вигляді

$$f = 50,1 \pm 0,45 \text{ Гц, при } p = 0,95.$$

#### 2.4 Оцінювання непевності вимірювання віброприскорення при калібруванні акселерометра

В результаті калібрування п'єзоелектричного акселерометра на верхній межі вимірювання на нього діє еталонне віброприскорення зі значенням в один  $g$  ( $10 \text{ м/с}^2$ ). При цьому на виході акселерометра за допомогою прецизійного мілівольтметра отримано такі значення вихідної напруги у мілівольтах ( $i = 1, \dots, n; n = 10$ ): 0,5; 0,52; 0,51; 0,49; 0,5; 0,49; 0,51; 0,52; 0,5; 0,51.

Необхідно оцінити розширену непевність вимірювання віброприскорення при довірчій імовірності 0,95.

Рівняння перетворення п'єзоелектричного акселерометра має вигляд

$$g = \frac{U}{mS} = \frac{CU}{2d_{11}m}, \quad (2.11)$$

де  $U$  – напруга на виході акселерометра;

$m$  – маса акселерометра;

$S = 2d_{11}/C$  – чутливість акселерометра;

$C$  – ємність п'єзоелектричного перетворювача;

$d_{11}$  – п'єзоелектрична постійна, що описує основну чутливість п'єзозаряду, який генерується під час прикладання сили ( $d_{11} = 2,1 \cdot 10^{-12}$  ФВ/Н).

Із специфікації виробника відомо, що зведена похибка акселерометра складає  $\gamma = \pm 1\%$ , маса акселерометра складає  $m = 24 \pm 1$  г, чутливість акселерометра складає  $S = 2,1$  мВ/Н, а нестабільність ємності проводу (кабелю) складає  $\Delta C = \pm 80$  пФ.

На основі отриманих значень напруги обчислюємо середнє арифметичне значення напруги

$$\bar{U} = \frac{\sum_{i=1}^n U_i}{n} = 0,51 \text{ мВ.}$$

Оцінку результату опосередкованого вимірювання віброприскорення  $g$  розрахуємо за формулою (2.11)

$$\bar{g} = \frac{\bar{U}}{mS} = \frac{0,51}{0,024 \cdot 2,1} = 10,12 \text{ м/с}^2.$$

Стандартну непевність вимірювання напруги оцінимо за виразом

$$u_A(\bar{U}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2}{n(n-1)}} = 3,42 \text{ мкВ.}$$

Стандартну непевність вимірювання віброприскорення, що обумовлена джерелами непевності, які мають випадковий характер, оцінимо через стандартну непевність вимірювання напруги за виразом

$$u_A(\bar{g}) = \frac{\partial g}{\partial U} u_A(\bar{U}) = \frac{C}{2d_{11}m} u_A(\bar{U}) = 67,86 \cdot 10^{-3} \text{ м/с}^2.$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена обмеженням класом точності акселерометра  $\gamma = \pm 1\%$  в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки всередині меж визначимо так

$$u_{B,\gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{3}100\%} \bar{U} = \frac{1}{173} 0,51 = 2,95 \text{ мкВ.}$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена наявністю невилучених меж систематичної складової похибки вимірювання маси акселерометра  $\Theta_m = \pm 10^{-3}$  кг, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, розрахуємо за виразом

$$u_{B,m} = \frac{\Theta_m}{\sqrt{3}} = \frac{10^{-3}}{1,73} = 0,58 \text{ Г.}$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена нестабільністю ємності проводу (кабелю),  $\Delta C$  розрахуємо за виразом

$$u_{B,C} = \frac{\Delta C}{\sqrt{3}} = \frac{80}{1,73} = 46,24 \text{ пФ.}$$

Комбіновану непевність типу В з урахуванням коефіцієнтів чутливості розрахуємо за формулою

$$\begin{aligned} u_{c_B} &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial U}\right)^2 u_{B,\gamma}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial m}\right)^2 u_{B,m}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial C}\right)^2 u_{B,C}^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{C}{2d_{11}m}\right)^2 u_{B,\gamma}^2 + \left(-\frac{CU}{2d_{11}m^2}\right)^2 u_{B,m}^2 + \left(\frac{U}{2md_{11}}\right)^2 u_{B,C}^2}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Підставляючи значення коефіцієнтів чутливості і відповідні стандартні непевності типу В у рівняння (2.12), отримаємо значення комбінованої непевності типу В, що дорівнює  $u_{c_B} = 0,36 \cdot 10^{-12} \text{ м/с}^2$ .

Комбіновану непевність результату вимірювання віброприскорення розрахуємо так

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\bar{g}) + u_{c_B}^2} = 0,07 \text{ м/с}^2.$$

Коефіцієнт охоплення визначимо через ефективне число ступенів вільності та довірчий рівень  $p = 0,95$ .

$$v_{eff} = (n-1) \frac{u_c^4}{u_A^4} = 9 \frac{0,07^4}{67,86^4 \cdot 10^{-12}} = 10.$$

Для  $p = 0,95$  та  $v_{eff} = 10$ , коефіцієнт охоплення дорівнює  $k = 2,228$ .

Тоді розширену непевність опосередкованого вимірювання віброприскорення при калібруванні акселерометра розрахуємо так

$$U_{0,95} = k u_c = 0,16 \text{ м/с}^2.$$

Отже, результат вимірювання віброприскорення запишемо у вигляді

$$g = 10,12 \pm 0,16 \text{ м/с}^2, \text{ при } p = 0,95.$$

## 2.5 Оцінювання непевності вимірювання зусилля

Вимірювання зусилля виконувалося за допомогою ЗВТ, що описується таким рівнянням перетворення

$$Q = \frac{4RS_m h}{U_a U_m} \Delta U N, \quad (2.13)$$

де  $Q$  – зусилля (вимірювана величина);

$k$  – коефіцієнт підсилення операційного підсилювача ( $k = U_a / \Delta U = 40$ );

$\Delta U$  – напруга на виході сенсора зусилля (вхідна напруга масштабного перетворювача);

$U_a$  – напруга на виході масштабного перетворювача;

$S_T$  – чутливість сенсора зусилля;

$h$  – крок квантування АЦП;

$U_m$  – напруга, якою живиться мостова схема сенсора зусилля ( $U_m = 6,5 \text{ В} \pm 0,25 \text{ мВ}$ );

$R$  – опір мостової схеми тензорезисторів ( $R = 3,25 \pm 0,03 \text{ кОм}$ );

$N$  – кількість імпульсів на виході АЦП.

Структурна схема засобу вимірювання зусилля наведена на рис. 2.2.

Вимірювання виконувались в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $+ 25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

З технічної документації на ЗВТ відомо:

- дрейф напруги зміщення нуля масштабного перетворювача (операційного підсилювача) складає  $U_{zm} = 3 \text{ мкВ}/^\circ\text{C}$ ;

- розрядність АЦП  $m = 10$ ;

- допустиме відхилення напруги джерела живлення сенсора зусилля складає  $\theta_{U_m} = 0,25 \text{ мВ}$ ;

- допустиме відхилення опору мостової схеми сенсорів зусилля складає  $\theta_R = 0,03 \text{ кОм}$ ;

- температурний коефіцієнт опору складає  $\alpha_t = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}$ .

Необхідно оцінити непевність вимірювання зусилля на основі отриманих результатів спостережень  $Q_i$  в кілограмах ( $i = 1, \dots, n; n = 16$ ):

10,1; 10,3; 10,1; 10,2; 9,8; 10; 10,2; 10,5; 10,1; 9,7; 9,8; 9,9; 10,3; 10,4; 10; 9,7.

Оцінку результату вимірювання зусилля отримаємо так

$$\bar{Q} = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{n} = 10,07 \text{ кг.}$$

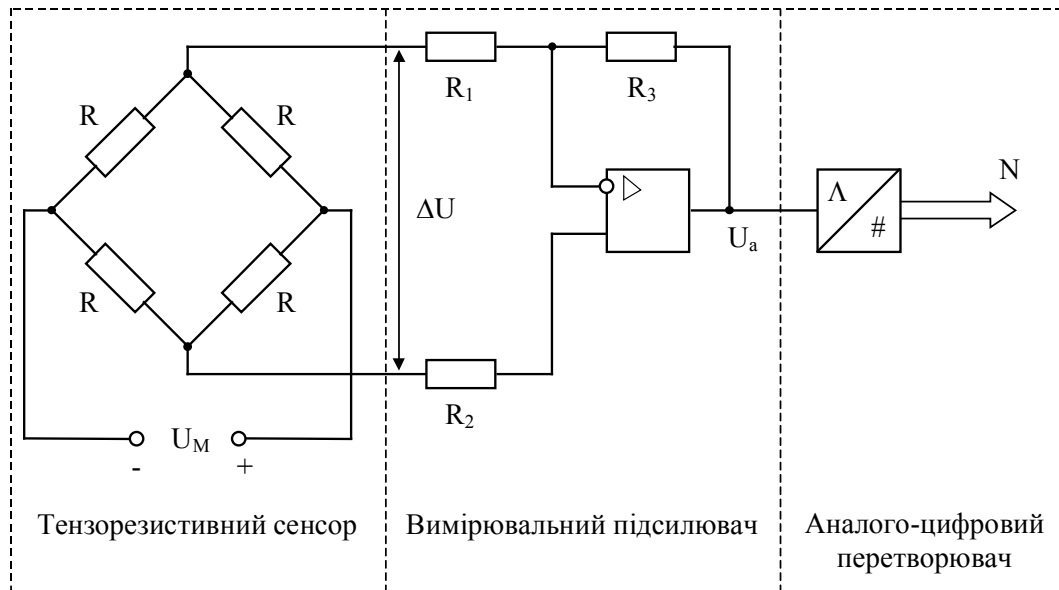


Рисунок 2.2 – Структурна схема засобу вимірювання зусилля

Стандартну непевність типу А результатів вимірювання зусилля  $Q_i$ , що обумовлені джерелами непевності та носять випадковий характер, розрахуємо за виразом

$$u_A(Q_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{(n-1)}} = 0,24 \text{ кг.}$$

Перевіримо крайні члени ряду результатів вимірювань на наявність промахів. Для цього розрахуємо параметри  $u_1$  та  $u_2$  [25]:

$$u_1 = \frac{\bar{Q} - Q_{\min}}{u_A(Q_i)} = 1,54;$$

$$u_2 = \frac{Q_{\min} - \bar{Q}}{u_A(Q_i)} = 1,79.$$

Прийmemo довірчий рівень рівним 0,95 та визначимо надійність  $\alpha = 1-p = 1 - 0,95 = 0,05$ . Залежно від кількості виконаних вимірювань ( $n=16$ ) з таблиці 2.1 виберемо допустиме значення нормованого відхилення, яке для даного випадку складає  $u_{\text{доп}} = 2,44$ .

Оскільки розраховані значення параметрів  $u_1$  та  $u_2$  менші за допустиме табличне значення  $u_{\text{доп}}$ , то гіпотеза про наявність аномальних результатів в ряді спостережень відкидається. Якщо значення одного або двох співвідношень було б більшим за допустиме значення  $u_{\text{доп}}$ , то необхідно

було б вилучати з результатів спостережень найменше або найбільше значення, оскільки це означало б, що в результатах вимірювань присутні промахи.

Стандартну непевність типу А, залежно від оцінки результату вимірювання, розрахуємо так

$$u_A(\bar{Q}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Q_i - \bar{Q})^2}{n(n-1)}} = 0,06 \text{ кг}.$$

Далі переходимо до оцінювання стандартних непевностей типу В, що вносяться за рахунок технічних обмежень засобу вимірювання зусилля.

Оскільки вимірювання зусилля виконувалися в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , яка відрізняється від температури нормальних умов  $t_n = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , а зі специфікації на засіб вимірювання зусилля відомо, що дрейф напруги зміщення нуля операційного підсилювача складає  $U_{zm} = 3 \text{ мкВ/}^\circ\text{C}$ , то стандартну непевність типу В, обумовлену дрейфом напруги зміщення нуля операційного підсилювача в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки всередині меж, визначимо так

$$u_{B,t} = \frac{k|t - t_n|}{\sqrt{3}} U_{zm} = 40 \frac{(25 - 20)}{1,73} 3 = 0,35 \text{ мВ}.$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена обмеженою розрядністю АЦП в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки всередині меж, визначимо так

$$u_{B,h} = \frac{h}{\sqrt{12}} = \frac{U_o / (2^m - 1)}{3,46} = 0,85 \text{ мВ},$$

де  $U_o$  – опорна напруга АЦП ( $U_o = 3 \text{ В}$ ).

Стандартну непевність типу В, що обумовлена відхиленням напруги джерела живлення сенсора зусилля від номінального значення, визначимо так

$$u_{B,\Theta u} = \frac{\Theta_{U_M}}{\sqrt{3}} = \frac{0,25}{1,73} = 0,14 \text{ мВ}.$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена невилученою систематичною похибкою значення опору мостової схеми, розрахуємо так

$$u_{B,R} = \frac{\Theta_R}{\sqrt{3}} = \frac{0,03}{1,73} = 17,34 \text{ Ом.}$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена температурною похибкою тензорезисторів при відхиленні температури навколишнього повітря від нормальних умов, можна розрахувати за допомогою рівняння, що визначає залежність опору від температури  $R = R_0 \cdot \alpha_t \cdot \Delta t$  за виразом [25]

$$u_{B,Rt} = \frac{\alpha_t |\Delta t|}{\sqrt{3}} R = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{|298 - 293|}{1,73} 3,25 \cdot 10^3 = 0,02 \text{ Ом.}$$

Комбіновану непевність типу В розрахуємо за формулою

$$u_{Bc} = \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial U_a}\right)^2 u_{B,t}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2 u_{B,h}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial U_m}\right)^2 u_{B,\Theta u}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial R}\right)^2 u_{B,R}^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial R}\right)^2 u_{B,Rt}^2}, \quad (2.14)$$

де  $\frac{\partial Q}{\partial U_a} = -\frac{4RS_m h}{kU_m U_a} N = -0,2 \frac{\text{к}\Omega}{\text{В}};$

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = \frac{4RS_m}{kU_m} N = 206,8 \frac{\text{к}\Omega}{\text{В}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial U_m} = -\frac{4RS_m h}{kU_m^2} N = -0,16 \frac{\text{к}\Omega}{\text{В}};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial R} = \frac{4S_m h}{kU_m} N = 0,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{к}\Omega}{\text{Ом}} \text{ – коефіцієнти чутливості.}$$

Підставляючи розраховані значення коефіцієнтів чутливості та відповідні стандартні непевності типу В у рівняння (2.14), отримаємо значення комбінованої непевності типу В, що дорівнює  $u_{Bc} = 0,16 \text{ к}\Omega$ .

Комбінована непевність результату вимірювання зусилля розраховується на основі експериментальної стандартної непевності типу А і комбінованої непевності типу В так

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_{Bc}^2} = 0,17 \text{ к}\Omega.$$

Ефективне число ступенів вільності розрахуємо так [1, 25]

$$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} = (n-1) \frac{u_c^4}{u_A^4} = 15 \frac{0,16^4}{0,06^4} = 759.$$



Коефіцієнт охоплення  $k$  визначається через ефективне число ступенів вільності  $\nu_{eff} \gg 30$  та довірчу ймовірність, яку прийнято рівною значенню  $p = 0,95$ , і складатиме  $k = 1,96$ .

Розширену непевність результату вимірювання зусилля розрахуємо на основі значень комбінованої непевності результату вимірювання і коефіцієнта охоплення

$$U_{0,95} = k u_c = 0,33 \text{ кг.}$$

Результат вимірювання зусилля подамо у вигляді

$$Q = \bar{Q} \pm U_p = 10,07 \pm 0,33 \text{ кг, при } p = 0,95.$$

На основі розрахованих непевностей можна скласти бюджет непевностей, що наведений в таблиці 2.2.

Таблиця 2.2 – Бюджет непевності

Вхідні величини	Оцінка вхідних величин	Стандартні непевності	Коефіцієнти чутливості	Вклади непевностей
$Q_i$	$\bar{Q}$	0,06 кг	1	$u_A(\bar{Q})$
$U_{3M}$	3 мкВ/°С	0,35 мВ	$-\frac{4RS_m h}{kU_M U_a} N$	$\frac{\partial Q}{\partial U_a} u_{B,t}$
$h$	2,93 мВ	0,85 мВ	$\frac{4RS_m h}{kU_M} N$	$\frac{\partial Q}{\partial h} u_{B,h}$
$\Theta_{UM}$	0,25 мВ	0,14 мВ	$-\frac{4RS_m h}{kU_M^2} N$	$\frac{\partial Q}{\partial U_i} u_{B,\Theta u}$
$\Theta_R$	30 Ом	17,34 Ом	$\frac{4S_m h}{kU_M} N$	$\frac{\partial Q}{\partial R} u_{B,R}$
$\alpha_t$	$2,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	0,02 Ом	$\frac{4S_m h}{kU_M} N$	$\frac{\partial Q}{\partial R} u_{B,Rt}$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Комбінована непевність	Коефіцієнт охоплення	Розширена непевність
$\bar{Q}$	10,07 кг	0,17 кг	1,96	0,33 кг

## 2.6 Оцінювання непевності вимірювання густини твердого тіла

Необхідно оцінити непевність вимірювання густини  $\rho$  твердого тіла за результатами вимірювання його об'єму  $V$  і маси  $m$  при рівні довіри  $p = 0,95$ .

Маса тіла вимірювалась шляхом багаторазового зважування з використанням набору зразкових тягарців, похибка яких не перевищує

$\Delta_m = 0,01$  мг. Об'єм тіла визначався методом гідростатичного зважування з використанням того ж набору тягарців. Результати вимірювань об'єму і маси наведені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3 – Результати вимірювань об'єму і маси

$i$	Об'єм тіла $V_i \cdot 10^{-6}$ , м <sup>3</sup>	Маса тіла $m_i \cdot 10^{-3}$ , кг
1	195,3799	252,9119
2	195,3830	252,9133
3	195,3790	252,9151
4	195,3819	252,9130
5	195,3795	252,9109
6	195,3788	252,9094
7	195,3792	252,9113
8	195,3794	252,9115
9	195,3791	252,9119
10	195,3791	252,9115
11	195,3794	252,9118

Рівняння перетворення має вигляд

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (2.15)$$

Визначимо середні значення результатів спостережень об'єму і маси

$$\bar{V} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n} = 195,38 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i}{n} = 252,91 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Результат вимірювання густини тіла визначимо за формулою (2.15)

$$\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} = 1,29 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

За типом А знайдемо стандартні непевності вимірювання об'єму і маси за виразами

$$u_A(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2}{n(n-1)}} = 4,05 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3;$$

$$u_A(\bar{m}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2}{n(n-1)}} = 4,40 \cdot 10^{-7} \text{ кг}.$$

Комбіновану непевність опосередкованого вимірювання густини (за типом А) розрахуємо за формулою

$$u_{cA}(\rho) = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)^2 u_A^2(\bar{V}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 u_A^2(\bar{m})}, \quad (2.16)$$

де  $\frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2} = -6625,37 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^6};$

$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V} = 5118,24 \frac{1}{\text{м}^3}$  - коефіцієнти чутливості.

Підставляючи значення стандартних непевностей типу А і коефіцієнти чутливостей у формулу (2.16), отримаємо комбіновану непевність, що дорівнює  $u_{cA}(\rho) = 3,50 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$ .

Стандартну непевність типу В, що обумовлена наявністю невилучених залишків систематичної похибки зразкових тягарців, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, розрахуємо так

$$u_B = \frac{\Delta_m}{\sqrt{3}} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3}}{1,73} = 5,78 \cdot 10^{-6} \text{ кг}.$$

Стандартну непевність типу В результату вимірювання густини з урахуванням коефіцієнта чутливості за масою  $\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{1}{V} = 5118,2364 \frac{1}{\text{м}^3}$  розрахуємо так

$$u_{cB} = \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m}\right)^2 u_B^2} = \sqrt{(5118,24)^2 \cdot (5,78 \cdot 10^{-6})^2} = 29,58 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Комбіновану непевність вимірювання густини твердого тіла з урахуванням стандартних непевностей типу А і типу В визначимо так

$$u_c = \sqrt{u_{cA}^2(\rho) + u_{cB}^2} = \sqrt{(3,50 \cdot 10^{-3})^2 + (29,58 \cdot 10^{-3})^2} = 29,79 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Розширена непевність оцінки густини розраховується за виразом

$$U = k u_c,$$

де  $k$  – коефіцієнт охоплення, який визначається за значенням рівня довіри  $p = 0,95$  та ефективним числом ступенем вільності, що розраховується за формулою Велча-Саттерсвейта

$$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} = \frac{u_c^4}{\frac{u_{cA}^4(\rho)}{n-1} + \frac{u_{cB}^4}{\infty}} = 10 \frac{29,79^4}{3,5042^4} = 52230 \rightarrow \infty.$$

Отже, розширена непевність дорівнює

$$U = k u_c = 1,96 \cdot 29,79 \cdot 10^{-3} = 58,39 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3.$$

Таким чином, результат опосередкованого вимірювання густини твердого тіла запишемо у вигляді

$$\rho = 1,29 \cdot 10^3 \pm 58,39 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3, p = 0,95.$$

## 2.7 Оцінювання непевності вимірювання деформації клейковини

У результаті калібрування вимірювача деформації клейковини відповідно до методики калібрування, зазначеної в паспорті на засіб вимірювання, отримано такі результати вимірювань в умовних одиницях:

- при використанні кінцевої міри товщиною 2 мм, значення деформації складає: 121,6; 122,3; 122,5;

- при використанні кінцевої міри товщиною 6 мм, значення деформації складає: 64,5; 65,1; 65,5;

- при використанні кінцевої міри товщиною 10 мм, значення деформації складає: 7,5; 7,9; 8,4.

Із паспорта на засіб вимірювання відомо, що:

- межі вимірювання деформації клейковини становлять від 0 до 150,7 умовних одиниць;

- основна абсолютна похибка вимірювання не перевищує  $\pm 0,5$  умовних одиниць;

- межі допустимої абсолютної додаткової похибки вимірювання при відхиленні напруги мережі від номінального значення не перевищують  $\pm 0,5$  умовних одиниць;

- межі допустимої абсолютної похибки вимірювання, що обумовлена відхиленням температури навколишнього середовища від номінальної в межах від  $+10$  до  $+35$  °C, не перевищують  $\pm 0,5$  умовних одиниць.

Середні значення деформацій клейковини, отримані в результаті калібрування, складають

$$\bar{q}_1 = \frac{\sum_{k=1}^n q_k}{n} = \frac{121,6 + 122,3 + 122,5}{3} = 122,13 \text{ у.о.}$$

$$\bar{q}_2 = \frac{65,5 + 65,1 + 65,4}{3} = 65 \text{ у.о.}$$

$$\bar{q}_3 = \frac{7,5 + 7,9 + 8,4}{3} = 7,93 \text{ у.о.}$$

Стандартні непевності типу А розрахуємо на основі результатів вимірювань, отриманих під час калібрування за виразом

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}{n(n-1)}}.$$

Експериментальні непевності вимірювань деформації складають:

- для першої групи  $u_{A1} = 0,27 \text{ у.о.}$ ;

- для другої групи  $u_{A2} = 0,29 \text{ у.о.}$ ;

- для третьої групи  $u_{A3} = 0,26 \text{ у.о.}$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена наявністю основної абсолютної похибки вимірювання деформації  $\Delta_o$ , в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, розрахуємо так

$$u_{B1} = \frac{\Delta_o}{\sqrt{3}} = \frac{0,5}{1,73} = 0,29 \text{ у.о.}$$

Стандартну непевність типу В, що вноситься за рахунок виникнення додаткової похибки вимірювання  $\Delta_o$  при відхиленні напруги мережі живлення від номінального значення, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, розрахуємо аналогічно

$$u_{B2} = \frac{\Delta_d}{\sqrt{3}} = \frac{0,5}{1,73} = 0,29 \text{ y.o.}$$

Стандартна непевність типу В, що обумовлена відхиленням температури навколишнього середовища від номінальної, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки, складає

$$u_{B3} = \frac{\Delta_t}{\sqrt{3}} = \frac{0,5}{1,73} = 0,29 \text{ y.o.}$$

Комбіновану непевність типу В, що обумовлена джерелами непевностей, які мають систематичний характер, розрахуємо так

$$u_{Bc} = \sqrt{u_{B1}^2 + u_{B2}^2 + u_{B3}^2} = 0,5 \text{ y.o.}$$

Комбіновану експериментальну непевність типу А, що обумовлена джерелами непевностей, які мають випадковий характер, розрахуємо за виразом

$$u_{Ac} = \sqrt{u_{A1}^2 + u_{A2}^2 + u_{A3}^2} = 0,47 \text{ y.o.}$$

Комбіновану непевність результату вимірювання деформації клейковини, що обумовлена як джерелами непевності, які мають випадковий характер, так і джерелами непевності, які мають систематичний характер, розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_{Ac}^2 + u_{Bc}^2} = 0,69 \text{ y.o.}$$

Розширена непевність вимірювання деформації клейковини визначається через коефіцієнт охоплення  $k_p$ , який вибирається з таблиці для довірчого рівня  $p$  та ефективного числа ступенів вільності  $\nu_{eff}$ , що розраховується за формулою Велча-Саттерсвейта

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4}{\frac{u_{A1}^4}{n-1} + \frac{u_{A2}^4}{n-1} + \frac{u_{A3}^4}{n-1} + \frac{u_{Bc}^4}{\infty}} = 14.$$

Для довірчого рівня  $p = 0,95$  та ефективного числа ступенів вільності 14, коефіцієнт охоплення вибирається з таблиці Стюдента і складає  $k_p = 2,145$ .

Отже, розширена непевність, яку можна приписати засобу вимірювання деформації клейковини за результатами калібрування складає

$$U = 2,145 \cdot 0,69 = 1,48 \text{ у.о.}, \text{ при } p = 0,95.$$

## 2.8 Оцінювання непевності вимірювального каналу активності іонів

Моделльне рівняння вимірювального каналу активності іонів складових елементів гумусу в ґрунті з іоноселективним вимірювальним перетворювачем має вигляд [26 - 29]

$$\Delta U = U_0 + \frac{2,3RT}{n_A F} \lg(a_A + K_c (a_B)^{n_A/n_B}), \quad (2.17)$$

де  $\Delta U$  – різниця потенціалів на виході вимірювального перетворювача;

$U_0$  – стандартний постійний потенціал чутливого елемента (електрода порівняння)  $U_0 = (201 \pm 3)$  мВ;

$R$  – універсальна газова стала;

$T$  – абсолютна температура;

$F$  – число Фарадея;

$n_A, n_B$  – заряди іонів А і В, відповідно;

$a_A$  – активність іонів А, яку потрібно визначити;

$a_B$  – активність іонів В, яка заважає визначенню іонів А;

$K_c$  – коефіцієнт селективності (максимально можливе значення якого складає  $10^{-1}$ ).

Оскільки при контролі гумусового стану ґрунтів необхідно вимірювати вміст таких одновалентних речовин, як фторид, нітратний азот, амонійний азот, калій, то в рівнянні (2.17) відношення  $\frac{2,3RT}{n_A F}$  є сталою величиною, що

відображає чутливість іоноселективних електродів відносно іонів А. Ця чутливість складає  $S = 59,16$  мВ при температурі досліджуваного середовища  $25$  °С.

Зміна активності іонів приводить до зміни різниці потенціалів. Для подальшого підсилення малих різниць потенціалів у вимірювальному каналі (ВК) активності іонів використовується вимірювальний підсилювач, який має мати:

- диференціальний вхід для зменшення дії синфазної завади;
- низький рівень нульового сигналу;
- великий коефіцієнт послаблення синфазної завади.

Після підсилення вимірювальний сигнал надходить на вхід аналого-цифрового перетворювача (АЦП), де перетворюється на двійковий код  $N$ .

Таким чином, кінцевий варіант рівняння перетворення ВК активності іонів набуде вигляду [26, 29]

$$N = [U_{оп} + S \lg(a_A + 0,1a_B)] \frac{K 2^m}{U_{он}}, \quad (2.18)$$

де  $U_{оп}$  – опорне значення напруги АЦП (5 В);

$m$  – розрядність АЦП ( $m = 16$ );

$K$  – коефіцієнт підсилення.

З даних попередніх досліджень відомо, що межі невилучених залишків систематичних похибок такі:

- стандартний потенціал  $U_0$  чутливого елемента складає  $\theta_{U_0} = \pm 3$  мВ;

- значення абсолютної похибки вимірювання активності іонів складає

$$\theta_a = 5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{моль}}{\text{дм}^3};$$

- максимальний температурний коефіцієнт зсуву підсилювача складає 0,25 мВ/°С;

- температурний коефіцієнт опорної напруги аналого-цифрового перетворювача (АЦП) складає  $k_t = 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ;

- відхилення опорної напруги від номінального значення не перевищує  $\theta_{U_{оп}} = \pm 0,02$  В при температурі  $20 \pm 5$  °С.

Оскільки з довідкових даних невідомо за яким законом розподілу розподілена непевність чутливого елемента, тому приймаємо, що вона розподілена за рівномірним законом розподілу та розрахуємо її так

$$u_{U_0} = \frac{\theta_{U_0}}{\sqrt{3}} \approx 1,73 \text{ мВ.}$$

Стандартну непевність, що обумовлена наявністю абсолютної похибки вимірювання активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу похибки вимірювання всередині меж, розрахуємо за виразом

$$u_a = \frac{\theta_a}{k} \approx 2,55 \cdot 10^{-3} \frac{\text{ммоль}}{\text{дм}^3},$$

де  $k$  – коефіцієнт охоплення для нормального розподілу, який дорівнює 1,96 для ймовірності 95%.

Комбіновану непевність іоноселективного вимірювального перетворювача, що вноситься за рахунок невилучених залишків систематичних ефектів, пов'язаних з відхиленням стандартного потенціалу та наявністю абсолютної похибки вимірювання, обчислену вище за типом В, визначимо за формулою [26, 29]



$$u_{ВПс}^2 = \left( \frac{\partial \Delta U}{\partial U_0} \right)^2 u_{U_0}^2 + \left( \frac{\partial \Delta U}{\partial a_A} \right)^2 u_a^2 + \left( \frac{\partial \Delta U}{\partial a_B} \right)^2 u_a^2, \quad (2.19)$$

де  $\frac{\partial \Delta U}{\partial U_0} = 1$  – коефіцієнт чутливості стандартного потенціалу;

$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_A} = \frac{S}{2,3(a_A + K_c a_B)}$  – коефіцієнт чутливості активності іонів  $A$ , який для нижнього діапазону вимірювань ( $D_{\min} = 10^{-6}$  моль/дм<sup>3</sup>) складає 23383,4 Вдм<sup>3</sup>/моль;

$\frac{\partial \Delta U}{\partial a_B} = \frac{K_c S}{2,3(a_A + K_c a_B)}$  – коефіцієнт чутливості активності іонів  $B$ , що заважають визначенню вимірюваних іонів  $A$ , який для нижнього діапазону вимірювань ( $D_{\min} = 10^{-6}$  моль/дм<sup>3</sup>) складає 2338,34 Вдм<sup>3</sup>/моль.

Підставивши розраховані значення коефіцієнтів чутливості в рівняння (2.19) отримаємо комбіновану непевність іоноселективного вимірювального перетворювача, яка складе  $u_{ВПс} \approx 60$  мВ.

Оскільки вимірювання можуть проводитися при зміні температури навколишнього середовища від 5 до 40 °С, максимальна зміна температури при цьому складає  $\Delta t = 35$  °С, то, враховуючи температурний коефіцієнт зсуву підсилювача 0,25 мВ/°С, напруга зміщення складе  $U_{см} = 35^\circ\text{C} \cdot 0,25 \text{ мВ}/^\circ\text{C} = 8,75$  мВ. При відомому коефіцієнті підсилення  $K = 10$  максимальне значення напруги зсуву буде рівним  $U_{смmax} = U_{см} \cdot K = 87,5$  мВ. Враховуючи максимальне вихідне значення напруги підсилювача  $U_{вих} = \pm 5$  В, його максимальну відносну похибку можна розрахувати за виразом

$$\delta_K = \frac{U_{смmax}}{2U_{вих}} = 8,75 \cdot 10^{-3}.$$

Розрахувавши максимальну відносну похибку підсилювача, стандартну непевність, що вноситься підсилювачем при вимірюванні активності іонів в припущенні про нормальний закон розподілу, розрахуємо за виразом

$$u_K = \frac{\Delta U_{\max} \delta_K}{k} \approx 0,83 \text{ мВ}, \quad (2.20)$$

де  $\Delta U_{\max}$  – максимальна різниця потенціалів, яка відповідає максимальній активності іонів (максимальний діапазон вимірювання ВК складає  $D_{\max} = 0,5$  моль/дм<sup>3</sup>) при максимально можливій активності заважаючих іонів  $a_B$ .

Непевність  $u_{U_{on}}$ , що обумовлена відхиленням опорної напруги від номінального значення, в припущенні про рівномірний розподіл буде рівною

$$u_{U_{on}} = \frac{\theta_{U_{оп}}}{\sqrt{3}} \approx 11,55 \text{ мВ.}$$

Додаткову непевність  $u_{оп}(\Delta t)$ , обумовлену змінами опорної напруги джерела при зміні температури навколишнього середовища від  $t_1 = 5^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 40^\circ\text{C}$ , що значно перевищує нормоване відхилення температури, обчислимо через відоме значення температурного коефіцієнта  $k_t$ , в припущенні про рівномірний розподіл меж, за формулою

$$u_{оп}(\Delta t) = \frac{k_t(t_2 - t_1)}{\sqrt{3}} U_{оп} \approx 1,02 \text{ мВ.} \quad (2.21)$$

Таким чином, комбінована непевність джерела опорної напруги АЦП, яка складається зі стандартних непевностей типу В, розрахованих за двома вищенаведеними формулами, буде рівною

$$u_{опс} = \sqrt{(u_{оп}(t))^2 + (u_{U_{on}})^2} \approx 11,59 \text{ мВ.}$$

Стандартну непевність  $u_h$ , обумовлену обмеженим кроком квантування напруги АЦП, в припущенні про трикутний закон розподілу похибки всередині меж, визначимо так

$$u_h = \frac{h}{\sqrt{24}} = \frac{U_{оп}}{(2^m - 1)\sqrt{24}} \approx 15,57 \text{ мкВ.} \quad (2.22)$$

Враховуючи обчислені за вищенаведеними формулами непевності типу В на кожному з етапів перетворення вимірювального сигналу, комбіновану непевність вимірювального каналу (ВК) активності іонів обчислимо так

$$u_c = \sqrt{u_{ВКс}^2 + u_K^2 + u_{опс}^2 + u_h^2} \approx 61,12 \text{ мВ.}$$

Таким чином, аналізуючи отримані результати, видно, що максимальну непевність має первинний іоноселективний вимірювальний перетворювач.

Припустивши, що сумарний закон розподілу ВК є нормальним з довірчим рівнем не нижче 0,95, розрахуємо розширену непевність ВК активності іонів за виразом

$$U_{0,95} = 1,96 \cdot 61,12 = \pm 119,8 \text{ мВ.}$$

Отже, на підставі довідкових даних і даних попередніх досліджень, проведено оцінювання розширеної непевності ВК активності іонів, яка складає 119,8 мВ при максимальній активності заважаючих іонів  $a_B$ .

## 2.9 Оцінювання непевності вимірювання частоти обертання роторних систем

Рівняння перетворення засобу вимірювання частоти обертання роторних систем (РС) має вигляд [10, 30-33]

$$n = 60r^2 U_0 N_\omega [k S_0 R_{zz} I_0 \beta a \pi 2^m]^{-1} - 15\beta [\pi]^{-1}, \quad (2.23)$$

де  $n$  – частота обертання ротора (в об./хв.);

$r$  – відстань від джерела світла до поверхні, що освітлюється, ( $r = 0,02 \pm 0,001$  м);

$R_{zz}$  – опір кола зворотного зв'язку ( $R_{zz} = 1 \text{ МОм} \pm 10 \text{ Ом}$ );

$k$  – коефіцієнт пропорційності;

$S_0$  – інтегральна струмова чутливість фотодіода ( $S_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ А/Лм} \pm 10\%$ );

$m$  – розрядність АЦП ( $m = 12$ );

$t$  – час;

$\beta$  – кут, що характеризує конфігурацію діафрагми тахометричного перетворювача ( $\beta = \pi/90 \pm 0,1\pi/180$ );

$a = h(2R_0 + h)/(2\pi)$  – коефіцієнт, що визначає геометричні розміри прорізу модулятора, який входить до складу тахометричного перетворювача ( $a = 0,034 \pm 0,001$  м/рад);

$R_0$  – радіус кола в центрі модулятора ( $R_0 = 19 \cdot 10^{-3}$  м);

$h$  – висота прорізу модулятора з початком на колі радіуса  $R_0$  ( $h = 5 \cdot 10^{-3}$  м);

$U_0$  – опорна напруга АЦП ( $U_0 = 5 \text{ В} \pm 0,25 \text{ мВ}$ );

$I_0$  – сила світла ( $I_0 = 0,1 \pm 2,5 \cdot 10^{-3}$  кд);

$N_\omega$  – кількість двійкових імпульсів, що підраховуються лічильником.

Результати вимірювання частоти обертання РС на нижній та верхній межі вимірювання наведені в таблиці 2.4 та 2.5, відповідно [28].

Необхідно оцінити непевність вимірювання частоти обертання РС, якщо відомо, що відносна похибка встановлення зразкового значення частоти обертання РС не перевищує  $\tilde{u}_n = 0,07\%$  при  $p = 0,95$ , а закон розподілу цієї похибки є нормальним.

Таблиця 2.4 – Результати вимірювань частоти обертання на нижній межі вимірювання

Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв	Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв	Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв
1	23	8	25	15	31
2	28	9	29	16	21
3	25	10	32	17	24
4	19	11	27	18	32
5	25	12	35	19	27
6	29	13	22	20	34
7	21	14	26	21	29

Таблиця 2.5 – Результати вимірювань частоти обертання на верхній межі вимірювання

Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв	Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв	Ч.ч.	Значення частоти обертання $n$ , об/хв
1	3019	8	3005	15	3009
2	3014	9	3010	16	2988
3	3027	10	3008	17	2994
4	2990	11	3012	18	3007
5	3000	12	2995	19	3018
6	2985	13	2992	20	3021
7	2987	14	3002	21	3015

На основі отриманих результатів вимірювання частоти обертання РС (табл. 2.4) оцінимо стандартну непевність типу А на нижній межі вимірювання за виразом

$$u_A(\bar{n}_{\min}) = \sqrt{\sum_{i=1}^q (n_i - \bar{n}_{\min})^2 [q(q-1)]^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{21} (n_i - 32,38)^2 [21(21-1)]^{-1}} = 1,13 \text{ об/хв.}$$

На основі отриманих результатів вимірювання частоти обертання РС (табл. 2.5) оцінимо стандартну непевність типу А на верхній межі вимірювання

$$u_A(\bar{n}_{\max}) = \sqrt{\sum_{i=1}^q (n_i - \bar{n}_{\max})^2 [q(q-1)]^{-1}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{21} (n_i - 3004,67)^2 [21(21-1)]^{-1}} = 2,69 \text{ об/хв.}$$

З отриманих стандартних непевностей типу А вибираємо найбільшу за значенням (максимальну) експериментальну стандартну непевність  $u_{A\max}(\bar{n}) = 2,69$  об/хв, що буде враховуватися (використовуватися) при оцінюванні комбінованої непевності результату вимірювання.

Стандартну непевність типу В, що обумовлена обмеженою похибкою встановлення зразкового значення частоти обертання РС, в припущенні про нормальний закон розподілу похибки всередині меж, розрахуємо за виразом

$$u_{Bz} = \frac{\bar{n}_{\max}}{k_p 100\%} \tilde{u}_n = \frac{3004,67}{1,96 \cdot 100} 0,07 = 1,07 \text{ об/хв,}$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону і вірогідності  $p=0,95$  дорівнює 1,96.

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена обмеженою похибкою визначення відстані джерела світла до поверхні, яка освітлюється,  $\Delta r = \pm 0,001$  м, в припущенні про рівномірний розподіл похибки вимірювання відстані, розрахуємо так

$$u_{Br} = \Delta r / \sqrt{3} = 0,001 / 1,73 = 0,58 \text{ мм.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена допустимим відхиленням опорної напруги АЦП, в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки всередині меж, оцінимо так

$$u_{B_{U_0}} = \Delta U_0 / \sqrt{12} = \pm 0,25 / \sqrt{3} = 0,14 \text{ мВ.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена обмеженою розрядністю АЦП послідовного наближення (наявністю зони нечутливості АЦП)  $\varepsilon = 1/(2^m - 1)$ , при розрядності АЦП  $m = 12$ , в припущенні про трикутний закон розподілу похибки квантування, розрахуємо за виразом

$$u_{Bm} = \varepsilon / \sqrt{24} = 1 / [(2^m - 1) \sqrt{24}] = 1 / [(2^{12} - 1) 4,9] = 0,05 \cdot 10^{-3}.$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена відхиленням коефіцієнта, який визначає геометричні розміри прорізу модулятора ( $\Delta a = \pm 0,001$  м/рад), в припущенні про нормальний закон розподілу похибки вимірювання його складових параметрів, розрахуємо за виразом

$$u_{B_a} = \Delta a / k_p = \pm 0,001 / 1,96 = 0,51 \text{ мм/рад.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена допустимим відхиленням сили світла ( $\Delta I_0 = \pm 2,5 \cdot 10^{-3}$  кд), в припущенні про рівномірний закон розподілу довірчих меж, визначимо за виразом

$$u_{B_I} = \Delta I_0 / k_p = \pm 0,0025 / 1,96 = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ кд.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена допустимим відхиленням опору зворотного зв'язку  $\Delta R_{zz} = \pm 10$  Ом, в припущенні про рівномірний закон розподілу довірчих меж похибки, оцінимо за виразом

$$u_{B_R} = \Delta R_{zz} / \sqrt{12} = \pm 10 / \sqrt{3} = 5,77 \text{ Ом.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена обмеженою похибкою визначення кутової ширини діафрагми  $\Delta \beta = \pm 0,1\pi/180$ , в припущенні про рівномірний закон розподілу довірчих меж похибки, оцінимо за виразом

$$u_{B_\beta} = \Delta \beta / \sqrt{12} = \pm 0,1\pi / [180\sqrt{3}] = 1,01 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Стандартну непевність вимірювання, що обумовлена десятивідсотковим допустимим відхиленням інтегральної струмової чутливості фотодіода від свого номінального значення ( $\Delta S_0 = \pm 0,2 \cdot 10^{-3}$  А/Лм), в припущенні про нормальний закон розподілу похибки вимірювання, оцінимо за виразом

$$u_{B_S} = \Delta S_0 / k_p = \pm 0,2 \cdot 10^{-3} / 1,96 = 1,02 \cdot 10^{-4} \text{ А/Лм.}$$

Комбіновану непевність типу В з урахуванням розрахованих вище складових стандартних непевностей типу В, знайдемо як позитивний квадратний корінь з комбінованої дисперсії типу В, що описується формулою [20]

$$u_{B_c}^2 = u_{B_z}^2 + u_{B_r}^2 (\partial n / \partial r)^2 + u_{B_{U_0}}^2 (\partial n / \partial U_0)^2 + u_{B_m}^2 (\partial n / \partial m)^2 + u_{B_a}^2 (\partial n / \partial a)^2 + \\ + u_{B_I}^2 (\partial n / \partial I_0)^2 + u_{B_R}^2 (\partial n / \partial R_{zz})^2 + u_{B_\beta}^2 (\partial n / \partial \beta)^2 + u_{B_S}^2 (\partial n / \partial S_0)^2, \quad (2.24)$$

де  $\partial n/\partial r = 120rU_0N_\omega/(kS_0I_0\beta R_{zz}a\pi 2^m) = 29,88 \cdot 10^3$  об/(хв · м) – коефіцієнт чутливості за відстанню до джерела світла при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial U_0 = 60r^2N_\omega/(kS_0I_0\beta R_{zz}a\pi 2^m) = 99,62$  об/(хв · В) – коефіцієнт чутливості за опорною напругою АЦП при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial m = -60r^2U_0N_\omega \ln(2)/(kS_0I_0\beta R_{zz}a\pi 2^m) = -207,15$  об/хв – коефіцієнт чутливості за розрядністю АЦП при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial a = -60r^2U_0N_\omega/(kS_0I_0\beta R_{zz}a^2\pi 2^m) = -8,79 \cdot 10^3$  об · рад/(хв · м) – коефіцієнт чутливості за коефіцієнтом, що визначає геометричні розміри прорізу модулятора при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial I_0 = -60r^2U_0N_\omega/(kS_0I_0^2\beta R_{zz}a\pi 2^m) = -29,88 \cdot 10^3$  об/(хв · кд) – коефіцієнт чутливості за силою світла при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial R_{zz} = -60r^2U_0N_\omega/(kS_0I_0\beta R_{zz}^2a\pi 2^m) = -0,29 \cdot 10^{-3}$  об/(хв · Ом) – коефіцієнт чутливості за опором зворотного зв'язку при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial \beta = -60r^2U_0N_\omega/(kS_0I_0\beta^2R_{zz}a\pi 2^m) - 15/(\pi) = -8,57 \cdot 10^3$  об/(хв · рад) – коефіцієнт чутливості за кутовою шириною діафрагми при номінальних значеннях впливних величин;

$\partial n/\partial S_0 = -60r^2U_0N_\omega/(kS_0^2I_0\beta R_{zz}a\pi 2^m) = -1,49 \cdot 10^5$  об · Лм/(хв · А) – коефіцієнт чутливості за інтегральною струмовою чутливістю фотодіода при номінальних значеннях впливних величин.

Підставляючи розраховані значення коефіцієнтів чутливості та стандартних непевностей типу В у рівняння (2.24), отримаємо значення комбінованої непевності типу В, яка дорівнює  $u_{Bc} = 45,49$  об/хв.

Комбіновану непевність результату вимірювання частоти обертання РС з урахуванням максимальної експериментальної непевності типу А та комбінованої непевності типу В розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_{A\max}^2(\bar{n}_{\max}) + u_{Bc}^2} = 45,57 \text{ об/хв.}$$

Для розрахунку розширеної непевності, знайдемо ефективне число ступенів вільності за формулою Велча-Саттерсвейта

$$\nu_{eff} = u_c^4 \left( \sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{\nu_i} \right)^{-1} = (q-1)u_c^4 [u_{A\max}^4(\bar{n}_{\max})]^{-1} = 1,65 \cdot 10^6.$$

Далі, знаючи ефективне число ступенів вільності та задавшись довірчою ймовірністю  $p = 0,95$ , знаходимо коефіцієнт охоплення, який дорівнює  $k_p=1,96$ .

Знаючи коефіцієнт охоплення та комбіновану непевність результату вимірювання, отримаємо розширену непевність, яка дорівнює

$$U_p = k_p u_c = 89,32 \text{ об/хв.}$$

На основі отриманих характеристик непевностей вимірювань частот обертання РС складемо бюджет непевностей, який занесемо до таблиці 2.6.

Таблиця 2.6 – Бюджет непевностей вимірювань частот обертання

Вхідні величини	Оцінка вхідних величин	Стандартні непевності	Коефіцієнти чутливості	Вклади непевностей
$n_i$	3005 об/хв	2,69 об/хв	1	$u_{A_{\max}}(\bar{n}_{\max})$
$\tilde{u}_n$	0,07 %	1,07 об/хв	1	$u_{B_z}$
R	0,02 м	0,58 мм	$29,88 \cdot 10^3 \text{ об}/(\text{хв} \cdot \text{м})$	$u_{B_r} \partial n / \partial r$
$U_0$	5 В	0,14 мВ	$99,62 \text{ об}/(\text{хв} \cdot \text{В})$	$u_{B_{U_0}} \partial n / \partial U_0$
M	12	$0,05 \cdot 10^{-3}$	-207,15 об/хв	$u_{B_m} \partial n / \partial m$
A	0,034 м/рад	0,51 мм/рад	$-8,79 \cdot 10^3 \text{ об} \cdot \text{рад}/(\text{хв} \cdot \text{м})$	$u_{B_a} \partial n / \partial a$
$I_0$	0,1 кД	$1,27 \cdot 10^{-3}$ кД	$-29,88 \cdot 10^3 \text{ об}/(\text{хв} \cdot \text{кД})$	$u_{B_i} \partial n / \partial I_0$
$R_{zz}$	1 МОм	5,77 Ом	$-0,29 \cdot 10^{-3} \text{ об}/(\text{хв} \cdot \text{Ом})$	$u_{B_R} \partial n / \partial R_{zz}$
B	$\pi/90$ рад	$1,01 \cdot 10^{-3}$ рад	$-8,57 \cdot 10^3 \text{ об}/(\text{хв} \cdot \text{рад})$	$u_{B_\beta} \partial n / \partial \beta$
$S_0$	$2 \cdot 10^{-3}$ А/Лм	$1,02 \cdot 10^{-4}$ А/Лм	$-1,49 \cdot 10^5 \text{ Лм} \cdot \text{об}/(\text{хв} \cdot \text{А})$	$u_{B_s} \partial n / \partial S_0$
Вихідна величина	Оцінка вихідної величини	Комбінована непевність	Коефіцієнт охоплення	Розширена непевність
$\bar{n}$	3005 об/хв	45,49 об/хв	1,96	89,32 об/хв.

Для зручності сприйняття отриманих характеристик точності вимірювання частоти обертання РС розрахуємо відносну комбіновану і відносну розширену непевності вимірювання частоти обертання РС за виразами:



$$\tilde{u}_c = \frac{u_{ce}}{\bar{n}} 100\% = \frac{45,49}{3005} 100\% = 1,51\% ;$$

$$\tilde{U} = \frac{U_p}{\bar{n}} 100\% = \frac{89,32}{3005} 100\% = 2,97\% .$$

## 2.10 Оцінювання непевності вимірювання обертового моменту електродвигунів

В результаті вимірювань обертового моменту електродвигуна отримано такі значення в Нм: 7,5; 7,8; 7,6; 7,9; 7,4; 7,8; 7,7; 7,9; 8; 7,9.

При цьому використано засіб вимірювання моменту, що описується таким рівнянням перетворення [34, 35]

$$M = \frac{4\Delta U N g l R U_0}{U_{оп} U_{ж} Q 2^m} \Delta R , \quad (2.25)$$

де  $N$  – кількість підрахованих двійково-десяткових імпульсів;

$U_{оп}$  – значення вихідної напруги операційного підсилювача;

$Q$  – зусилля;

$g$  – прискорення вільного падіння ( $9,8 \text{ м/с}^2$ );

$U_{ж}$  – напруга живлення сенсора зусилля;

$R$  – опір мостової схеми перетворювача (1 кОм);

$m$  – розрядність АЦП ( $m=14$ );

$\Delta U$  – вихідна напруга сенсора зусилля (вихідна напруга операційного перетворювача);

$\Delta R$  – приріст опору при зміні зусилля (500 Ом);

$U_0$  – значення опорної напруги АЦП (5 В);

$l$  – довжина вимірювального важеля.

Необхідно оцінити непевність результатів вимірювань обертового моменту.

Аналізуємо умови вимірювань:

- вимірювання проводилися в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $+ 25 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Аналізуємо технічні характеристики засобу вимірювання:

- межі невилученої систематичної похибки довжини вимірювального важеля складають  $\pm 1 \text{ мм}$ ;

- відносна похибка сенсора зусилля складає  $0,3\%$ ;

- дрейф напруги зміщення нуля операційного підсилювача, що входить до вимірювального каналу зусилля, складає  $U_{зм} = 10 \text{ мкВ/}^\circ\text{C}$ ;

- коефіцієнт підсилення ОП визначається відношенням  $k = U_{оп}/\Delta U$ .

Визначаємо оцінку результату вимірювання моменту:

$$\bar{M} = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{n} = 7,75 \text{ Нм.}$$

Стандартну непевність типу А результату вимірювання, що обумовлена джерелами непевності, які носять випадковий характер, розрахуємо за виразом

$$u_A(\bar{M}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (M_i - \bar{M})^2}{n(n-1)}} = 0,06 \text{ Нм.}$$

Далі перейдемо до оцінювання непевностей типу В, що обумовлені наявністю систематичних ефектів.

З довідкових даних відомо, що відхилення довжини вимірювального важеля, який використовується для з'єднання ротора з сенсором зусилля, не перевищує  $\pm 1$  мм. Стандартна непевність, що вноситься вимірювальним важелем в припущенні про рівномірний закон розподілу, складає

$$u_{B1} = 1/\sqrt{3} = 0,58 \text{ мм.}$$

При використанні сенсора зусилля, що має зведену похибку  $\gamma = 0,3\%$  при максимальному зусиллі  $Q_n = 100$  кг, його непевність, в припущенні про рівномірність закону розподілу, можна розрахувати за виразом

$$u_{B2} = \frac{\gamma Q_n}{\sqrt{3} 100\%} = 0,3\% \frac{100}{1,73 \cdot 100\%} = 0,17 \text{ кг.}$$

Непевність типу В, що вноситься операційним підсилювачем при вимірюванні моменту за температури навколишнього середовища  $t = 25$  °С, яка відрізняється від температури нормальних умов  $t_n = 20$  °С, та дрейфі напруги операційного підсилювача  $U_{3M} = 10$  мкВ/°С в припущенні про нормальний закон розподілу дрейфу напруги, розрахуємо за формулою

$$u_{B3} = \frac{k|t - t_n|}{k_p} U_{3M} = 1000 \frac{|25 - 20|}{1,96} 10 \cdot 10^{-6} = 25,6 \text{ мВ,}$$

де  $k$  – коефіцієнт підсилення масштабного перетворювача ( $k=1000$ ).

Стандартна непевність типу В, що вноситься АЦП за рахунок обмеженої розрядності АЦП, в припущенні про рівномірність закону розподілу, розраховується за формулою

$$u_{B4} = \frac{\Delta_{\text{АЦП}}}{\sqrt{12}} = \frac{1}{(2^m - 1)\sqrt{12}} = 0,018 \cdot 10^{-3}.$$

Комбіновану непевність типу В, що вноситься за рахунок наявності невилучених залишків систематичних похибок, розрахуємо за формулою [34, 35]

$$u_{Bc} = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial l}\right)^2 u_{B1}^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)^2 u_{B2}^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial U_{\text{оп}}}\right)^2 u_{B3}^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial m}\right)^2 u_{B4}^2}, \quad (2.26)$$

де

$$\frac{\partial M}{\partial l} = \frac{4Ng\Delta URU_0}{U_{\text{оп}} U_{\text{ж}} Q 2^m} \Delta R = 77,5 \text{ Н};$$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = -\frac{4Ngl\Delta URU_0}{U_{\text{оп}} U_{\text{ж}} Q^2 2^m} \Delta R = -0,08 \frac{\text{Нм}}{\text{кг}};$$

$$\frac{\partial M}{\partial U_{\text{оп}}} = -\frac{4Ngl\Delta URU_0}{U_{\text{оп}}^2 U_{\text{ж}} Q 2^m} \Delta R = -1,55 \frac{\text{Нм}}{\text{В}};$$

$$\frac{\partial M}{\partial m} = -\frac{4Ngl\Delta UR \ln(2)}{U_{\text{оп}} U_{\text{ж}} Q 2^m} \Delta R = -5,35 \text{ Нм}.$$

Підставляючи значення коефіцієнтів чутливості і відповідні стандартні непевності типу В у рівняння (2.26), отримаємо значення комбінованої непевності типу В, що дорівнює  $u_{Bc} = 0,06 \text{ Нм}$ .

Комбіновану непевність результату вимірювання обертового моменту розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\overline{M}) + u_{Bc}^2} = 0,08 \text{ Нм}.$$

Ефективне число ступенів вільності розрахуємо за виразом

$$v_{\text{eff}} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} = (n-1) \frac{u_c^4}{u_A^4} = 9 \frac{0,08^4}{0,06^4} = 28$$

Коефіцієнт охоплення  $k$  визначається через ефективне число ступенів вільності та довірчу ймовірність, яку приймемо рівною  $p = 0,95$ . Тоді  $k = 2,048$ .

Розширену непевність результату вимірювання визначимо так

$$U_{0,95} = k u_c = 2,048 \cdot 0,08 = 0,16 \text{ Нм}.$$

Отже, результат вимірювання обертового моменту запишемо у вигляді

$$M = \bar{M} \pm U_p = 7,75 \pm 0,16 \text{ Нм, при } p = 0,95.$$

## 2.11 Оцінювання непевності вимірювального контролю якості електроенергії

Для вимірювального контролю показників якості електроенергії (ЕЕ) розроблено вимірювальну систему, функціональна схема якої наведена на рис. 2.3 [6, 36, 37].

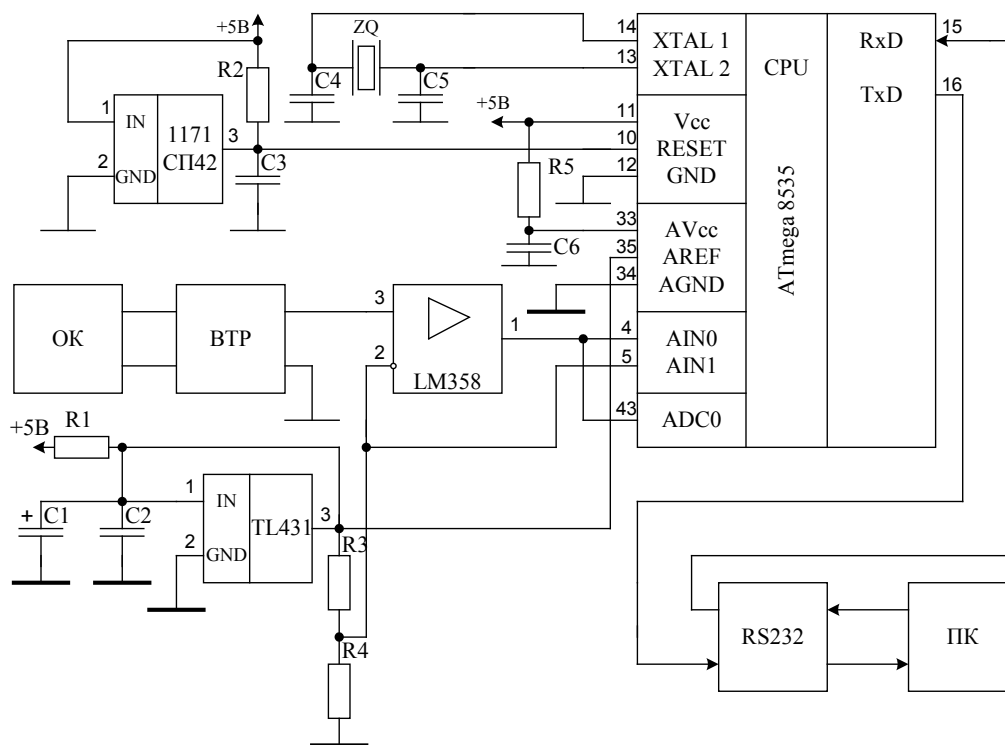


Рисунок 2.3 – Функціональна схема системи вимірювального контролю якості електроенергії

Як видно з рис. 2.3, до складу вимірювальної системи входять: вимірювальний трансформатор (ВТР), який здійснює зниження змінної напруги електричної мережі до рівня 5 В, а також служить гальванічною розв'язкою між об'єктом контролю (ОК) і персональним комп'ютером (ПК); операційний підсилювач (ОП) типу LM358, що здійснює масштабування зниженої змінної напруги в діапазон роботи напруги АЦП, який вбудовано в мікроконтролер Atmega 8535; джерело опорної напруги на мікросхемі типу TL431, що забезпечує стабілізацію постійної напруги +5 В; подільник постійної напруги на резисторах R3 і R4 для задання коефіцієнта масштабування; схема моніторингу скидання на мікросхемі типу 1171 СП42 для скидання мікроконтролера при зниженні постійної напруги живлення нижче рівня 4 В; послідовний інтерфейс RS232 для

передавання даних до ПК, як такий може бути використана мікросхема типу ADM232LIN або MAX202E.

Для вимірювального контролю вказаних показників якості ЕЕ потрібно два вимірювальних канали (ВК). Один для вимірювання частоти змінної напруги, а другий для вимірювання миттєвих значень амплітуди змінного сигналу з подальшим усередненням. При визначенні часових параметрів послідовність перетворень у частотному ВК можна подавати у вигляді

$$T_x \rightarrow T_x f_0 \rightarrow N_T, \quad (2.27)$$

де  $T_x$  – період зміни напруги в електричній мережі, що після масштабування ОП подається на вхід АІN0 мікроконтролера;  $f_0$  – частота зразкових імпульсів кварцового резонатора (ZQ);  $N_T$  – кількість імпульсів, що заповнили невідомий період  $T_x$  (див. рис. 2.3) [1, 36, 37].

Спочатку невідомий період синусоїди  $T_x$  ділиться на два, тобто аналоговий компаратор мікроконтролера на рівні 2,5 В формує за переднім фронтом період, який дорівнює півперіоду вимірюваної величини. Потім сформований компаратором період заповнюється імпульсами зразкової частоти  $f_0$ , які підраховуються таймер-лічильником мікроконтролера, на виході якого формується значення у вигляді бінарного коду  $N_T$ , яке потім необхідно помножити на два. Це значення передається через послідовний порт до ПК, який зберігає виміряні значення в файл та визначає відхилення часових параметрів і виводить їх на екран монітора.

Таким чином, рівняння перетворення частотного ВК буде мати вигляд

$$N_T = f_0 T_x = \frac{f_0}{f_x}. \quad (2.28)$$

Для визначення параметрів напруги використовується другий ВК, який має таку послідовність перетворень (див. рис. 2.3)

$$U_x \rightarrow \frac{U_x}{k} \rightarrow \left(\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2}\right) \rightarrow \frac{\left(\frac{U_x}{k} + \frac{U_0}{2}\right)}{h} \rightarrow N_u, \quad (2.29)$$

де  $U_x$  – невідома напруга електричної мережі;

$k$  – коефіцієнт трансформації;

$U_0$  – опорна напруга АЦП;

$h$  – крок квантування АЦП;

$N_u$  – значення напруги у бінарному коді [1, 6].

З урахуванням того, що крок квантування  $h = U_0/(2^n - 1)$ , де  $n$  – розрядність АЦП мікроконтролера, рівняння перетворення ВК миттєвих значень напруги має вигляд

$$N_u = \frac{2^n}{k \cdot U_0} \cdot U_x. \quad (2.30)$$

Оскільки дана вимірювальна система складається з двох ВК, то оцінимо складові непевності окремо за частотним ВК і за ВК напруги. При вимірюванні частоти комбінована непевність типу В складається з непевності квантування періоду  $u_1$ , непевності  $u_2$ , що обумовлено зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища, та непевності  $u_3$ , що обумовлена наявністю часом відгуку аналогового компаратора мікроконтролера на появу вхідного сигналу. А при вимірюванні напруги комбінована непевність типу В складається з непевності трансформації  $u_4$ , непевності ОП  $u_5$ , непевності квантування АЦП  $u_6$  та непевності  $u_7$ , що обумовлена похибкою, яка існує у зв'язку з наявністю зони нечутливості АЦП, що вбудований в мікроконтролер (з розрізняювальною здатністю лише в 10 двійкових розрядів).

Оскільки середнє значення частоти загального призначення  $\bar{f}_x$ , відповідно до стандарту, складає 50 Гц, що відповідає вимірюваному періоду 20 мс, і може змінюватись в допустимих межах від 48 до 52 Гц (від 19,23 до 20,83 мс), а частота кварцового резонатора складає 8 МГц, то непевності квантування періоду  $u_1$ , в припущенні про рівномірний закон розподілу, визначимо шляхом прирівняння зведеної похибки частотного ВК  $\gamma = \Delta 100\% / T_{xH}$  до відносної похибки квантування  $\delta = 100\% / N_T$  за виразом

$$u_1 = \frac{\Delta}{\sqrt{3}},$$

де  $\Delta = T_{xH} / N_T = T_{xH} / (\bar{T}_x f_0)$  – межі невилученої систематичної похибки частотного ВК;

$T_{xH}$  – нормоване (максимальне) значення періоду, яке для даної мети складає 20,83 мс, що відповідає максимально допустимій частоті 52 Гц;

$\bar{T}_x$  – середнє значення періоду, що складає 20 мс та відповідає середній частоті 50 Гц.

Підставляючи відомі часові значення у вищенаведений вираз для розрахунку непевності типу В  $u_1$ , що обумовлена квантуванням періоду, отримаємо таке її значення

$$u_1 = \frac{T_{xH}}{\bar{T}_x f_0 \sqrt{3}} = \frac{20,83 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^6 \sqrt{3}} \approx 0,07 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Непевність  $u_2$ , що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від  $t_1 = 15 \text{ }^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , розрахуємо через температурний коефіцієнт опорної частоти  $k = \pm 10^{-9}/^\circ\text{C}$  при рівномірному законі розподілу за формулою

$$u_2 = \frac{k|t_2 - t_1|}{\sqrt{3}} f_{x\max} = 52 \frac{|25 - 15|10^{-9}}{1,73} \approx 0,29 \cdot 10^{-6} \text{ Гц.}$$

Непевність  $u_3$ , що обумовлена наявністю певного часу відгуку аналогового компаратора мікроконтролера на появу вхідного сигналу, який, відповідно до специфікації на мікроконтролер, не перевищує  $\Delta_1 = 0,5 \text{ мкс}$ , розрахуємо так

$$u_3 = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}} \approx 0,29 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Оскільки значення стандартних непевностей частотного ВК мають різну розмірність, то підсумувати їх неможливо. Тому для розрахунку комбінованої непевності частотного ВК зведемо розраховані вище стандартні непевності до безрозмірних величин – відносних непевностей:

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{T_x} = \frac{0,07 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-3}} = 3,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{f_x} = \frac{0,29 \cdot 10^{-6}}{50} = 5,8 \cdot 10^{-9};$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{u_3}{T_x} = \frac{0,29 \cdot 10^{-6}}{0,02} = 1,45 \cdot 10^{-5}.$$

Отже, рівняння для оцінювання відносної комбінованої непевності частотного ВК має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{cf_x} &= \sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2} = \sqrt{(3,5 \cdot 10^{-6})^2 + (5,8 \cdot 10^{-9})^2 + (1,45 \cdot 10^{-5})^2} \approx \\ &\approx 1,5 \cdot 10^{-5} = 1,5 \cdot 10^{-3} \%. \end{aligned}$$

Комбіновану непевність вимірювання частотних параметрів розрахуємо через значення відносної комбінованої непевності та оцінку вимірюваної величини за виразом

$$u_{cf_x} = \bar{f}_x \cdot \tilde{u}_{cf_x} = 50 \cdot 1,5 \cdot 10^{-5} = 0,75 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Для розрахунку розширеної непевності потрібно вибрати коефіцієнт охоплення, який визначається через число ступенів вільності, яке для непевностей типу В дорівнює нескінченності, а коефіцієнт охоплення при довірчому рівні 0,95 складає 1,96. Таким чином, розширена непевність частотного ВК буде дорівнювати

$$U_f = 1,96u_{cf_x} = 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ Гц.}$$

Отже, результат вимірювання частоти мережі живлення загального призначення, з урахуванням правил заокруглення, потрібно подати у вигляді

$$f_x = \bar{f}_x \pm U_f = 50 \pm 1,47 \cdot 10^{-3} \text{ Гц, при } p = 0,95.$$

ВК напруги характеризується такими параметрами: середнє значення змінної вхідної напруги  $\bar{U}_x$ , відповідно до стандарту, складає  $220 \text{ В}_{-15\%}^{+10\%}$ , напруга на вторинній обмотці ВТР складає 5 В, клас точності ВТР, відповідно до специфікації, складає  $\gamma = 0,05$ , опорна напруга АЦП мікроконтролера дорівнює  $U_0 = 5 \text{ В}$ , а розрядність АЦП  $n = 10$ .

З урахуванням наведених вище параметрів стандартну непевність трансформації  $u_4$ , в припущенні про нормальний закон розподілу і довірчий рівень 0,95 (при цьому коефіцієнт охоплення  $k_p = 1,96$ ), розрахуємо за виразом

$$u_4 = \frac{\gamma \bar{U}_x}{100\% k_p} = \frac{0,11}{1,96} \approx 0,06 \text{ В.}$$

При можливій зміні температури навколишнього середовища на  $\Delta t = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  та дрейфу напруги зміщення нуля ОП, який дорівнює  $3 \text{ мкВ}/^\circ\text{C}$ , розрахуємо напругу зміщення, яка складає  $U_{зм} = 10 \text{ }^\circ\text{C} \cdot 3 \text{ мкВ}/^\circ\text{C} = 30 \text{ мкВ}$ . При відомому коефіцієнті підсилення  $K = 1$  знайдемо максимальну напругу зміщення, що дорівнює  $U_{зм\max} = U_{зм} \cdot K = 30 \text{ мкВ}$ . Знаючи максимальну вихідну напругу підсилювача  $\Delta U_{вих} = 5 \text{ В}$ , максимальна відносна похибка ОП буде рівною

$$\delta_n = \frac{U_{зм\max}}{\Delta U_{вих}} \cdot 100\% = \frac{30 \cdot 10^{-6}}{5} \cdot 100\% \approx 0,6 \cdot 10^{-3}\%.$$



Знаючи максимальну відносну похибку ОП, максимальна абсолютна похибка, що вноситься ОП, дорівнюватиме

$$\Delta_{n \max} = \frac{U_x \delta_n}{100\%} = \frac{5 \cdot 0,6 \cdot 10^{-3}}{100} \approx 0,03 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Тоді стандартна непевність типу В, що вноситься ОП у результат вимірювань в припущенні про нормальний закон розподілу похибки, всередині меж складає

$$u_5 = \frac{|\Delta_{n \max}|}{k_p} = \frac{0,03 \cdot 10^{-3}}{1,96} \approx 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ В,}$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення, який для нормального закону розподілу і довірчого рівня 0,95 дорівнює 1,96.

Непевність квантування АЦП  $u_6$  в припущенні про трикутний закон розподілу похибки всередині меж визначимо за виразом

$$u_6 = \frac{h}{\sqrt{24}} = \frac{U_0}{(2^n - 1)\sqrt{24}} = \frac{5}{4,9 \cdot (2^{10} - 1)} \approx 99,71 \cdot 10^{-5} \text{ В.}$$

Відповідно до технічної документації на вбудований в мікроконтролер АЦП він має абсолютну похибку, що існує у зв'язку з наявністю зони нечутливості в діапазоні вимірювання АЦП, і яка для дозвільної здатності в 10 двійкових розрядів не перевищує  $\Delta_s = 5$  мВ – найменше значення, яке може бути виміряне АЦП (нижня межа діапазону вимірювання). У зв'язку з наявністю такого обмеження виникає непевність  $u_7$ , що обумовлена існуванням зони нечутливості, яку в припущенні про рівномірний закон розподілу похибки всередині меж розрахуємо за виразом

$$u_7 = \frac{\Delta_s}{\sqrt{12}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{3,46} = 1,45 \cdot 10^{-3} \text{ В,}$$

Отже, комбінована непевність ВК напруги, складається з чотирьох складових та визначається за виразом

$$u_{cU_x} = \sqrt{u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2} = \\ = \sqrt{0,06^2 + (0,02 \cdot 10^{-3})^2 + (99,71 \cdot 10^{-5})^2 + (1,45 \cdot 10^{-3})^2} \approx 60,02 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Розширену непевність ВК напруги розрахуємо за виразом

$$U_{U_x} = 1,96u_{cU_x} = 117,64 \cdot 10^{-3} \text{ В.}$$

Відносна комбінована непевність ВК напруги дорівнює:

$$\tilde{u}_{U_x} = u_{cU_x} 100\% / \bar{U}_x = 60,02 \cdot 10^{-3} \cdot 100\% / 220 \approx 0,03\%.$$

Результат досліджень ВК напруги мережі живлення загального призначення, з урахуванням правил заокруглення, запишемо у вигляді

$$U_x = \bar{U}_x \pm U_{U_x} = 220 \pm 0,12 \text{ В, при } p = 0,95.$$

Отже, проведене оцінювання непевностей ВК системи вимірювального контролю якості електроенергії показало, що відносна комбінована непевність частотного ВК складає  $1,5 \cdot 10^{-3} \%$ , а відносна комбінована непевність ВК напруги складає  $0,03\%$ .

## 2.12 Оцінювання непевності результатів вимірювального контролю різниці частот обертання роторів електродвигунів

Рівняння вимірювання частот обертання з подальшим обчисленням різниці частот обертання між роторами взаємозв'язаних електродвигунів (головного та допоміжного) на заданих частотах має вигляд [10, 33, 38, 39]

$$\Delta N_o = f(A_1, A_2, f_{on}, z_m) = N_{o1} - N_{o2} = \frac{60 f_{on}}{A_1 z_m} - \frac{60 f_{on}}{A_2 z_m}, \quad (2.31)$$

де  $\Delta N_o$  – різниця частот обертання роторів електродвигунів (ЕД);

$N_{o1}$  – частота обертання ротора одного ЕД;

$N_{o2}$  – частота обертання ротора іншого ЕД;

$f_{on}$  – опорне значення частоти квантування (16 МГц);

$z_m$  – кількість прорізів модулятора (30);

$A_1, A_2$  – кількість імпульсів, що відповідає частотам обертання головного і допоміжного ЕД.

Під час вимірювання кількості імпульсів, згідно з рівнянням (2.31), отримано три групи спостережень частот обертання в об/хв, по 16 значень в кожній групі, які наведено в табл. 2.7 [33].

Вимірювання здійснювались в лабораторних умовах при температурі навколишнього повітря  $+23 \text{ }^\circ\text{C}$ . Експлуатаційні умови використання частотоміра від  $-30$  до  $+50 \text{ }^\circ\text{C}$ . Відносна похибка квантування  $\delta N_o$  при вимірюванні частот обертання розраховується за формулою

$$\delta N_o = \frac{N_o z_M}{60 f_{on}}. \quad (2.32)$$

Відносна похибка опорної частоти внутрішнього генератора дорівнює  $\pm 2,5 \cdot 10^{-7}$ . Температурний коефіцієнт частоти опорного генератора не більше  $\pm 10^{-9}/^{\circ}\text{C}$ .

Проведемо оцінювання складових комбінованої непевності за типом В невилучених залишків систематичної похибки результатів вимірювань.

Оскільки межі відносної похибки опорної частоти  $\delta_{on}$  не перевищують  $\pm 2,5 \cdot 10^{-7}$ , то межі абсолютної похибки вимірювання частот обертання будуть дорівнювати

$$\Delta_{on} = \overline{N_{o\max}} \delta_{on} = \pm 2,5 \cdot 10^{-7} \cdot 4878,03 = \pm 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ об / хв },$$

де  $\overline{N_{o\max}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{o1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{o2} = 4878,03 \text{ об / хв}$  – середнє арифметичне значення третьої групи спостережень на максимальній (верхній межі вимірювання частоти обертання) частоті обертання роторів головного та допоміжного ЕД.

Таблиця 2.7 – Результати вимірювання частот обертання головного та допоміжного ЕД

Ч.ч.	Перша група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Друга група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД		Третя група спостережень частот обертання головного і допоміжного ЕД	
	$N_{o11}$	$N_{o21}$	$N_{o12}$	$N_{o22}$	$N_{o13}$	$N_{o23}$
1	1195	1183	3005	2993	4889	4866
2	1201	1190	3011	3000	4883	4891
3	1199	1179	3008	2992	4888	4875
4	1188	1207	2999	2971	4869	4883
5	1192	1209	2987	2997	4867	4892
6	1197	1186	2995	3008	4877	4899
7	1199	1178	2998	3010	4850	4871
8	1178	1205	3006	2999	4862	4887
9	1186	1197	2993	2974	4873	4899
10	1194	1171	2996	2988	4859	4878
11	1193	1210	2989	2962	4884	4896
12	1204	1182	3000	2981	4876	4893
13	1200	1189	3012	2999	4855	4882
14	1203	1191	3005	2995	4859	4883
15	1205	1197	3007	3017	4861	4879
16	1198	1196	2994	2973	4877	4894

Стандартну непевність опорної частоти  $u_1$ , при рівномірному законі розподілу похибки всередині меж, визначимо за виразом

$$u_1 = \frac{\Delta_{on}}{\sqrt{3}} = 0,71 \cdot 10^{-3} \text{ об / хв.}$$

Відносну стандартну непевність опорної частоти розрахуємо так

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{|N_{o \max}|} \cdot 100\% = 1,45 \cdot 10^{-5}\%.$$

Непевність квантування  $u_2$  визначимо з меж відносної похибки квантування (2.32) за виразом

$$u_2 = \frac{z_M (\overline{N_{o \max}})^2}{60 f_{on} \sqrt{3}} = 0,43 \text{ об / хв.}$$

Відносна непевність квантування згідно з (1.34) буде дорівнювати  $\tilde{u}_2 = 8,86 \cdot 10^{-3}\%$ .

Непевність типу В  $u_3$ , що обумовлена зміною опорної частоти при зміні температури навколишнього середовища від  $+20$  °С (температура калібрування частотоміра  $t_k$ ) до  $+23$  °С (температура навколишнього середовища в момент вимірювань  $t_{вим}$ ), обчислимо через температурний коефіцієнт частоти  $k_t = \pm 1 \cdot 10^{-9}$  при нормальному законі розподілу за виразом

$$u_3 = \frac{|t_{вим} - t_k| \cdot k_t}{k_p} \overline{N_{o \max}} = 7,47 \cdot 10^{-6} \text{ об / хв,}$$

де  $k_p$  – коефіцієнт охоплення при нормальному законі розподілу, який дорівнює 1,96 для довірчого рівня  $p = 0,95$ .

Відносна непевність, обумовлена зміною температури навколишнього середовища, буде дорівнювати  $\tilde{u}_3 = 1,53 \cdot 10^{-7}\%$ .

Експериментальну непевність вимірювання частот обертання на верхній межі вимірювання головного та допоміжного ЕД, обумовлену джерелами непевностей, що мають випадковий характер при опосередкованих вимірюваннях частот обертання з урахуванням кореляційного зв'язку, розрахуємо за формулою

$$u_4^2 = c_1^2 u^2(\overline{N_{o1 \max}}) + c_2^2 u^2(\overline{N_{o2 \max}}) + 2c_1 c_2 u(\overline{N_{o1 \max}}) u(\overline{N_{o2 \max}}) r(\overline{N_{o1 \max}}, \overline{N_{o2 \max}}). \quad (2.33)$$

Коефіцієнти чутливості ( $c_1$  та  $c_2$ ), з урахуванням рівняння (2.31), обчислимо за формулами

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_1} = -\frac{60 f_{on}}{A_1^2 z_M} = -\frac{\overline{N_{o1}}^2 z_M}{60 f_{on}}, \\ c_2 &= \frac{\partial \Delta N_o}{\partial A_2} = \frac{60 f_{on}}{A_2^2 z_M} = \frac{\overline{N_{o2}}^2 z_M}{60 f_{on}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Стандартні непевності типу А [ $u(\overline{N_{o1\max}})$ ,  $u(\overline{N_{o2\max}})$ ] при вимірюванні частот обертання на верхній межі вимірювання відповідно дорівнюють

$$u(\overline{N_{o1\max}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_{o1\max i} - \overline{N_{o1\max}})^2}{n(n-1)}}, \quad u(\overline{N_{o2\max}}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (N_{o2\max i} - \overline{N_{o2\max}})^2}{n(n-1)}}.$$

Значення коефіцієнта кореляційного зв'язку між частотами обертання головного і допоміжного ЕД розрахуємо за формулою

$$\begin{aligned} r(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}}) &= \frac{u(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}})}{u(\overline{N_{o1\max}})u(\overline{N_{o2\max}})} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (N_{o1\max i} - \overline{N_{o1\max}})(N_{o2\max i} - \overline{N_{o2\max}})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (N_{o1\max i} - \overline{N_{o1\max}})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (N_{o2\max i} - \overline{N_{o2\max}})^2}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

де  $u(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}})$  – кореляційний момент, який обчислюється за формулою

$$u(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}}) = \frac{\sum_{i=1}^n (N_{o1\max i} - \overline{N_{o1\max}})(N_{o2\max i} - \overline{N_{o2\max}})}{n(n-1)}. \quad (2.36)$$

Для отримання числових значень кореляційного моменту та коефіцієнта кореляційного зв'язку розрахуємо середні значення частот обертання головного  $\overline{N_{o1\max}}$  і допоміжного  $\overline{N_{o2\max}}$  ЕД на верхній межі вимірювання (максимальному діапазоні вимірювання), оскільки на цьому діапазоні вимірювання найбільші відхилення частоти обертання головного

ЕД від частоти обертання допоміжного ЕД, а також найбільші значення середньоквадратичних відхилень, за виразами

$$\overline{N_{o1\max}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{o1\max i} = 4870,56 \text{ об/хв} \quad \overline{N_{o2\max}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{o2\max i} = 4885,5 \text{ об/хв}.$$

Підставивши середні арифметичні значення частот  $\overline{N1_o}$  і  $\overline{N2_o}$  у формулу (2.34), отримаємо такі числові значення коефіцієнтів чутливості:  $c_1 = 0,74$  об/хв, а  $c_2 = 0,75$  об/хв. Стандартна непевність типу А при вимірюванні частот обертання головного ЕД буде дорівнювати  $u(\overline{N_{o1\max}}) = 3,03$  об/хв, а допоміжного ЕД –  $u(\overline{N_{o2\max}}) = 2,5$  об/хв. Значення кореляційного моменту, згідно з (2.36), складає  $u(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}}) = 1,59$  (об/хв)<sup>2</sup>. Підставивши значення кореляційного моменту і стандартних непевностей у формулу (2.35), отримаємо коефіцієнт кореляційного зв'язку, який дорівнює  $r(\overline{N_{o1\max}}, \overline{N_{o2\max}}) = 0,21$ .

Таким чином, підставивши отримані числові значення коефіцієнтів у рівняння (2.33), отримаємо експериментальну непевність вимірювання частот обертання роторів ЕД, що складає  $u_4 = 3,21$  об/хв. Відносна експериментальна непевність типу А дорівнює  $\tilde{u}_4 = 0,07\%$ .

Комбіновану непевність контролю різниці частот обертання роторів ЕД розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} = 3,24 \text{ об/хв},$$

а відносна комбінована непевність дорівнює  $\tilde{u}_c = 0,07\%$ .

Ефективне число ступенів вільності  $\nu_{eff}$  визначимо зі співвідношення

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\frac{u_1^4}{\infty} + \frac{u_2^4}{\infty} + \frac{u_3^4}{\infty} + \frac{u_4^4}{n-1}} = 16,$$

тоді коефіцієнт охоплення береться з таблиці Стюдента [1] і для ефективного числа ступенів вільності 16 складає

$$t_{0,95}(\nu_{eff}) = t_{0,95}(16) = 2,12.$$

З урахуванням того, що закон розподілу результатів вимірювань є нормальним і довірчий рівень складає  $p = 0,95$ , розрахуємо розширену непевність результатів контролю різниці частот обертання за виразом

$$U_{0,95} = t_{0,95}(v_{eff})u_c = 2,12 \cdot 3,24 = \pm 6,87 \text{ об/хв},$$

а відносна розширена непевність дорівнює  $\tilde{U}_{0,95} = 0,14\%$ .

Таким чином, результат контролю різниці частот обертання роторів ЕД на верхній межі вимірювання запишемо у вигляді:

$$\Delta N_0 = \left| \overline{N_{o1\max}} - \overline{N_{o2\max}} \right| = 14,94 \text{ об/хв},$$

$$8,07 \leq \Delta N_0 \leq 21,81 \text{ об/хв}, p = 0,95,$$

або

$$\Delta N_0 \pm U_{0,95} = 14,94 \pm 6,87 \text{ об/хв}, p = 0,95.$$

### 2.13 Оцінювання непевності груп спостережень при калібруванні еталона напруги

Проводиться калібрування еталона вольт за допомогою стабільного джерела опорної напруги протягом декількох тижнів. У кожний з  $J = 10$  днів проводяться  $K = 5$  незалежних повторних спостережень різниці потенціалів  $V_s$ . Необхідно одержати якнайкращу оцінку результату вимірювань і оцінити її непевність [1, 40].

Визначаємо середні арифметичні значення кожної групи спостережень за виразом (результати подані в табл. 2.8)

$$\bar{V}_j = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K V_{jk},$$

де  $V_{jk}$  – позначає  $k$ -те спостереження різниці потенціалів  $V_s$  еталона ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) в  $j$ -ий день ( $j = 1, 2, \dots, J$ ).

Таблиця 2.8 – Результати експериментальних досліджень еталона напруги

День, $j$	1	2	3	4	5
$\bar{V}_j, \text{В}$	10,000172	10,000116	10,000013	10,000144	10,000106
$s_j^2(V_{jk})$	60	77	111	101	67
День, $j$	6	7	8	9	10
$\bar{V}_j, \text{В}$	10,000031	10,00006	10,000125	10,000163	10,000041
$s_j^2(V_{jk})$	93	80	73	88	86

Знаходимо найкращу оцінку вимірюваної величини  $V_s$  як середнє арифметичне  $\bar{V}_j$

$$V_s = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \bar{V}_j = \bar{V} = 10,000097 B.$$

Визначаємо оцінки внутрішньогрупової дисперсії  $s_j^2(V_{jk})$  у кожній  $j$ -й групі за формулою

$$s_j^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1} \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2. \quad (2.37)$$

Експериментальну дисперсію середніх арифметичних груп розрахуємо за формулою

$$s^2(\bar{V}_j) = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 = (52 \text{ мкВ})^2. \quad (2.38)$$

Далі визначаємо дві незалежні оцінки усередненої внутрішньогрупової дисперсії спостережень

$$s_I^2 = K s^2(\bar{V}_j) = \frac{K}{J-1} \sum_{j=1}^J (\bar{V}_j - \bar{V})^2 = (128 \text{ мкВ})^2, \quad (2.39)$$

що в даному випадку має  $J - 1 = 9$  ступенів вільності;

$$s_{II}^2 = \bar{s}_j^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K (V_{jk} - \bar{V}_j)^2 = (85 \text{ мкВ})^2, \quad (2.40)$$

що в даному випадку має  $J(K - 1) = 40$  ступенів вільності.

За  $F$ -розподілом обчислюємо відношення двох незалежних оцінок  $s_I^2(v_I)$  і  $s_{II}^2(v_{II})$

$$F(v_I, v_{II}) = \frac{s_I^2(v_I)}{s_{II}^2(v_{II})} = 2,25.$$

Критичні значення  $F$  для ймовірностей 0,95 і 0,975 і для числа ступенів вільності  $v_I = 9$  і  $v_{II} = 40$  знаходять за таблицею розподілу Фішера:  $F_{0,95} = 2,12$ ;  $F_{0,975} = 2,45$ .

Оскільки при ймовірності 0,975  $F(v_I, v_{II}) < F_p$ , то існування міжгрупової похибки заперечується. В цьому випадку оцінену дисперсію  $s^2(\bar{y})$  для  $\bar{y}$  знаходимо за виразом

$$s^2(\bar{V}) = \frac{(J-1)s_I^2 + J(K-1)s_{II}^2}{JK(JK-1)} = (13 \text{ мкВ})^2, \quad (2.41)$$

з  $(JK - 1) = 49$  ступенями вільності.



Розширену непевність результату вимірювання розраховуємо за виразом

$$U = ks(\bar{V}) = 2,3 \cdot 3,61 = 8,3 \text{ мкВ, при } p=0,975,$$

де  $k = 2,3$  – коефіцієнт охоплення для нормального закону розподілу і довірчого рівня  $p = 0,975$ .

Для ймовірності  $0,95$ , коли  $F(\nu_I, \nu_{II}) \geq F_p$ , існування міжгрупової дисперсії приймається, а оцінювана дисперсія  $\bar{V}$  знаходиться за виразом

$$s^2(\bar{V}) = \frac{s_j^2(\bar{V}_j)}{J} = \frac{(57 \text{ мкВ})^2}{10} = (325 \text{ мкВ})^2$$

і має  $J - 1 = 9$  ступенів вільності.

Розширена непевність результату вимірювання дорівнює

$$U = t_p(\nu)s(\bar{V}) = 2,26 \cdot 18 = 40,7 \text{ мкВ, при } p = 0,95,$$

де  $t_p(\nu) = 2,26$  – коефіцієнт Стюдента для числа ступенів вільності  $\nu = J - 1 = 9$  і довірчого рівня  $p = 0,95$ .

Методи дисперсійного аналізу широко застосовуються при обробці результатів міжлабораторних випробувань. Такі випробування передбачають участь декількох незалежних, однаково компетентних лабораторій, що проводять декілька груп прямих вимірювань. Звичайно передбачається, що розбіжності між окремими результатами як усередині однієї лабораторії, так і між лабораторіями є статистичними за природою, незалежно від причин, що їх викликають. В цьому випадку кожне лабораторне середнє значення є незміщеною оцінкою результату вимірювання, а якнайкращою оцінкою результату об'єднаних спостережень вважають, звичайно, середнє лабораторних середніх значень.

## 2.14 Оцінювання непевності сукупного вимірювання маси

В результаті зважування було отримано такі комбінації значень маси двох тягарців:

$$\begin{aligned} m_1 &= 4,97 \text{ кг}; \\ m_2 &= 1,02 \text{ кг}; \\ m_1 + m_2 &= 6,08 \text{ кг}; \\ m_1 - m_2 &= 4,02 \text{ кг}. \end{aligned}$$

Необхідно оцінити маси тягарців  $m_1$ ,  $m_2$  та їх непевності при рівні довіри  $p = 0,95$ .

Для оцінювання мас тягарців складемо систему **умовних рівнянь** на основі вимірних комбінацій значень мас тягарців вигляду [40]

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 4,97; \\ 0 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 1,02; \\ 1 \cdot m_1 + 1 \cdot m_2 &= 6,08; \\ 1 \cdot m_1 - 1 \cdot m_2 &= 4,02. \end{aligned} \right\}$$

Далі складаємо систему **нормальних рівнянь**. Для цього алгебраїчно підсумуємо ліву і праву частини рівняння системи, що наведена вище, спочатку з коефіцієнтами при значеннях маси  $m_1$ , які не нульові (тобто беруть участь в  $i$ -му вимірюванні), а потім з коефіцієнтами при значеннях маси  $m_2$ , які також є ненульовими, в результаті отримаємо

$$\left. \begin{aligned} 3 \cdot m_1 + 0 \cdot m_2 &= 15,07; \\ 0 \cdot m_1 + 3 \cdot m_2 &= 3,08. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язавши систему **нормальних рівнянь**, отримаємо оцінку мас тягарців при сукупному вимірюванні

$$m_1 = 5,02 \text{ кг}; m_2 = 1,03 \text{ кг}.$$

Отримані оцінки значень мас тягарців підставляємо до першої системи **умовних рівнянь**, в результаті чого отримаємо нев'язки

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 4,97 - 5,02 = -0,05 \text{ кг}; \\ \delta_2 &= 1,02 - 1,03 = -0,01 \text{ кг}; \\ \delta_3 &= 6,08 - (5,02 + 1,03) = 0,03 \text{ кг}; \\ \delta_4 &= 4,02 - (5,02 - 1,03) = 0,03 \text{ кг}. \end{aligned} \right\}$$

Числові значення отриманих нев'язок характеризують розбіжність (неоднозначність) лівої і правої частин системи **умовних рівнянь**.

Стандартна непевність системи **умовних рівнянь** розраховується за виразом

$$u(\delta) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \delta_i^2}{n-q}} = \sqrt{\frac{(-0,05)^2 + (-0,01)^2 + 0,03^2 + 0,03^2}{4-2}} = 0,05 \text{ кг},$$

де  $n$  – кількість комбінацій вимірюваних значень (**умовних рівнянь**) ( $n = 4$ );

$q$  – кількість значень величин (оцінок), які потрібно визначити ( $q = 2$ ).

Стандартну непевність першої оцінки маси тягарця  $m_1$  розрахуємо за виразом

$$u(m_1) = u(\delta) \sqrt{\frac{D_{11}}{D}} = 0,05 \sqrt{\frac{3}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}} = 0,05 \sqrt{\frac{3}{9}} = 0,03 \text{ кг},$$

де  $D$  – головний визначник;

$D_{11}$  – ад'юнкт, що визначається з системи **нормальних рівнянь** шляхом закреслення першого рядка і першого стовпця.

Стандартну непевність другої оцінки маси тягарця  $m_2$  розрахуємо за виразом

$$u(m_2) = u(\delta) \sqrt{\frac{D_{22}}{D}} = 0,05 \sqrt{\frac{3}{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}} = 0,05 \sqrt{\frac{3}{9}} = 0,03 \text{ кг},$$

де  $D_{22}$  – ад'юнкт, що визначається з системи **нормальних рівнянь** шляхом закреслення другого рядка і другого стовпця.

Розширені непевності оцінок мас тягарців  $m_1$  і  $m_2$  при довірчому рівні  $p = 0,95$  визначаються за виразами:

$$U_{m1} = t_p \cdot u(m_1) = 4,3 \cdot 0,03 = 0,12 \text{ кг};$$

$$U_{m2} = t_p \cdot u(m_2) = 4,3 \cdot 0,03 = 0,12 \text{ кг},$$

де  $t_p$  – коефіцієнт Стюдента при числі ступенів вільності  $\nu = n - q = 4 - 2 = 2$  і  $p = 0,95$  ( $t_p = 4,3$ ).

Отже, результат сукупного вимірювання маси тягарців запишемо у вигляді

$$m_1 = 5,02 \pm 0,12 \text{ кг}, p = 0,95;$$

$$m_2 = 1,03 \pm 0,12 \text{ кг}, p = 0,95.$$

## 2.15 Методика оцінювання непевності результатів сукупних вимірювань

Розглянемо випадок, в якому маємо систему з 9-ти рівнянь сукупних вимірювань

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + A_{14}x_4 = y_1, \\ A_{21}0 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + A_{24}0 = y_2, \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}0 + A_{34}0 = y_3, \\ A_{41}0 + A_{42}0 + A_{43}x_3 + A_{44}x_4 = y_4, \\ A_{51}x_1 + A_{52}x_2 + A_{53}x_3 + A_{54}0 = y_5, \\ A_{61}x_1 + A_{62}0 + A_{63}x_3 + A_{64}x_4 = y_6, \\ A_{71}0 + A_{72}x_2 + A_{73}x_3 + A_{74}x_4 = y_7, \\ A_{81}0 + A_{82}x_2 + A_{83}0 + A_{84}x_4 = y_8, \\ A_{91}x_1 + A_{92}0 + A_{93}x_3 + A_{94}0 = y_9. \end{cases}$$

Як наочний приклад розв'язання такого вимірювального завдання використаємо значення, що наведені в табл. 2.9.

Таблиця 2.9 – Результати сукупних вимірювань

$x_1+x_2+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+x_3$	$x_1+x_3+x_4$	$x_2+x_4+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
14,13	5,14	7,17	7,15	10,13	12,26	12,19	6,17	8,15	0,95

Відповідно до загальноприйнятої методики оцінювання результатів сукупних вимірювань складаємо систему нормальних рівнянь [40], кількість рівнянь у системі має відповідати кількості невідомих значень величин

$$\begin{cases} B_{11}x_1 + B_{12}x_2 + B_{13}x_3 + B_{14}x_4 = c_1; \\ B_{21}x_1 + B_{22}x_2 + B_{23}x_3 + B_{24}x_4 = c_2; \\ B_{31}x_1 + B_{32}x_2 + B_{33}x_3 + B_{34}x_4 = c_3; \\ B_{41}x_1 + B_{42}x_2 + B_{43}x_3 + B_{44}x_4 = c_4; \end{cases}$$

де коефіцієнти:

$$B_{11} = \sum_{j=1}^9 A_{j1}^2 = 5,$$

$$B_{22} = \sum_{j=1}^9 A_{j2}^2 = 6,$$

$$B_{33} = \sum_{j=1}^9 A_{j3}^2 = 7,$$

$$B_{44} = \sum_{j=1}^9 A_{j4}^2 = 5,$$

$$B_{12} = B_{21} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j2} = 3,$$

$$B_{13} = B_{31} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j3} = 4,$$

$$B_{14} = B_{41} = \sum_{j=1}^9 A_{j1} \cdot A_{j4} = 2,$$

$$B_{24} = B_{42} = \sum_{j=1}^9 A_{j4} \cdot A_{j2} = 3,$$

$$B_{23} = B_{32} = \sum_{j=1}^9 A_{j3} \cdot A_{j2} = 4,$$

$$B_{34} = B_{43} = \sum_{j=1}^9 A_{j3} \cdot A_{j4} = 4,$$

$$c_1 = \sum_{j=1}^9 A_{j1} y_j = 14,13+7,17+10,13+12,26+8,15=51,84,$$

$$c_2 = \sum_{j=1}^9 A_{j2} y_j = 14,13+5,14+7,17+10,13+12,19+6,17 = 54,93,$$

$$c_3 = \sum_{j=1}^9 A_{j3} y_j = 14,13+5,14+7,15+10,13+12,26+12,19+8,15 = 69,15,$$

$$c_4 = \sum_{j=1}^9 A_{j4} y_j = 14,13+7,15+12,26+6,17+12,19 = 51,9.$$

Врахувавши значення даних коефіцієнтів система нормальних рівнянь набуде вигляду

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 51,84; \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 54,93; \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 69,15; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 51,9. \end{cases}$$

Головний визначник цієї системи визначається за виразом

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 168.$$

Оцінка вимірюваних величин знаходиться за виразами:

$$\bar{x}_1 = \frac{D_{x1}}{D}, \quad \bar{x}_2 = \frac{D_{x2}}{D}, \quad \dots, \quad \bar{x}_m = \frac{D_{xm}}{D},$$

Визначники  $D_{x1}$ ,  $D_{x2}$ ,  $D_{x3}$ ,  $D_{x4}$  визначаються з головного визначника  $D$  шляхом заміни стовпця з коефіцієнтами при невідомому  $x_m$  на стовпець з вільними членами  $c_j$

$$D_{x1} = \begin{vmatrix} 51,84 & 3 & 4 & 2 \\ 54,93 & 6 & 4 & 3 \\ 69,15 & 4 & 7 & 4 \\ 51,9 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 730,83;$$

$$D_{x2} = \begin{vmatrix} 5 & 51,84 & 4 & 2 \\ 3 & 54,93 & 4 & 3 \\ 4 & 69,15 & 7 & 4 \\ 2 & 51,9 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 415,33;$$

$$D_{x3} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 51,9 & 2 \\ 3 & 6 & 54,93 & 3 \\ 4 & 4 & 69,15 & 4 \\ 2 & 3 & 51,9 & 5 \end{vmatrix} = 585;$$

$$D_{x4} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 & 51,84 \\ 3 & 6 & 4 & 54,93 \\ 4 & 4 & 7 & 69,15 \\ 2 & 3 & 4 & 51,9 \end{vmatrix} = 734,19.$$

Найімовірніші значення невідомих величин дорівнюють:

$$x_1 = 730,83/168 = 4,35;$$

$$x_2 = 415,53/168 = 2,47;$$

$$x_3 = 585/168 = 3,48;$$

$$x_4 = 734,19/168 = 4,37.$$

Підставляємо значення найімовірніших значень до умовних рівнянь, в результаті чого отримуємо:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,35 + 2,47 + 3,48 + 4,37 = 14,67;$$

$$x_2 + x_3 = 2,47 + 3,48 = 5,95;$$

$$x_1 + x_2 = 4,35 + 4,37 = 8,72;$$

$$x_3 + x_4 = 3,48 + 4,37 = 7,85;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4,35 + 2,47 + 3,48 = 10,3;$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 4,35 + 3,48 + 4,37 = 12,2;$$

$$x_2 + x_4 + x_3 = 2,47 + 4,37 + 3,48 = 10,32;$$

$$x_2 + x_4 = 2,47 + 4,37 = 6,84;$$

$$x_3 + x_1 = 3,48 + 4,35 = 7,83.$$

Знаходимо нев'язки:

$$v_1 = 14,13 - 14,67 = -0,54;$$

$$v_2 = 5,14 - 5,95 = -0,81;$$

$$v_3 = 7,17 - 8,72 = -1,55;$$

$$v_4 = 7,15 - 7,85 = -0,7;$$

$$v_5 = 10,13 - 10,3 = -0,17;$$

$$v_6 = 12,26 - 12,2 = 0,06;$$

$$v_7 = 12,19 - 10,32 = 1,87;$$

$$v_8 = 6,17 - 6,84 = -0,67;$$

$$v_9 = 8,15 - 7,83 = 0,32.$$

Після знайдених нев'язок розраховуємо непевності вимірюваних величин за виразом [40]

$$u_{x_1} = \sqrt{\frac{A_{11}}{D} \cdot \frac{\sum_{j=1}^m v_j^2}{m-n}}, \quad (2.42)$$

аналогічно для інших вимірюваних значень знаходимо непевності  $u_{x_2}$ ,  $u_{x_3}$ ,  $u_{x_4}$ . Але перед цим потрібно розрахувати значення ад'юнктів, що отримуються з головного визначника  $D$  шляхом викреслення з матриці визначника  $n$ -го стовпця і  $m$ -го рядка, відповідних оцінюваних вимірюваних величині з наступним домноженням на  $(-1)^{k+1}$ . Тобто, для розрахунку ад'юнкта  $A_{11}$  викреслюється перший стовпець та перший рядок з головного визначника і розв'язується такий визначник

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 67.$$

Для визначення ад'юнкта  $A_{22}$  викреслюється другий стовпець та другий рядок з головного визначника і розв'язується визначник

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 51.$$

Для визначення ад'юнкта  $A_{33}$  викреслюється третій стовпець та третій рядок з головного визначника і розв'язується визначник

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 72.$$

Для визначення ад'юнкта  $A_{44}$  викреслюється четвертий стовпець та четвертий рядок з головного визначника і розв'язується визначник

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 67.$$

Таким чином, отримуємо значення непевностей сукупних вимірювань за формулою (2.42)

$$u_{x_1} = 0,79;$$

$$u_{x_2} = 0,69;$$

$$u_{x_3} = 0,82;$$

$$u_{x_4} = 0,79.$$

Для степенів вільності  $m - n = 5$  та ймовірності  $p = 0,95$  коефіцієнт Стьюдента дорівнює  $t_p = 2,57$ . Враховуючи це значення розширених непевностей сукупних вимірювань складають:



$$U_1 = \pm 2,57 \cdot 0,79 = \pm 2,03;$$

$$U_2 = \pm 2,57 \cdot 0,69 = \pm 1,77;$$

$$U_3 = \pm 2,57 \cdot 0,82 = \pm 2,11;$$

$$U_4 = \pm 2,57 \cdot 0,79 = \pm 2,03.$$

Отже, результати сукупного вимірювання запишемо у вигляді:

$$x_1 = 4,35 \pm 2,03, P = 0,95;$$

$$x_2 = 2,47 \pm 1,77, P = 0,95;$$

$$x_3 = 3,48 \pm 2,11, P = 0,95;$$

$$x_4 = 4,37 \pm 2,03, P = 0,95.$$

## 2.16 Оцінювання непевності результатів одноразових вимірювань з одноразовим спостереженням

Прямі одноразові вимірювання виконують один раз, і значення фізичної величини визначають за показами ЗВТ, призначеного для вимірювання цієї величини. Однак в деяких випадках прямі одноразові вимірювання повторюють декілька разів. Надлишкові вимірювання іноді виконують для захисту від збоїв апаратури, анормальних результатів тощо, а кінцевий результат визначають за одним вимірюванням, яке вибирають з декількох проведених вимірювань. Оцінкою значення вимірної величини  $Y$  є безпосередньо показ ЗВТ. Тому опрацювання даних у цьому випадку полягає в аналізі складових непевностей вимірювання, вилученні систематичних складових непевностей, оцінюванні невилучених залишків систематичних складових непевностей та підсумуванні складових непевностей.

Таким чином, для знаходження оцінки результату прямого вимірювання з одноразовим спостереженням можна використати способи оцінювання непевності лише за типом В. Підсумовують усі складові непевності, що оцінені за типом В, та визначають комбіновану непевність. У випадках, коли потрібно подати інтервальну оцінку непевності, додатково визначають розширену непевність.

Розглянемо приклад. Нехай проведено вимірювання за допомогою вольтметра, що має верхню межу вимірювання  $V_k = 1000$  В і клас точності 0,1/0,01. В результаті вимірювання отримано показ вольтметра  $V = 500,2$  В. Вимірювання здійснено при температурі навколишнього середовища  $t = 26^\circ \text{C}$  та дії магнітного поля напруженістю  $H = 400$  А/м. Відомо, що температурна похибка не перевищує основну на кожних  $10^\circ \text{C}$  відхилення температури від нормальних умов  $20^\circ \text{C}$ , а магнітна похибка складає

половину основної інструментальної похибки ЗВТ при напруженості зовнішнього поля до 400 А/м. Необхідно оцінити непевність результату вимірювання напруги [1, 4].

Непевність результату вимірювання складається з основної інструментальної непевності, яка обумовлена обмеженням класом точності вольтметра, та додаткових непевностей, зумовлених відхиленням температури навколишнього середовища від нормальної та наявністю зовнішнього магнітного поля.

1. Оскільки клас точності приладу нормовано параметрами  $c$  (сума приведеної адитивної та відносної мультиплікативної похибок) та  $d$  (приведена адитивна похибка), а саме: 0,1/0,01, то формула для розрахунку класу точності має вигляд

$$\gamma = \pm \left[ c + d \left( \frac{V_k}{V} - 1 \right) \right] = \pm \left[ 0,1 + 0,01 \left( \frac{1000}{500,2} - 1 \right) \right] = \pm 0,11.$$

Основну інструментальна непевність вимірювання напруги (непевність типу В), в цьому випадку можна розрахувати так

$$u_{ЗВТ} = \frac{V\gamma}{100\% \sqrt{3}} = 500,2 \frac{0,11}{1,73 \cdot 100} \approx 0,32 В.$$

2. Оскільки нормальна температура навколишнього середовища складає 20 °С, а значення температури навколишнього середовища, при якому проводилось вимірювання, складало  $t = 26$  °С, то додаткова складова непевності, що зумовлена відхиленням температури, буде дорівнювати

$$u_t = \frac{26 - 20}{10} u_{ЗВТ} = 0,6 u_{ЗВТ} \approx 0,19 В.$$

3. Додаткова складова непевності, що зумовлена впливом напруженості зовнішнього магнітного поля  $H=400$  А/м, буде дорівнювати

$$u_H = \frac{1}{2} u_{ЗВТ} = 0,16 В.$$

4. Комбінована непевність вимірювання напруги буде дорівнювати

$$u_c = \sqrt{u_{ЗВТ}^2 + u_t^2 + u_H^2} = 0,41 В.$$

Задавшись довірчим рівнем  $p = 0,95$  (з урахуванням припущення про нормальний закон розподілу результату вимірювання  $k_p = 1,96$ ) знаходимо розширену непевність

$$U = k_p u_c = 1,96 \cdot 0,41 = 0,8 \text{ В.}$$

Таким чином, записуємо результат вимірювання напруги у вигляді

$$V = 500,2 \pm 0,8 \text{ В, при } p = 0,95$$

або

$$499,4 \leq V \leq 501 \text{ В, } p = 0,95.$$

Отже, при оцінюванні результатів прямих вимірювань з одноразовим спостереженням можуть траплятися різні випадки, що залежать від кількості складових непевностей. Це може бути лише одна основна непевність або декілька складових непевностей.

## **2.17 Оцінювання непевності результатів випробувань при визначенні об'ємної частки бензолу**

Лабораторія проводить випробування з визначення об'ємної частки бензолу у бензинів для широкого кола замовників за стандартизованою методикою [41], в якій відсутні відомості про непевності результатів. Але вказано:

- межі повторюваності (максимальне допустиме розходження між результатами, які були отримані в двох лабораторіях)  $r = 0.08\%$ ;
- межі відтворюваності (максимальне допустиме розходження між двома паралельними вимірюваннями, які були отримані в умовах повторюваності)  $R = 0.18\%$ .

Крім того, в методиці вказано, що «тяжкі ароматичні сполуки» здійснюють заважаючий вплив на результат визначення бензолу. Необхідні спеціальні міри, щоб забезпечити стабільність зразка під час зберігання та аналізу.

Як витікає з методики, правильність при міжлабораторному експерименті не оцінювалась. Методика дозволяє визначати об'ємну частку бензолу в діапазоні від 0.1 до 5.0%.

Для отримання оцінки непевності результату випробування скористаємося співвідношеннями між СКВ повторюваності та відтворюваності, а також відповідними межами, а саме [40]:

$$r = 2,8\sigma_r \text{ та } R = 2,8\sigma_R.$$

Звідки отримаємо стандартні відхилення повторюваності та відтворюваності

$$\sigma_r = 0,08\% / 2,8 = 0,029\%;$$

$$\sigma_R = 0,18\% / 2,8 = 0,064\%.$$

Якби умови, в яких проводяться робочі випробування, повністю збігалися з умовами, в яких проводився спільний міжлабораторний експеримент, тобто відтворюваність охоплювала всі джерела непевності, то для одноразового результату вимірювання можна було б зразу переходити для обчислення розширеної непевності  $U$ .

Для граничних точок діапазону мали б результати випробувань, що наведені в таблиці 2.10 [1, 40].

Таблиця 2.10 – Результати випробувань в граничних точках діапазону

Вміст бензолу	$u = \sigma_R$	$U = 2u$	Результат
0,1%	0,64	0,128	0,1±0,1
5,0%	0,64	0,128	5,0±0,1

Припустимо, що в кожній лабораторії проводилось по 2 паралельних вимірювання, тобто  $n = 2$ , а результат обчислюється як середнє значення. Тоді непевність середнього результату буде обчислюватись за виразом [40]

$$u = [\sigma_R^2 - \sigma_r^2(1 - 1/n)]^{1/2}.$$

В результаті отримаємо стандартну непевність  $u = 0,061$  та розширену непевність  $U = 0,122$ .

Наведений результат є свідченням того, що збільшення числа паралельних спостережень несуттєво впливає на зменшення непевності результату, оскільки **домінантою є відтворюваність**. Паралельні спостереження в цьому випадку проводять для зменшення ймовірності грубих промахів.

При міжлабораторному експерименті вплив варіації матриці проби (наявність заважаючих компонент у ній) не враховувався, тому що всі лабораторії випробовували ті ж самі за складом зразки. При робочих випробуваннях зразки, які надаються різними замовниками, можуть бути за складом різними, а це при міжлабораторному експерименті не враховувалось. Припустимо, що проведені додаткові дослідження дали значення 0,1 від знайденої концентрації.

При міжлабораторному експерименті оцінювання відтворюваності проводилось на підготовлених спеціальним чином пробах, тому

нестабільність їх не враховувалась. В реальній роботі лабораторії відбір та зберігання проби до доставки її в лабораторію буде вносити додаткову непевність в результат. Було оцінено її як 0,02 від знайденої концентрації.

Вплив цих складових потрібно врахувати відповідно до виразу з коефіцієнтом впливу  $c_i = 1$

$$y = \mu + \delta + B + \sum_i c_i x'_i + e, \quad (2.43)$$

де  $x'_i$  – значення, відхилені від номінального  $x_i$ , що не враховано при спільному експерименті;

$\mu$  – сертифікатне значення;

$B$  – можливе значення лабораторної складової зсуву результату (правильності) в умовах відтворюваності;

$e$  – випадкова складова похибки вимірювання в умовах повторюваності;

$\delta$  – зсув результату, внесений недосконалістю методики випробувань;

$c_i$  – коефіцієнти чутливості, які дорівнюють  $\partial y / \partial x'_i$ .

Комбінована непевність, складові якої були визначені за спадним та висхідним підходами, визначається за формулою

$$u_c = [u_R^2 + u_{\text{нестаб}}^2 + u_{\text{проби}}^2]^{1/2}. \quad (2.44)$$

Результати розрахунку непевності результатів випробувань наведені в табл. 2.11 [40].

Таблиця 2.11 – Результати розрахунку непевності

Вміст бензолу	$u_R$	$u_{\text{нестаб}}$	$u_{\text{проби}}$	$u_c$	$U=2u_c$	Результат
0.1%	0,064	0,002	0,01	0,065	0,130	0,1±0,1
5.0%	0,064	0,1	0,5	0,514	1,028	5,0±1,0

Для проміжних рівнів концентрації непевність розраховується за формулою (рівняння прямої, що проходить через дві точки)

$$U = 0,175X + 0,09. \quad (2.45)$$

Таким чином, вдале поєднання двох підходів дозволяє об'єктивно оцінити непевність результату. З наведеного прикладу витікає, що ігнорування додаткових факторів, особливо при високих концентраціях, може призвести до переоцінювання якості результатів і, тим самим, до помилкового висновку про якість бензину.

## 2.18 Методика встановлення міжкалібрувального інтервалу на основі концепції непевності

Для впровадження ЗВ обертаючих параметрів електродвигунів (ЕД) в промислову експлуатацію потрібно оцінити відповідність та встановити міжкалібрувальний інтервал. Для цього виконуються поетапні експериментальні дослідження ЗВ обертаючих параметрів ЕД відповідно до методики встановлення міжкалібрувального інтервалу, суть якої полягає в нижченаведеному.

1. Проводиться серія вимірювань на нижній межі вимірювання ЗВ (мінімальне значення, що нормується в ЗВ), всередині діапазону вимірювань ЗВ та на верхній межі вимірювання ЗВ (максимальне значення, що нормується в ЗВ). При цьому на вході ЗВ задаються взірцеві значення вимірюваної величини, що відповідають пронормованому діапазону вимірювання ЗВ, тобто, експериментальні дослідження виконуються на основі використання методу зразкових мір або методу зразкових сигналів комплектної повірки (метрологічної атестації) ЗВ [42]. На основі отриманих експериментальних даних визначаються стандартні непевності типу А для нижньої межі вимірювання, для середини діапазону вимірювання та для верхньої межі вимірювання за формулою (1.4).

Із отриманих за формулою (1.4) експериментальних стандартних непевностей типу А необхідно вибрати найбільшу за значенням (максимальну) стандартну непевність типу А  $u_{A_{\max}}(\bar{x})$ , яку в подальшому буде використано для визначення міжкалібрувального інтервалу ЗВ.

2. Виконується оцінювання стандартних непевностей типу В на основі фонду доступної інформації про невилучені залишки систематичних ефектів, які теоретично можуть проявлятися в процесі виконання вимірювань. При цьому слід опиратися на інформацію, отриману з раніше проведених вимірювань, допустимих робочих умов експлуатації ЗВ, фізичних властивостей вимірюваної величини, паспортних даних на ЗВ або довідників. Після оцінювання теоретично можливих складових стандартних непевностей типу В необхідно розрахувати комбіновану непевність типу В  $u_{cB}$  на основі відомих форм подання комбінованих непевностей [42].

3. На основі визначених максимальної стандартної непевності типу А та комбінованої непевності типу В (теоретично можливих впливів на результат вимірювання складових непевностей типу В) визначається комбінована непевність результату вимірювання за формулою (1.19) при відсутності кореляції між досліджуваними величинами, або (1.22) у разі наявності кореляційного зв'язку між досліджуваними величинами.

4. Визначається розширена непевність, яка буде прописана як нормована величина в технічній документації на ЗВ. Її одержують шляхом

множення комбінованої непевності результату вимірювання на коефіцієнт охоплення за формулою (1.30).

Ефективне число ступенів вільності розраховується за формулою Велча-Саттерсвейта (1.33).

5. На основі апріорної інформації про інтенсивність експлуатації ЗВ та значення середнього напрацювання до відмови ЗВ визначають календарну протяжність  $t$  експлуатації ЗВ.

6. Для визначення міжкалібрувального інтервалу ЗВ його потрібно деякий час випробувувати (експлуатувати) в реальних умовах, за яких будуть виконуватись вимірювання.

7. Після тривалих випробувань (дослідної експлуатації) ЗВ на місці експлуатації розраховують комбіновану та розширену непевності в реальних умовах експлуатації. При цьому під час розрахунків враховують робочі умови експлуатації (реальне значення температури навколишнього повітря та інші умови вимірювань); тобто, виконують перерахунок непевностей вимірювань відповідно до вищеперерахованих пунктів 1–4. В результаті отримують значення розширеної непевності вимірювань  $U_E$  в реальних умовах експлуатації, яке в подальшому буде використане для визначення (уточнення) міжкалібрувального інтервалу ЗВ.

8. На основі розрахованих в пунктах 1–7 величин, в припущенні про симетричність закону розподілу непевностей, першу оцінку міжкалібрувального інтервалу  $T_1$  розраховують за формулою [42 - 45]

$$T_1 = t \frac{\ln\left(\frac{U_E}{k_{2P-1} u_{A\max}(\bar{x})}\right)}{\ln\left(\frac{U_H}{k_P u_{A\max}(\bar{x})}\right)}, \quad (2.46)$$

де  $k_{2P-1}$  – коефіцієнт охоплення, що відповідає довірчій ймовірності  $2P-1$ , тобто це значення ймовірності, яке відповідає вірогідності метрологічної справності ЗВ на момент визначення міжперевірочного інтервалу ЗВ;  $t$  – календарна протяжність експлуатації ЗВ.

Коефіцієнт охоплення  $k_{2P-1}$  визначається з таблиці Стьюдента на основі інформації про довірчу ймовірність  $2P-1$  та ефективне число ступенів вільності  $\nu_{eff}$ .

9. Другу оцінку міжкалібрувального інтервалу ЗВ  $T_2$ , пропонується знаходити за формулою [42, 45]

$$T_2 = t \frac{U_E - k_{2P-1} u_{A\max}(\bar{x})}{U_H - k_P u_{A\max}(\bar{x})}. \quad (2.47)$$

10. На основі визначених оцінок міжкалібрувальних інтервалів  $T_1$  і  $T_2$  встановлюється міжкалібрувальний інтервал ЗВ, який приймається рівним мінімальному значенню між значеннями  $T_1$  і  $T_2$ , тобто [42-45]

$$T_{ЗВ} = \min[T_1, T_2]. \quad (2.48)$$

Отже, описана вище методика визначення міжкалібрувальних інтервалів ЗВ дозволяє встановлювати або уточнювати міжкалібрувальний інтервал на основі концепції непевності вимірювань. Ця методика відповідає міжнародним вимогам до оцінювання якості вимірювань і сприяє забезпеченню єдності вимірювань і випробувань.

При апробації методики було проведено серію вимірювань значень моментів на нижній межі вимірювання, що відповідає 0,1 Нм, всередині діапазону вимірювання, що відповідає 5 Нм, та на верхній межі вимірювання, що відповідає 10 Нм. Для цього на вході ЗВ задавався взірцевий момент  $M_{вз}$  за допомогою набору взірцевих мас тягарців. Рівняння, за яким можна описати величину взірцевого моменту, має вигляд

$$M_{вз} = gRm_{вз}, \quad (2.49)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння, що дорівнює  $9,8066 \text{ м/с}^2$ ;

$R$  – радіус диска (складає  $9,9889 \text{ см}$ ), який закріплений на валу ЕД, що входить в структуру вимірювального перетворювача моменту;

$m_{вз}$  – маса взірцевих тягарців.

Для задавання на вході ЗВ моменту з нижньою межею вимірювання необхідно прикріпити до диска, радіусом  $R$ , що закріплений на валу вимірювального перетворювача, взірцеву масу, яка відповідає  $102,176 \text{ гр}$ . Маса тягарців прикріплюється за допомогою струни довжиною  $l$ .

Після задавання зазначених вище параметрів виконуємо серію вимірювань моментів на нижній межі вимірювання, яку заносимо до таблиці 2.12.

На основі експериментальних даних, що наведені в таблиці 2.12, розраховуємо стандартну непевність типу А, яка для нижньої межі вимірювання моменту дорівнює

$$u_A(\overline{M}_{\min}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{21} (M_{i,\min} - 0,119)^2}{(21-1)21}} = 2,49 \cdot 10^{-3} \text{ Нм}.$$

Далі визначається стандартна непевність типу А, що проявляється при взірцевому задаванні середини діапазону вимірювання моменту. Для цього



було прикріплено на диску радіусом  $R = 9,9889$  см взірцеве значення маси, що відповідає  $5,10883$  кг і проведено серію вимірювань моментів, результати яких наведені в таблиці 2.13 [42].

Таблиця 2.12 – Результати досліджень на нижній межі вимірювання

Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм
1	0,146	8	0,138	15	0,131
2	0,117	9	0,114	16	0,125
3	0,127	10	0,115	17	0,113
4	0,121	11	0,134	18	0,114
5	0,117	12	0,117	19	0,105
6	0,132	13	0,135	20	0,106
7	0,114	14	0,126	21	0,104

Таблиця 2.13 – Результати досліджень середини межі вимірювання

Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм
1	5,057	8	5,018	15	5,037
2	5,031	9	5,055	16	5,031
3	5,049	10	5,015	17	5,025
4	5,036	11	5,058	18	5,029
5	5,055	12	5,017	19	5,035
6	5,034	13	5,025	20	5,032
7	5,029	14	5,016	21	5,049

Підставляючи експериментальні дані, що наведені в таблиці 2.13, розраховуємо стандартну непевність типу А середини діапазону вимірювання, яка дорівнює

$$u_A(\overline{M}_{cp}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{21} (M_{i,cp} - 5,0349)^2}{(21-1)21}} = 3,05 \cdot 10^{-3} \text{ Нм.}$$

Для визначення непевності, що проявляється на верхній межі вимірювання, проведено серію вимірювань при взірцевому задаванні маси тягарців, що складає  $m_{взmax} = 10,21765$  кг. Результати вимірювань моментів на верхній межі вимірювання наведені в таблиці 2.14 [42].

Підставляючи отримані експериментальні данні з таблиці 2.14 отримаємо стандартну непевність типу А (непевність калібрування) на верхній межі вимірювання, що дорівнює

$$u_A(\bar{M}_{\max}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{21} (M_{i,\max} - 10,0419)^2}{(21-1)21}} = 19,27 \cdot 10^{-3} \text{ Нм.}$$

Таблиця 2.14 – Результати досліджень на верхній межі вимірювання

Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм	Ч.ч.	Значення моменту, Нм
1	10,09	8	10,18	15	10,04
2	10,11	9	10,06	16	10,05
3	10,05	10	9,849	17	10,03
4	10,07	11	9,908	18	9,879
5	10,13	12	10,07	19	10,11
6	10,08	13	9,919	20	10,06
7	10,12	14	10,11	21	9,964

Відповідно до пункту 1 методики визначення міжкалібрувального інтервалу ЗВ з отриманих експериментальних стандартних непевностей типу А (непевностей калібрування) вибираємо найбільшу за значенням (максимальну) експериментальну непевність типу А  $u_{A,\max}(\bar{x})$ . В даному випадку найбільше значення має непевність типу А, що проявляється на верхній межі вимірювання. Саме це значення стандартної непевності типу А  $u_A(\bar{M}_{\max}) = 19,27 \cdot 10^{-3}$  Нм в подальшому будемо використано для встановлення міжкалібрувального інтервалу ЗВ моменту.

Рівняння перетворення ЗВ обертового моменту ЕД в статичному режимі роботи описується виразом

$$M_B = Qgl = \frac{4RS_m U_o}{U_a U_m (2^m - 1)} \Delta U Ngl,$$

де  $U_m$  – напруга, якою живиться мостова схема сенсора зусилля ( $U_m = 6,5 \text{ В} \pm 0,25 \text{ мВ}$ );

$R$  – опір мостової схеми тензорезисторів ( $R = 3,25 \pm 0,01 \text{ кОм}$ );

$l$  – довжина вимірювального важеля, що з'єднує вал випробовуваного ЕД із сенсором зусилля ( $l = 1 \text{ м}$ );

$\Delta U$  – напруга на виході сенсора зусилля (вхідна напруга масштабного перетворювача);

$U_a$  – напруга на виході масштабного перетворювача (операційного підсилювача);

$k$  – коефіцієнт підсилення операційного підсилювача ( $k = U_a/\Delta U = 10^3$ );

$S_m$  – чутливість сенсора зусилля;

$U_o$  – опорна напруга АЦП ( $U_o = 3 \text{ В}$ );

$m$  – розрядність АЦП ( $m = 16$ );

$N$  – кількість імпульсів на виході АЦП, що відповідає значенню виміряного моменту і виводиться на дисплей [42].

Далі виконаємо оцінювання складових стандартних непевностей типу В, які проявляються за рахунок невилучених залишків систематичних ефектів.

Оскільки до складових елементів ЗВ обертових параметрів ЕД входить сенсор зусилля, то оцінимо складову непевності типу В, що вноситься сенсором зусилля за рахунок існування невилученого залишку зведеної похибки  $\gamma = 0,15\%$  при дії максимального зусилля  $Q_n = 20$  кг за виразом

$$u_{cz} = \frac{\gamma Q_n}{\sqrt{12}100\%} = 0,15\% \frac{20}{3,46 \cdot 100\%} = 8,67 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

Враховуючи те, що температура робочих умов застосування складових елементів ЗВ обертових параметрів ЕД знаходиться в межах від  $-10$  до  $+40$  °С, тобто, максимально можлива зміна температури складає  $\Delta t = 50$  °С, а зі специфікації на масштабний перетворювач (операційний підсилювач), який є складовим елементом вимірювального каналу засилля, відомо, що дрейф напруги зміщення нуля операційного підсилювача складає  $U_{zm} = 9$  нВ/°С, то теоретично можливу (максимальну) стандартну непевність типу В, обумовлену дрейфом напруги зміщення нуля операційного підсилювача в припущенні про рівномірність закону розподілу, визначимо за виразом

$$u_{B,t} = \frac{k\Delta t}{\sqrt{12}} U_{zm} = 10^3 \frac{50}{3,46} 9 \cdot 10^{-9} = 130,06 \text{ мкВ.}$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена обмеженою розрядністю АЦП послідовного наближення, який підсумовує кількість імпульсів, що надходять від генератора тактових імпульсів (наявністю зони нечутливості АЦП)  $h = U_0 / (2^m - 1)$ , при опорному значенні напруги  $U_0 = 3$  В і розрядності  $m = 16$ , в припущенні про трикутний закон розподілу похибки квантування, визначимо за виразом

$$u_{B,m} = \frac{h}{\sqrt{24}} = \frac{U_0 / (2^m - 1)}{\sqrt{24}} = \frac{3}{(2^{16} - 1)4,9} = 9,34 \text{ мкВ.}$$

Також із специфікації відомо, що допустиме відхилення напруги джерела живлення сенсора зусилля складає  $\Theta_{Um} = \pm 0,25$  мВ, а стандартну непевність типу В, яка обумовлена таким відхилення напруги від номінального значення, в припущенні про його рівномірний розподіл, можна оцінити за виразом [1, 42]

$$u_{B,\Theta u} = \frac{\Theta_{U_M}}{\sqrt{12}} = \frac{\pm 0,25}{\sqrt{3}} = 0,14 \text{ мВ.}$$

Оскільки з технічної документації на сенсор зусилля відомо, що допустиме відхилення опору мостової схеми складає  $\Theta_R = \pm 0,01$  кОм, то стандартна непевність типу В, яка виникає за рахунок невилученого залишку систематичного ефекту, пов'язаного з можливим відхиленням опору, складає

$$u_{B,R} = \frac{\Theta_R}{\sqrt{12}} = \frac{\pm 10}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ Ом.}$$

Стандартну непевність типу В, що обумовлена температурною похибкою опору тензорезисторів при максимально можливій зміні температури навколишнього повітря  $\Delta t = 50$  °С та відомому температурному коефіцієнту опору, що складає  $\alpha_t = 2,5 \cdot 10^{-6}$  К<sup>-1</sup>, можна визначити на основі рівняння, яке виражає залежність опору від температури  $R = R_0 \alpha_t \Delta t$ , за виразом

$$u_{B,Rt} = \frac{\alpha_t |\Delta t|}{\sqrt{12}} R = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{50}{3,46} 3,25 \cdot 10^3 = 117,41 \text{ мОм.}$$

Стандартна непевність типу В, що обумовлена наявністю невилученого систематичного ефекту, пов'язаного з наявністю похибки визначення довжини вимірювального важеля, яка дорівнює  $\Delta l = \pm 0,01$  мм, складає

$$u_{B,l} = \frac{\Delta l}{\sqrt{12}} = \frac{\pm 0,01}{\sqrt{3}} = 5,77 \text{ мкм.}$$

Комбіновану непевність типу В, із врахуванням розрахованих вище складових стандартних непевностей типу В, знайдемо як додатний квадратний корінь з комбінованої дисперсії типу В, яка описується виразом [40, 42]

$$\begin{aligned} u_{Bc}^2 = & \left( \frac{\partial M_B}{\partial Q} \right)^2 u_{c3}^2 + \left( \frac{\partial M_B}{\partial U_a} \right)^2 u_{B,t}^2 + \left( \frac{\partial M_B}{\partial m} \right)^2 u_{B,m}^2 + \left( \frac{\partial M_B}{\partial U_m} \right)^2 u_{B,\Theta u}^2 + \\ & + \left( \frac{\partial M_B}{\partial R} \right)^2 [u_{B,R}^2 + u_{B,Rt}^2] + \left( \frac{\partial M_B}{\partial l} \right)^2 u_{B,l}^2, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\text{де } \frac{\partial M_B}{\partial Q} = gl = 9,81 \left( \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \right);$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial U_a} = -\frac{4RS_m U_o gl}{kU_m U_a (2^m - 1)} N = -3,33 \left( \frac{HM}{B} \right);$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial m} = -\frac{4RS_m U_o gl}{kU_m (2^m - 1)^2} 2^m N \ln(2) = -6,93 \left( \frac{HM}{B} \right);$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial U_m} = -\frac{4RS_m U_o gl}{kU_m^2 (2^m - 1)} N = -1,54 \left( \frac{HM}{B} \right);$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial R} = \frac{4S_m U_o gl}{kU_m (2^m - 1)} N = 3,08 \cdot 10^{-3} \left( \frac{HM}{Om} \right);$$

$$\frac{\partial M_B}{\partial l} = \frac{4RS_m U_o g}{kU_m (2^m - 1)} N = 10(H) - \text{коефіцієнти чутливості.}$$

Підставляючи розраховані значення коефіцієнтів чутливості та стандартних непевностей типу В у вираз (2.50), отримаємо значення комбінованої непевності типу В, що складає  $u_{Bc} = 86,89 \cdot 10^{-3}$  Нм.

Комбіновану непевність результату вимірювання, з урахуванням максимальної експериментальної непевності типу А та комбінованої непевності типу В, розрахуємо за виразом

$$u_c = \sqrt{u_A^2(\overline{M}_{\max}) + u_{Bc}^2} = 889,99 \cdot 10^{-4} \text{ Нм.}$$

Для розрахунку розширеної непевності, що буде нормуватися в технічній документації на ЗВ, розрахуємо ефективне число ступенів вільності за виразом

$$v_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^N \frac{u_i^4}{v_i}} = (n-1) \frac{u_c^4}{u_A^4(\overline{M}_{\max})} = 20 \frac{88,99^4}{19,27^4} = 9100.$$

Далі за допомогою таблиці Стьюдента визначимо коефіцієнт охоплення  $k_p$  за допомогою значень ефективного числа ступенів вільності та довірчої ймовірності, яка прийнята рівною  $P = 0,95$  на основі інформації про ймовірність аналогів (підтверджена випробуваннями), та дорівнює  $k_p = 1,96$ .

Знаючи коефіцієнт охоплення та комбіновану непевність результату вимірювання, отримаємо розширену непевність, що нормуватиметься в технічній документації на досліджуваний ЗВ обертаючих параметрів ЕД, яка дорівнює

$$U_n = k_p u_c = 1,96 \cdot 889,99 \cdot 10^{-4} = 0,17 \text{ Нм.}$$

Відповідно до пункту 5 методики, в припущенні про інтенсивність експлуатації ЗВ 7 годин на добу та напрацюванні 3500 годин, визначимо календарну протяжність експлуатації  $t$ , яка відповідає 2-м календарним рокам.

Далі розроблений ЗВ обертаючих параметрів ЕД передається в експлуатацію. Після тривалої експлуатації, в реальних умовах експлуатації (за робочих умов температури) було виконано перерахунок складових непевностей типу В та розширеної непевності.

Непевність типу В, що обумовлена обмеженням класом точності сенсора зусилля, залишається незмінною.

Температура робочих умов експлуатації складає  $t_v = 25$  °С, а непевність типу В, що вноситься за рахунок відхилення температури навколишнього середовища від нормальних умов  $t_{н.у.} = 20$  °С при дрейфу напруги зміщення нуля операційного підсилювача  $U_{зм} = 9$  нВ/°С, буде дорівнювати

$$u_{B,te} = \frac{k|t_{н.у.} - t_v|}{\sqrt{12}} U_{зм} = 10^3 \frac{|20 - 25|}{3,46} 9 \cdot 10^{-9} = 13,01 \text{ мкВ.}$$

Непевності типу В, що обумовлені обмеженою розрядністю АЦП, відхиленням напруги від номінального значення, відхиленням опору від номінального значення, залишаються незмінними.

Непевність типу В, що обумовлена температурною похибкою відхилення опору тензорезисторів при відхиленні робочої температури  $t_v = 25$  °С від температури за нормальних умов  $t_{н.у.} = 20$  °С, складає

$$u_{B,Rt} = \frac{\alpha_t |t_{н.у.} - t_v|}{\sqrt{12}} R = 2,5 \cdot 10^{-6} \frac{|20 - 25|}{3,46} 3,25 \cdot 10^3 = 11,74 \text{ МОм.}$$

Підставляючи перераховані значення непевностей типу В у рівняння для розрахунку комбінованої непевності типу В, отримаємо її експериментальне значення, що дорівнює  $u_{Bce} = 86,88 \cdot 10^{-3}$  Нм.

Комбінована непевність результату вимірювання в реальних умовах експлуатації визначається за виразом

$$u_{ce} = \sqrt{u_A^2(\overline{M}_{\max}) + u_{Bce}^2} = 889,91 \cdot 10^{-4} \text{ Нм.}$$

Для розрахунку розширеної непевності в реальних умовах експлуатації, необхідно розрахувати ефективне число ступенів вільності

$$\nu_{eff} = (n - 1) \frac{u_{ce}^4}{u_A^4(\overline{M}_{\max})} = 2 \frac{88,99^4}{19,27^4} = 910.$$

Коефіцієнт охоплення  $k_{2p-1}$ , що відповідає довірчій ймовірності  $2p-1$ , тобто значенню ймовірності, яке відповідає вірогідності метрологічної справності ЗВ в реальних умовах експлуатації (при  $p = 0,95$ ,  $2p - 1 = 2 \cdot 0,95 - 1 = 0,9$ ), визначимо з таблиці Стюдента за ефективним числом ступенів вільності  $\nu_{eff} > 30$  та довірчою ймовірністю  $p_e = 0,9$ ; який дорівнює  $k_{2p-1} = 1,64$ .

Значення розширеної непевності  $U_E$  в реальних умовах експлуатації складає

$$U_E = k_{2p-1} u_{ce} = 1,64 \cdot 889,91 \cdot 10^{-4} = 0,15 \text{ Нм.}$$

Першу оцінку міжкалібрувального інтервалу  $T_1$  ЗВ обертаючих параметрів ЕД розрахуємо за формулою (2.46), взявши за основу календарну протяжність напрацювання  $t = 2$  роки, що дорівнює [40, 42]

$$T_1 = t \frac{\ln\left(\frac{U_E}{k_{2p-1} u_{A_{\max}}(\bar{x})}\right)}{\ln\left(\frac{U_H}{k_p u_{A_{\max}}(\bar{x})}\right)} = 2 \frac{\ln\left(\frac{0,15}{1,64 \cdot 19,27 \cdot 10^{-3}}\right)}{\ln\left(\frac{0,17}{1,96 \cdot 19,27 \cdot 10^{-3}}\right)} = 2,1p.$$

Друга оцінка міжкалібрувального інтервалу ЗВ  $T_2$ , розраховується за формулою (2.47), і складає [42]

$$T_2 = t \frac{U_E - k_{2p-1} u_{A_{\max}}(\bar{x})}{U_H - k_p u_{A_{\max}}(\bar{x})} = 2 \frac{0,15 - 1,64 \cdot 19,27 \cdot 10^{-3}}{0,17 - 1,96 \cdot 19,27 \cdot 10^{-3}} = 1,79 p.$$

Отже, міжкалібрувальний інтервал ЗВ обертаючих параметрів ЕД приймаємо рівним мінімальному значенню між значеннями  $T_1$  і  $T_2$ , відповідно до формули (2.48), і він дорівнює

$$T_{ЗВ} = \min[T_1, T_2] = \min[2,1, 1,79] = 1,79 p. = 21 \text{ міс.}$$

Значення міжкалібрувального інтервалу ЗВ доцільно вибрати в місяцях з ряду натуральних чисел [44]: 0,25; 0,5; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 15; 18; 21; 24; 30 і так далі через 6 міс.

Таким чином, на основі розробленої методики визначення міжкалібрувального інтервалу ЗВ виконано метрологічну атестацію ЗВ обертаючих параметрів ЕД, в результаті якої ЗВ приписано такі нормовані метрологічні характеристики, як комбінована непевність вимірювання, що дорівнює  $u_c = 88,99 \cdot 10^{-3}$  Нм, розширена непевність вимірювання, що

дорівнює  $U_n = 0,17$  Нм, та міжкалібрувальний інтервал ЗВ, який дорівнює 21 місяцю.

## 2.19 Оцінювання непевності вимірювань опору ізоляції

Вихідні дані

1. Об'єкт вимірювань – кабель силовий АВБбШв.
2. Вимірювана величина – опір ізоляції.
3. Одиниці вимірювання – МОм.
4. Вимірювання опору ізоляції виконується методом безпосереднього оцінювання за допомогою мегаомметра Е6-24.

Виміри проведені в діапазоні вимірювань мегаомметра Е6-24 від 100 до 999 МОм при температурі навколишнього повітря 22 °С і відносній вологості повітря 65%.

Опір ізоляції визначається відповідно до такої функції вимірювань

$$R = R_{ind} + F_{\Delta} + F_c \quad (2.51)$$

де  $R$  – опір ізоляції, МОм;

$R_{ind}$  – середнє арифметичне повторних вимірів опору ізоляції, МОм;

$F_{\Delta}$  – поправка, що враховує допустиму основну похибку вимірювання опору мегаомметра Е6-24, МОм;

$F_c$  – поправка, що враховує одиницю молодшого розряду, яка видається мегаомметром Е6-24, МОм.

Всі величини, що входять в формулу (2.51) некорельовані.

**Примітка.** У функції вимірювань не враховуються поправки  $F_{\Delta t}$  і  $F_{\Delta \phi}$  на додаткові похибки вимірювання опору мегаомметра Е6-24, викликані відхиленням, відповідно, температури та вологості навколишнього середовища від нормальних умов в робочому діапазоні. Поправки будуть вводитися тільки в разі, якщо виміряні значення температури і/або відносної вологості навколишнього середовища знаходяться в робочому діапазоні, але виходять за діапазон нормальних умов експлуатації мегаомметра Е6-24 (значення нормальних і робочих умов експлуатації вказані в інструкції з експлуатації мегаомметра Е6-24).

Середнє арифметичне повторних вимірів опору ізоляції  $R_{ind}$ , МОм.

При проведенні вимірювань опору ізоляції силового кабелю АВБбШв отримані такі результати повторних вимірів:  $R1 = 124$  МОм;  $R2 = 131$  МОм;  $R3 = 137$  МОм.

Значення оцінки величини  $R_{ind}$  визначається за формулою

$$R_{ind} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n} = \frac{124+131+137}{3} = 130,67, \quad (2.52)$$



де  $R_i$  – результат  $i$ -го повторного вимірювання опору ізоляції, який визначається як показання, що знімається з дисплея мегаомметра Е6-24, МОм;

$n$  – кількість повторних вимірів,  $n = 3$ .

Стандартна непевність вимірювань величини  $R_{ind}$ , МОм розраховується в припущенні нормального розподілу ймовірностей за формулою

$$u(R_{ind}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - R_{ind})^2}{n \cdot (n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (R_i - 130,67)^2}{3 \cdot (3-1)}} \approx 3,756. \quad (2.53)$$

Поправка  $F_{\Delta}$ , яка враховує допустиму основну похибку вимірювання опору мегаомметра Е6-24.

Значення оцінки величини  $F_{\Delta}$  приймається рівним 0,0 МОм.

Стандартна непевність  $u(F_{\Delta})$ , МОм, оцінюється на підставі інформації про межі допустимої основної абсолютної похибки вимірювання опору мегаомметра Е6-24  $\pm \Delta$ , МОм. У припущенні рівномірного розподілу ймовірностей значень похибки в межах  $\pm \Delta$  визначається за формулою

$$u(F_{\Delta}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0,03 \cdot R_{ind} + 3 \cdot c}{\sqrt{3}} = \frac{0,03 \cdot 130,67 + 3}{\sqrt{3}} \approx 3,995. \quad (2.54)$$

де  $\Delta$  – межа абсолютної похибки вимірювання;

$$\Delta = \frac{\delta}{100} * R_{ind} + m * c, \quad (2.55)$$

де  $\delta$  – дозволена відносна похибка вимірювання опору, яку приймаємо рівною 0,03, %;

100 – коефіцієнт переходу від часток до відсотків, %;

$m$  – визначає кількість одиниць молодшого розряду;

$c$  – одиниця молодшого розряду мегаомметра Е6-24, МОм.

Поправка  $F_c$ , яка враховує розмір одиниці молодшого розряду мегаомметра Е6-2. Значення оцінки величини  $F_c$  приймається рівним 0,0 МОм.

Стандартна непевність  $u(F_c)$  у МОм визначається на підставі розміру одиниці молодшого розряду мегаомметра Е6-24. Для діапазону вимірювань мегаомметра Е6-24 від 100 до 999 МОм, одиниця молодшого розряду  $c = 1$  МОм. У припущенні рівномірного розподілу ймовірностей значень величини  $c$  в межах  $\pm c/2$ , непевність визначається за формулою

$$u(F_c) = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,289. \quad (2.56)$$

Значення оцінки величини опору ізоляції  $R$ , МОм розраховується за формулою (2.51)

$$R = R_{ind} + F_{\Delta} + F_c = 130,67 + 0,0 + 0,0 = 130,67 \approx 130,7. \quad (2.57)$$

Значення опору ізоляції округлюють до одного знака після коми.

Сумарна стандартна непевність вимірювань опору ізоляції силового кабелю  $u(R)$ , МОм, визначається за формулою

$$\begin{aligned} u(R) &= \sqrt{u^2(R_{ind}) + u^2(F_{\Delta}) + u^2(F_c)} = \\ &= \sqrt{3,756^2 + 3,995^2 + 0,289^2} \approx 5,491. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Відсоткові складові непевності впливних величин в сумарну стандартну непевність  $u(R)$  визначаються за формулами:

$$\delta_{F_r} = \frac{u^2(R_{ind})}{u^2(R)} * 100\% = \frac{(3,756)^2}{(5,491)^2} * 100\% \approx 46,8\%, \quad (2.59)$$

$$\delta_{F_{\Delta}} = \frac{u^2(F_{\Delta})}{u^2(R)} * 100\% = \frac{(3,995)^2}{(5,491)^2} * 100\% \approx 52,9\%, \quad (2.60)$$

$$\delta_{F_c} = \frac{u^2(F_c)}{u^2(R)} * 100\% = \frac{(0,289)^2}{(5,491)^2} * 100\% \approx 0,3\%. \quad (2.61)$$

Бюджет непевності вимірювань опору ізоляції силового кабелю наведений в таблиці 2.15.

Таблиця 2.15 – Бюджет непевності вимірювань опору ізоляції силового кабелю

Величина	Одиниця вимірювання	Значення оцінки	Розподіл ймовірностей	Стандартна непевність	Відсоткова складова, %
$R_{ind}$	МОм	130,67	нормальний	3,756	46,8
$F_{\Delta}$	МОм	0,0	рівномірний	3,995	52,9
$F_c$	МОм	0,0	рівномірний	0,289	0,3
$R$	МОм	130,67	Стьюдента	5,491	100

Розширена непевність вимірювання опору ізоляції силового кабелю  $U(R)$  визначається для ймовірності 95% в припущенні розподілу Стьюдента за формулою

$$U(R) = k * u(R) = 2,26 * 5,491 = 12,410 \approx 12,5, \quad (2.62)$$

де коефіцієнт охоплення  $k = 2,26$ , вибирається залежно від кількості ефективних ступенів вільності  $\nu_{eff}$ , яка розраховується за формулою

$$v_{eff} = \frac{u^4(R)*(n-1)}{u^4(R_{ind})} = \frac{(5,491)^4(3-1)}{(3,756)^4} \approx 9,14, \quad (2.63)$$

Результат вимірювання.

Опір ізоляції силового кабелю АВБШВ дорівнює

$$(130,7 \pm 12,5) \text{ МОм } (k = 2,26, v_{eff} = 9,14, P = 95 \%).$$

## 2.20 Оцінювання непевності вимірювань рН води

Метод заснований на вимірюванні різниці потенціалів гальванічного елемента з використанням відповідного рН-метра. Вимірювання проводять рН-метром/іонометром ІТАН. Перед вимірюванням проби води проводиться двочкове калібрування за буферними розчинами. Температура проби питної води і температура буферних розчинів вимірюються термодатчиком, вбудованим в рН-метр. В підсумкових показках вимірювання рН-метр автоматично враховує різницю температур буферних розчинів і проби питної води.

Вимірюваною величиною є рН проби питної води, од. рН, яка визначається відповідно до функції вимірювань

$$pH = pH_{\text{вим}} + \delta_{\text{кал}} + \delta_{\text{сх}}, \quad (2.64)$$

де  $pH_{\text{вим}}$  – покази рН-метра, од. рН;

$\delta_{\text{кал}}$  – поправка на похибку калібрування рН-метра,  $\delta_{\text{кал}} = 0$  од. рН;

$\delta_{\text{сх}}$  – поправка на повторюваність вимірів,  $\delta_{\text{сх}} = 0$  од. рН.

Всі вхідні величини розглядаються як некорельовані.

Температура проби питної води склала 10 °С. рН проби питної води становить 6,52 од. рН.

Стандартна непевність величини  $pH_{\text{вим}}$  розраховується на підставі інформації про межі основної абсолютної похибки рН-метра в припущенні рівномірного розподілу ймовірностей. У паспорті на рН-метр/іонометр ІТАН вказані межі основної абсолютної похибки вимірювання рН (з вимірювальним перетворювачем в комплекті з електродною системою в розчинах з температурою від 10 °С до 60 °С)  $\pm \Delta = \pm 0,050$  од. рН. Стандартна непевність величини  $pH_{\text{вим}}$  розраховується за формулою

$$u(pH_{\text{вим}}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} = \frac{0,050}{\sqrt{3}} = 0,0289 \text{ од. рН}. \quad (2.65)$$

*Примітка.* Непевністю вимірювань, обумовленою роздільною здатністю цифрового дисплея рН-метра, нехтуємо, оскільки дана складова непевності значно нижча складової, обумовленої основною абсолютною похибкою рН-метра.

Стандартна непевність вимірювань величини  $\delta_{\text{кал}}$  розраховується на підставі інформації про дозволене відхилення значень рН при перевірці калібрування, від значень рН буферних розчинів в контрольних точках  $\pm \Delta_k = \pm 0,03$  од. рН. Стандартна непевність величини  $\delta_{\text{кал}}$  розраховується в припущенні про рівномірний розподіл ймовірностей, в діапазоні  $\pm \Delta_k$  за формулою

$$u(\delta_{\text{кал}}) = \frac{\Delta_k}{\sqrt{3}} = \frac{0,03}{\sqrt{3}} = 0,0173 \text{ од. рН.} \quad (2.66)$$

*Примітка.* Непевністю вимірювань рН буферних розчинів нехтуємо, тому що значення розширених непевностей вимірювань рН буферних розчинів не перевищують 1/3 від допустимого відхилення  $\Delta_k$ .

Стандартна непевність вимірювань величини  $\delta_{\text{сх}}$  розраховується на підставі інформації про стандартне відхилення повторюваності в припущенні нормального розподілу ймовірностей. Для питної води в діапазоні рН від 6,35 до 6,46 од. рН при міжлабораторному дослідженні методу вимірювань рН було встановлено значення стандартного відхилення повторюваності  $\sigma_r = 0,011$  од. рН. У лабораторії при впровадженні методу вимірювань встановлене значення стандартного відхилення повторюваності було підтверджено і поширене на діапазон вимірювань, що містить виміряне значення рН в досліджуваній пробі питної води. Стандартна непевність величини  $\delta_{\text{сх}}$  розраховується за формулою

$$u(\delta_{\text{сх}}) = \sigma_r = 0.011 \text{ од. рН.} \quad (2.67)$$

рН-проба питної води оцінюється за виразом (2.64) і складе

$$pH = pH_{\text{вим}} + \delta_{\text{кал}} + \delta_{\text{сх}} = 6,52 + 0 + 0 = 6,52 \approx 6,5 \text{ од. рН.}$$

Сумарна стандартна непевність вимірювань величини рН розраховується за формулою

$$\begin{aligned} u_c(pH) &= \sqrt{u^2(pH_{\text{вим}}) + u^2(\delta_{\text{кал}}) + u^2(\delta_{\text{сх}})} = \\ &= \sqrt{(0,0289)^2 + (0,0173)^2 + (0,011)^2} = 0,0354 \text{ од. рН.} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Коефіцієнти чутливості для всіх величин, що входять в функцію вимірів (2.64), дорівнюватимуть 1.

У таблиці 2.16 наведено бюджет непевності для вимірюваної величини і зроблено відповідні розрахунки для знаходження її стандартної непевності.

Таблиця 2.16 – Бюджет непевності для рН проби питної води

Величина $X_i$	Оцінка $x_i$ , од. рН	Стандартна непевність $u(x_i)$ , од. рН	Розподіл ймовірностей	Коефіцієнт чутливості, $c_i$	Внесок в непевність $u_i(\text{pH})$ , од.рН	Відсотковий внесок, %
$\text{pH}_{\text{вим}}$	6,52	0,0289	рівномірний	1	0,0289	66,4
$\delta_{\text{кал}}$	0,0	0,0173	рівномірний	1	0,0173	23,9
$\delta_{\text{сх}}$	0,0	0,011	нормальний	1	0,011	9,7
$\text{pH}$	6,5	0,0354				100

Розширена непевність  $U$  отримується множенням сумарної стандартної непевності на коефіцієнт охоплення  $k$ , який вибирається рівним 2 при рівні довіри 95% в припущенні нормального розподілу ймовірностей вимірюваної величини

$$U = k \cdot u_c(\text{pH}) = 2 \cdot 0.0354 = 0.0708 \approx 0.1 \text{ од. рН} \quad (2.69)$$

Результат вимірювання записується у вигляді

*«рН проба води становила  $(6,5 \pm 0,1)$  од. рН,  $k = 2$ ,  $P = 95\%$ ».*

## 2.21 Оцінювання непевності динамічного вимірювання віброприскорення

Диференціальне рівняння, що описує динамічний зв'язок між вхідними і вихідними параметрами вимірювального перетворювача віброприскорення, має вигляд [18]

$$\frac{d^2 X_s(t)}{dt^2} + 2h \frac{dX_s(t)}{dt} + h_k^2 X_s(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\omega_0 t),$$

де  $F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t)$  – гармонічна вимушена сила коливань поверховості об'єкта (вхідна величина);

$F_0$  – амплітуда сили;

$\omega_0$  – кутова частота вимушеної сили;

$X_s(t)$  – механічні коливання інерційної маси;

$m$  – маса акселерометра;

$c$  – параметр демпфування;

$k$  – еквівалентна жорсткість п'єзоелементів,

$h = c/2m$  – коефіцієнт демпфування;

$h_k = \sqrt{k/m}$  – критичне значення коефіцієнта демпфування [1, 18].

Бюджет непевності складових елементів вимірювального каналу віброприскорення у відносних одиницях наведено в таблиці 2.17 [18]. На

підставі експериментального дослідження бюджету непевності вимірювального каналу віброприскорення (табл. 2.17) відносно значення комбінованої непевності без урахування динамічної складової непевності становить 0,36 % [19].

Таблиця 2.17 – Бюджет непевності складових елементів каналу віброприскорення

<b>Elements</b>	<b>Value of relative uncertainty, %</b>	<b>The expanded uncertainty (coverage factor 1.96 at confidence level 95%), %</b>	<b>Distribution</b>
Accelerometer	0.3	0.59	Uniform (rectangular)
Preliminary charge amplifier	0.02	0.04	Uniform (rectangular)
Bandpass filter	0.2	0.39	Uniform (rectangular)
Scale converter	0.01	0.02	Uniform (rectangular)
ADC	0.005	0.01	Uniform (rectangular)
Background noise	$2.14 \cdot 10^{-6}$	$4.19 \cdot 10^{-6}$	Normal
<b>The combined standard uncertainty (<math>\tilde{u}_c</math>)</b>	0.36	0.71	Normal
<b>Mean value</b>			2.93 m/s <sup>2</sup>

Акселерометр розташований на електрошпинделі двигуна та виконує точкове вимірювання вібрації в діапазоні частот від 6 кГц до 10 кГц, яка створюється за рахунок роботи підшипника кочення. Вібрації, що породжуються іншими збуджувальними силами, мають розглядатися як завади [18].

Передатна функція даного засобу вимірювання має вигляд

$$H(s) = \frac{K_{MM}}{s^2 + 2hs + h_k^2}, \quad (2.70)$$

де  $K_{MM}$  – коефіцієнт пропорційності вимірювального каналу віброприскорення.

Для оцінювання динамічної непевності потрібно записати передатну функцію (2.70) в частотній області й відокремити дійсну та уявну частини. В результаті таких перетворень отримаємо модуль частотної характеристики засобу вимірювання віброприскорення

$$|K_c(j\omega)| = \left| \frac{K_{MM}}{(j\omega)^2 + 2h(j\omega) + h_k^2} \right| = \left[ \frac{K_{MM}}{\omega^4 - 2\omega^2 h_k^2 + 4\omega^2 h^2 + h_k^4} \right]^{1/2},$$

а також частотну характеристика ЗВТ при  $\omega = 0$

$$K_c = \frac{mK_{MM}}{k}.$$

Вхідний сигнал  $F_0 m^{-1} \sin(\omega_0 t)$  віброприскорення описується формулою

$$X(j\omega) = \omega_0 F_0 (\omega_0^2 + (j\omega)^2)^{-1} m^{-1},$$

де  $\omega_0$  – циклічна частота вхідного сигналу віброприскорення, яка змінюється в діапазоні від 6 до 10 кГц, тобто її мінімальне значення складає 18849,5 рад/с, а максимальне – 31415,9 рад/с.

Модуль зображення вхідного сигналу віброприскорення описується виразом

$$|X(j\omega)| = \omega_0 F_0 (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} m^{-1}.$$

З джерел [17–23, 46-57], відомо, що амплітуда вимушеної гармонічної сили  $F_0$  складає  $3 \cdot 10^{-4}$  Н. Маса акселерометра  $m = 4 \cdot 10^{-2}$  кг. Параметр демпфування  $s$  для п'єзоелектричних акселерометрів дорівнює 0,5; еквівалентна жорсткість п'єзoeлементів складає  $k = 2$ , мінімальний час спостереження  $T = 300$  с. Коефіцієнт пропорційності (підсилення)  $K_{MM}$  вимірювального каналу віброприскорення дорівнює  $10^5$  [47-50].

Підставивши знайдені значення модуля частотної характеристики та зображення вхідного сигналу у рівняння для оцінювання динамічної непевності (1.47) отримаємо вираз для оцінювання непевності в частотній області, приведеної до входу [40]

$$\sigma_{\Delta X}(\omega) = \pi^{-1/2} \left( \frac{1}{2T} \int_0^{\pi F_s} \frac{\omega F_0 \left[ \left( k(h_k^2 - \omega^2) - m(h_k^2 - \omega^2)^2 - 4m\omega^2 h^2 \right)^2 + 4k^2 \omega^2 h^2 \right]}{2Tm(\omega_0^2 - \omega^2) \left( m(h_k^2 - \omega^2)^2 + 4m\omega^2 h^2 \right)^2} d\omega \right)^{1/2}.$$

Щоб подати характеристику зміни динамічної непевності ВП віброприскорення в часовій області, що обумовлена інерційними властивостями ВП при динамічному режимі роботи, потрібно виконати обернене перетворення Фур'є, що описується виразом (1.50). Оскільки вираз (1.50) складається з дійсної та уявної частин, а нас цікавить саме амплітудне значення динамічної непевності, то вираз для оцінювання динамічної непевності (1.50) з урахуванням виразу динамічної непевності в частотній області  $\sigma_{\Delta X}(\omega)$  можна записати у вигляді

$$|u_D(t)| = \left[ \left( \int_0^{\pi f_s} \pi^{-1/2} \sigma_{\Delta X}(\omega) \cos(\omega t) d\omega \right)^2 + \left( \int_0^{\pi f_s} \pi^{-1/2} \sigma_{\Delta X}(\omega) \sin(\omega t) d\omega \right)^2 \right]^{0.5}.$$

Для розв'язання отриманого рівняння модуля динамічної непевності в часовій області використано математичний пакет Maple 12. Підставивши у цей вираз значення впливних коефіцієнтів, наведених вище, отримано амплітудне значення динамічної непевності вимірювання віброприскорення, що складає  $0,068 \text{ м/с}^2$  (рис. 2.4) при частоті вхідного сигналу віброприскорення  $10 \text{ кГц}$  і часі спостереження віброприскорення  $T=300 \text{ с}$ . Якщо час спостереження збільшити до  $600 \text{ с}$  на тій же частоті вхідного сигналу віброприскорення, то значення динамічної непевності зменшується до  $0,049 \text{ м/с}^2$  (рис. 2.5).

На нижній частоті вхідного сигналу віброприскорення  $6 \text{ кГц}$ , при часі спостереження  $300 \text{ с}$ , значення динамічної непевності складає  $0,182 \text{ м/с}^2$  (рис. 2.6). Якщо час спостереження збільшити до  $600 \text{ с}$  на частоті вхідного сигналу віброприскорення  $6 \text{ кГц}$ , то значення динамічної непевності зменшується до  $0,13 \text{ м/с}^2$  (рис. 2.7) (номінальне значення сигналу віброприскорення підшипників кочення електрошпинделя двигуна складає  $2,93 \text{ м/с}^2$  [19, 46-57]). Характеристики зміни динамічної непевності вимірювання віброприскорення залежно від часу, що отримані за допомогою математичного пакета Maple 12 показані на рисунках 2.4–2.7 при мінімальному та максимальному значеннях частоти вхідного сигналу віброприскорення ( $6 \text{ кГц}$  та  $10 \text{ кГц}$ ) з часом спостереження  $300 \text{ с}$  та  $600 \text{ с}$ , відповідно.

Таким чином, на основі запропонованого способу оцінювання динамічної непевності було виконано розрахунок максимального значення динамічної непевності на прикладі модельного рівняння віброперетворювача. Оцінку отримано на основі математичних моделей спектральної функції вхідного сигналу вібраційного прискорення і частотної характеристики віброперетворювача. Це дозволяє додатково до



значень статичних стандартних непевностей, що наводяться в табл. 2.17, враховувати значення динамічної непевності, що виникає при динамічних режимах роботи ВП, при розрахунку комбінованої непевності вимірювання.

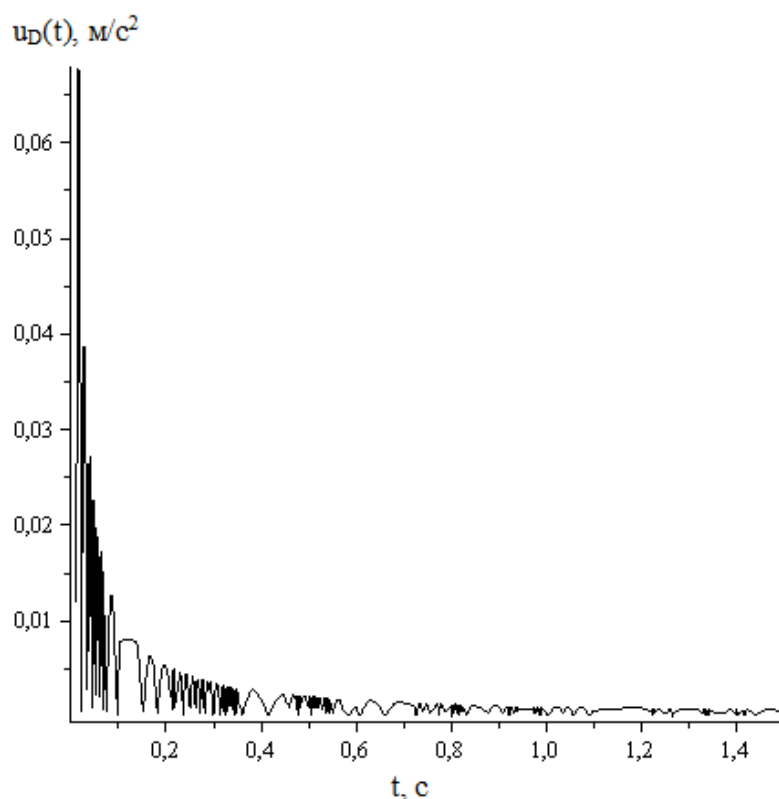


Рисунок 2.4 – Характеристика зміни динамічної непевності ВП віброприскорення при частоті 10 кГц і часі спостереження 300 с

Для розрахунку максимального значення відносної динамічної непевності вимірювання віброприскорення поділимо отримане максимальне значення динамічної непевності  $0,182 \text{ м/с}^2$  (рис. 2.6) на значення оцінки віброприскорення  $\bar{X} = 2,93 \text{ м/с}^2$  [19, 46-50], в результаті чого отримуємо

$$\tilde{u}_D = \frac{u_D(t)}{\bar{X}} 100\% = \frac{0.182}{2.93} 100\% = 6.21\%.$$

При обчисленні відносного значення динамічної непевності вимірювання віброприскорення для частоти 6 кГц і часу спостереження 600 с отримуємо 4,44% (рис. 2.7). На частоті 10 кГц і при часі спостереження 300 с (рис. 2.4) отримуємо відносну динамічну непевність вимірювання 2,32%. На частоті 10 кГц і при часі спостереження 600 с (рис. 2.5) отримуємо відносну динамічну непевність вимірювання 1,67%.

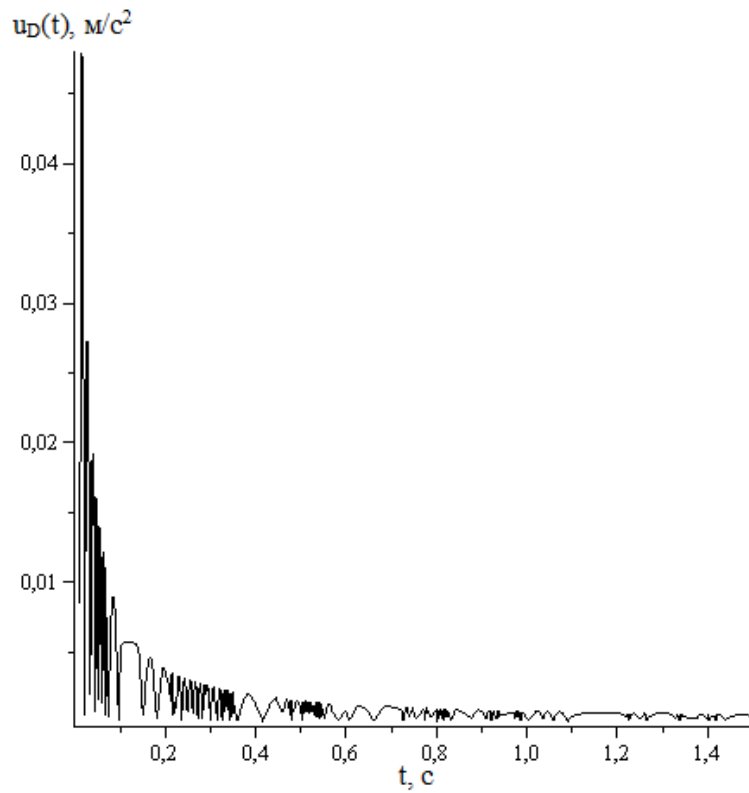


Рисунок 2.5 – Характеристика зміни динамічної непевності ВП віброприскорення при частоті 10 кГц і часі спостереження 600 с

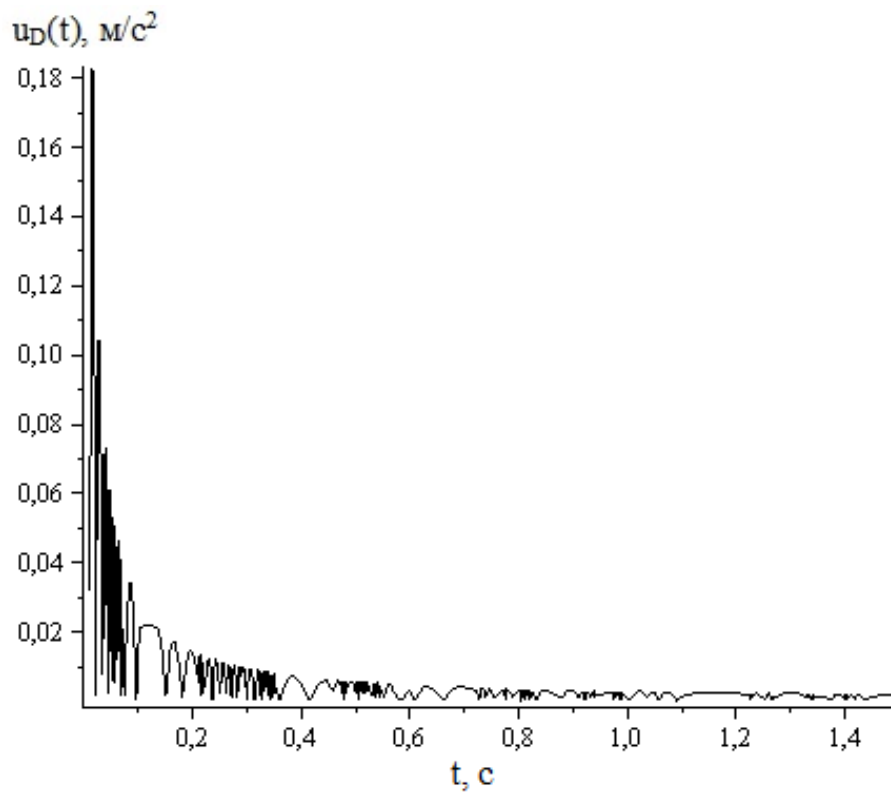


Рисунок 2.6 – Характеристика зміни динамічної непевності ВП віброприскорення при частоті 6 кГц і часі спостереження 300 с

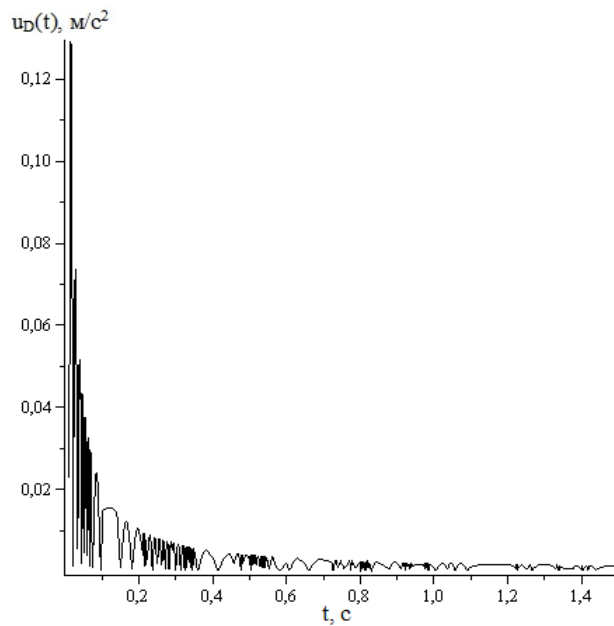


Рисунок 2.7 – Характеристика зміни динамічної непевності ВП віброприскорення при частоті 6 кГц і часі спостереження 600 с

Бюджет динамічної непевності вимірювання віброприскорення для часу спостереження 300 с і 600 с на частотах 6 і 10 кГц наведено в таблиці 2.16. Максимальне значення динамічної непевності становить 6,21% на частоті 6 кГц і при часі спостереження 300 с (табл. 2.18).

Таблиця 2.18 – Бюджет динамічної непевності ВП віброприскорення

Quantity	Mean value, m/s <sup>2</sup>	Frequency of the study, kHz	Observation time, s	Value of dynamic uncertainty, m/s <sup>2</sup>	The expanded dynamic uncertainty (coverage factor 1.96 at confidence level 95%), m/s <sup>2</sup>	Value of relative dynamic uncertainty, %
Віброприскорення	2.93	6	300	0.182	0.36	6.21
		6	600	0.13	0.25	4.44
		10	300	0.068	0.13	2.32
		10	600	0.049	0.1	1.67

Значення відносної комбінованої непевності вимірювання віброприскорення, з урахуванням значень відносної статичної комбінованої непевності  $\tilde{u}_c$  (табл. 2.17) і відносної динамічної непевності  $\tilde{u}_D$  (табл. 2.18), розрахуємо за виразом

$$\tilde{u}_c = \sqrt{\tilde{u}_D^2 + \tilde{u}_c^2} = \sqrt{6.21^2 + 0.36^2} = 6.22\%.$$

Таким чином, максимальне значення відносної комбінованої непевності вимірювання віброприскорення становить 6,22% при часі спостереження 300 с на частоті 6 кГц. При часі спостереження 600 с на частоті 6 кГц комбінована непевність становить 4,45%. На частоті 10 кГц при часі спостереження 300 с, комбінована непевність становить 2,35%, а при часі спостереження 600 с на тій же частоті – 1,71%.

## 2.22 Оцінювання непевності вимірювання динамічного моменту роторних систем

Диференціальне рівняння, що описує динамічний взаємозв'язок вихідної і вхідної величин при роботі засобу вимірювання динамічного моменту РС, має вигляд [1, 46]

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2\nu\omega_p \frac{d\varphi(t)}{dt} + \omega_p^2\varphi(t) = \frac{M_c(t)}{J_c},$$

де  $J_c$  – сумарний момент інерції статора РС та рухомої частини вимірювального перетворювача;

$\nu = \frac{P}{2\sqrt{J_c C}}$  – ступінь заспокоєння вільних коливань ЗВ;

$\omega_p = \sqrt{C/J_c}$  – власна частота вільних (недемпфованих) коливань вимірювального перетворювача;

$C$  – жорсткість сенсора зусилля;

$P$  – коефіцієнт заспокоєння.

Передатна функція даного засобу вимірювання динамічного моменту описується виразом [46]

$$S(p) = \frac{K}{p^2 + 2\nu\omega_p p + \omega_p^2},$$

де  $K = \frac{gK1}{J_c\omega_p^2}$  – коефіцієнт пропорційності засобу вимірювання динамічного моменту;

$g$  – прискорення вільного падіння;

$K1$  – стала тензорезистивного перетворювача.

Перейшовши до частотної області та відокремивши дійсну і уявну частини, а також провівши відповідні математичні перетворення отримаємо такі вирази для частотної характеристики засобу вимірювання динамічного моменту і квадрата модуля частотної характеристики, відповідно:

$$S(j\omega) = \frac{K}{-\omega^2 + j2\nu\omega_p\omega + \omega_p^2};$$

$$|S(j\omega)|^2 = \frac{K^2(\omega^4 + 4\nu^2\omega^2\omega_p^2 - 2\omega^2\omega_p^2 + \omega_p^4)}{\omega^8 + 4\omega^6\omega_p^2(2\nu^2 - 1) + 2\omega^4\omega_p^4(3 - 8\nu^2) + 8\nu^2\omega^2\omega_p^4(2\nu^2\omega^2 + \omega_p^2) - 4\omega^2\omega_p^6 + \omega_p^8}.$$

Частотна характеристика ЗВТ при  $\omega = 0$

$$S(0) = \frac{K}{\omega_p^2}.$$

Вхідний сигнал (права частина диференціального рівняння) на основі апіорної інформації, отриманої під час досліджень характеристик зміни динамічного моменту РС, можна описати математичною моделлю, що має вигляд

$$M_c(t) = M_k \ell^{-\nu\omega_0 t},$$

де  $M_k$  – значення обертового моменту на початку знеструмлення статора РС;

$\omega_0$  – циклічна частота вхідного сигналу.

Передатна функція вхідного сигналу має вигляд

$$X(p) = \frac{M_k}{p + \nu\omega_0}.$$

Перейшовши до частотної області, спектральна функція вхідного сигналу має таке зображення

$$X(j\omega) = \frac{M_k}{j\omega + \nu\omega_0}.$$

Квадрат модуля спектральної функції вхідного сигналу після відокремлення дійсної та уявної частини й проведення відповідних математичних перетворень буде описуватися виразом

$$|X(j\omega)|^2 = \frac{M_k^2(\omega^2 + \nu^2\omega_0^2)}{\omega^4 + 2\omega^2\nu^2\omega_0^2 + \nu^4\omega_0^4}.$$

Підставляючи отримані вирази квадрата модуля спектральної функції вхідного сигналу і квадрата модуля частотної характеристики засобу вимірювання динамічного моменту у вираз для вираження динамічної непевності (1.47), отримаємо вираз, яким описується динамічна непевність вимірювання динамічного моменту в частотній області [40, 56, 57]

$$\sigma_{\Delta X}(\omega) = \left( \frac{1}{2T\pi} \int_0^{\pi F_s} \frac{M_k^2(\omega^2 + v^2 \omega_0^2)}{\omega^4 + 2\omega^2 v^2 \omega_0^2 + v^4 \omega_0^4} d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left( \int_0^{\pi F_s} \frac{(-\omega^4 - 4v^2 \omega^2 \omega_p^2 + \omega^2 \omega_p^2)^2 + 4v^2 \omega^2 \omega_p^6}{(\omega^4 - 2\omega^2 \omega_p^2 + 4v^2 \omega^2 \omega_p^2 + \omega_p^4)^2} d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для розв'язання вищенаведеного виразу та побудови характеристик зміни динамічної непевності використаємо математичний пакет Maple.

Оскільки методика виконання вимірювання динамічного моменту РС полягає у знеструмленні статора РС після його виходу на номінальній режим роботи і подальшому вимірюванні динамічного моменту в режимі самогальмування, при цьому частота обертання змінюється від номінального значення 50 Гц до повної зупинки ротора, тому дослідимо як змінюється (яких набуває значень) характеристика динамічної непевності на початку вимірювань (на верхній межі вимірювання) динамічного моменту при номінальній частоті 50 Гц і на нижній межі вимірювання динамічного моменту при зменшенні частоти вхідного сигналу до 1 Гц.

Щоб подати характеристику зміни динамічної непевності в часовій області потрібно виконати обернене перетворення Фур'є та знайти модуль цієї непевності, що описується виразом (1.51) з урахуванням виразу динамічної непевності в частотній області  $\sigma_{\Delta X}(\omega)$ . Підставляючи номінальні числові значення величин, що входять в рівняння динамічної непевності в частотній області  $\sigma_{\Delta X}(\omega)$  – це  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $Kl = 489,89 \text{ Н}$ ,  $J_c = 0,02 \text{ Нм}^2$ ,  $M_K = 8 \text{ Нм}$ ,  $C = 3000 \text{ Нм/град}$ ,  $P = 0,75 \text{ Нмс/град}$  [34–36], отримаємо характеристики зміни динамічної непевності при вимірюванні динамічного моменту в діапазоні від 8 до 0,5 Нм на номінальній частоті обертання ротора 50 Гц (рис. 2.8) та на мінімальній частоті обертання ротора 1 Гц (рис. 2.9), які побудовані в середовищі математичного пакета Maple.

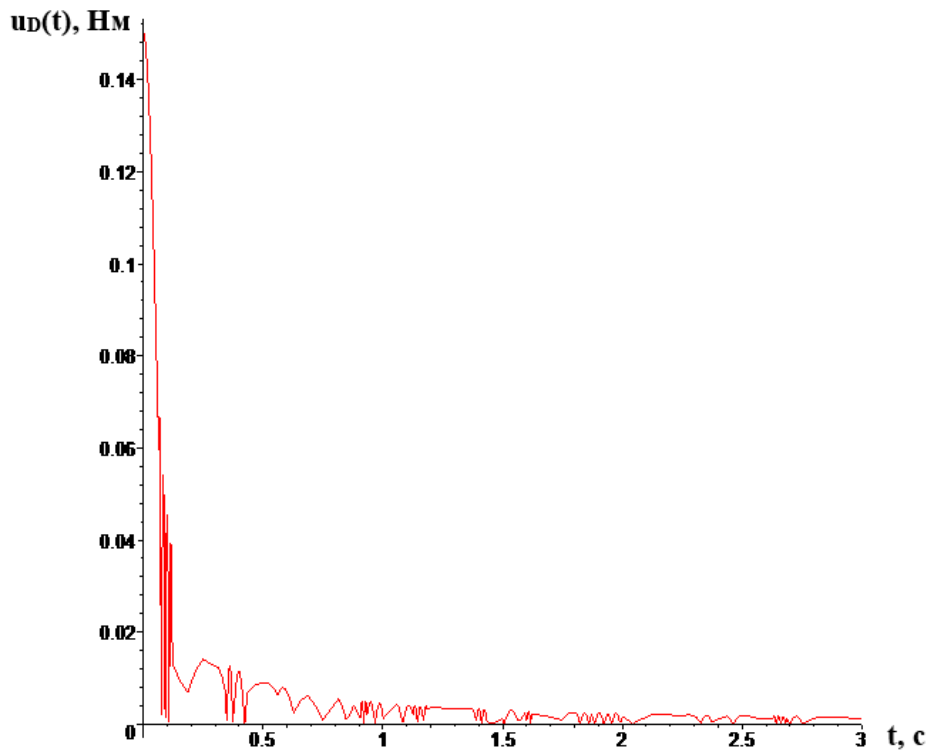


Рисунок 2.8 – Характеристика зміни динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС при номінальній частоті вхідного сигналу 50 Гц

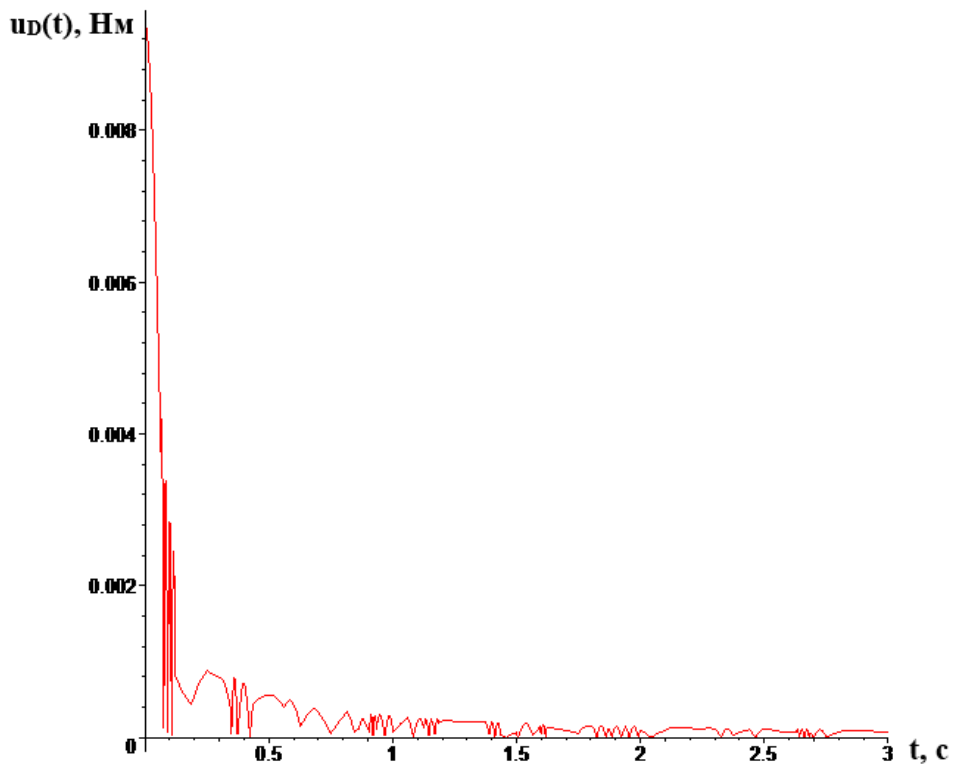


Рисунок 2.9 – Характеристика зміни динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС при зменшені частоти вхідного сигналу до 1 Гц

Як видно з рис. 2.8 та 2.9, максимальне значення динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС в діапазоні зміни динамічного моменту від 8 до 0,5 Нм на номінальній частоті обертання РС 50 Гц не перевищує 0,15 Нм (див. рис. 2.8), а на мінімальній частоті обертання ротора –  $u_D = 0,01$  Нм. Отже, за нормоване значення динамічної непевності потрібно прийняти максимальне (найбільше) значення динамічної непевності, що проявляється на верхній межі вимірювання динамічного моменту при максимальній частоті обертання роторної системи.

З отриманих результатів оцінювання динамічної непевності при вимірюванні динамічного моменту можна зробити висновок, що відносна динамічна непевність вимірювання динамічного моменту не перевищує 1,9% в діапазоні вимірювання від 8 до 0,5 Нм.

Для дослідження характеристик зміни динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС при вимірюванні динамічного моменту в діапазоні зміни від 30 до 1 Нм ( $M_K = 30$  Нм) були побудовані, за допомогою математичного пакета Maple, залежності динамічних непевностей на номінальній частоті обертання РС 50 Гц (наведено на рис. 2.10) та при мінімальній частоті обертання РС 2 Гц – на рис. 2.11.

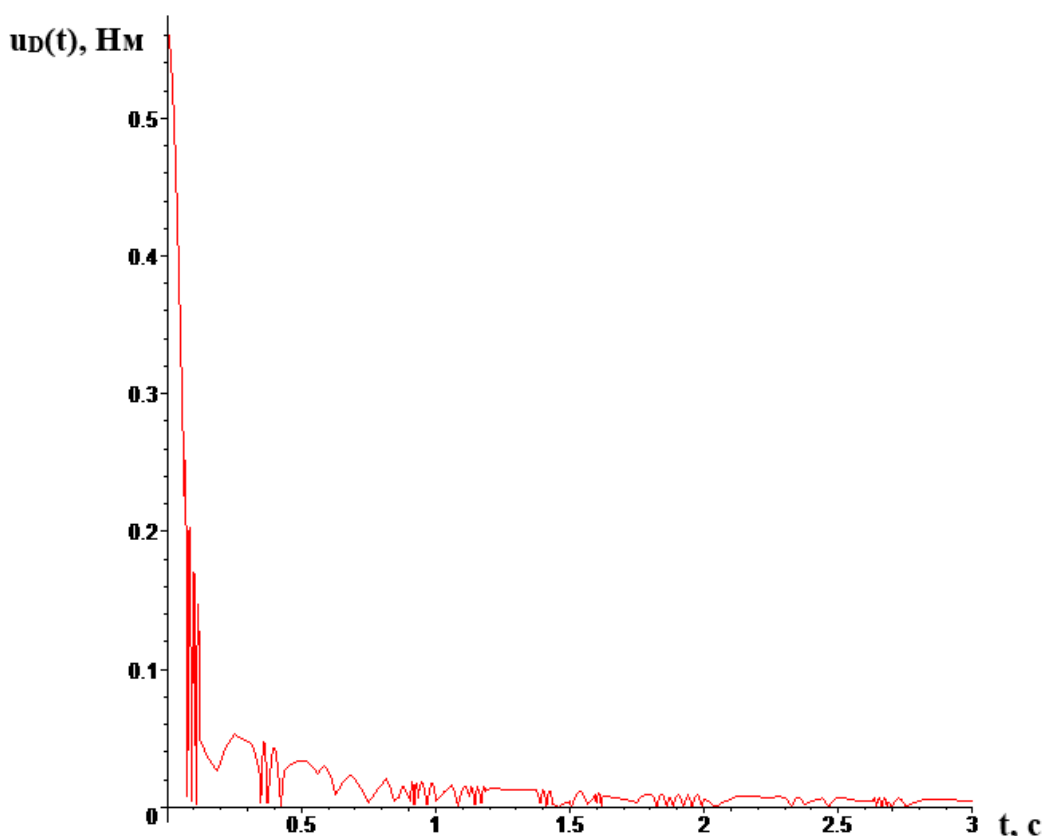


Рисунок 2.10 – Характеристика зміни динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС при зміні динамічного моменту від 30 до 1 Нм на номінальній частоті обертання РС 50 Гц



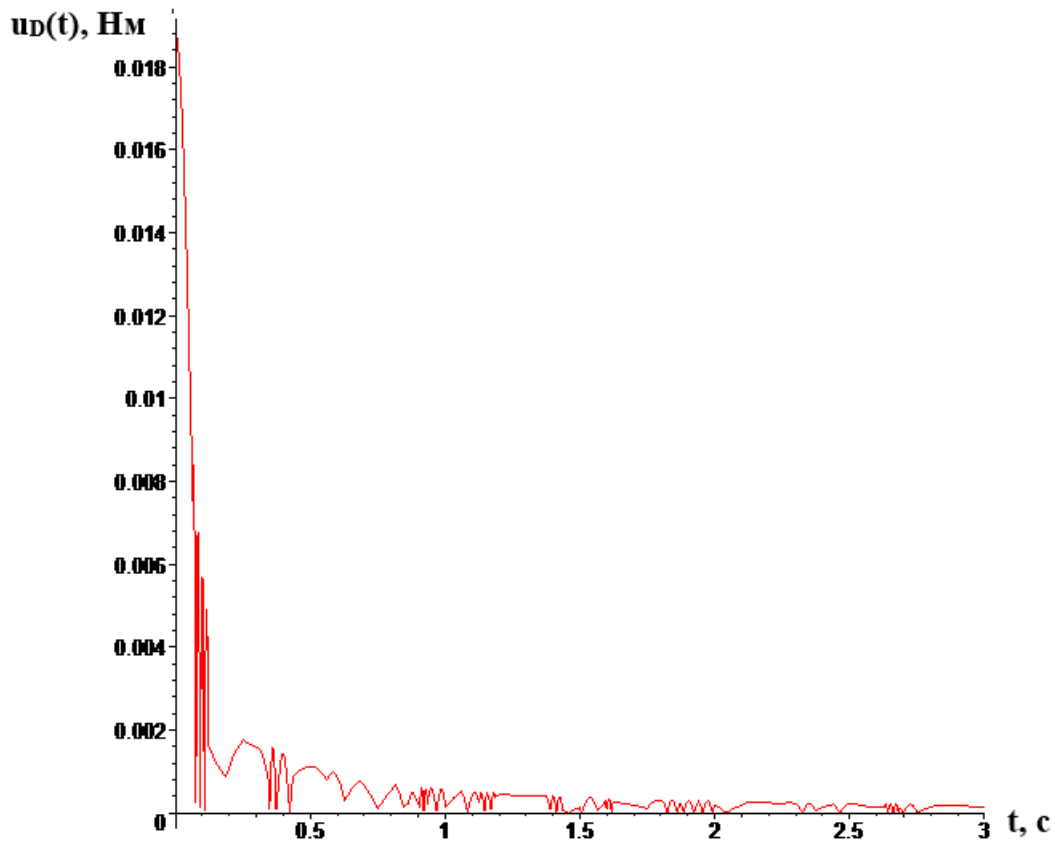


Рисунок 2.11 – Характеристика зміни динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС при зміні динамічного моменту від 30 до 1 Нм на мінімальній частоті обертання РС 1 Гц

Як видно з рис. 2.10 та 2.11, максимальне значення динамічної непевності вимірювання динамічного моменту РС в діапазоні зміни динамічного моменту від 30 до 1 Нм на номінальній частоті обертання РС 50 Гц не перевищує 0,62 Нм (див. рис. 2.10), а при мінімальній частоті обертання ротора максимальна динамічна непевність вимірювання не перевищує  $u_D = 0,02$  Нм. За нормоване значення динамічної непевності вимірювання динамічного моменту в діапазоні зміни від 30 до 1 Нм потрібно прийняти максимальне (найбільше) значення динамічної непевності (0,62 Нм), яке проявляється на верхній межі вимірювання динамічного моменту при початковій (максимальній) частоті обертання роторної системи [1, 46, 54].

Отримані результати оцінювання динамічної непевності вимірювання динамічного моменту в діапазоні вимірювання від 30 до 1 Нм показують, що відносна динамічна непевність не перевищує 2,1 %.

## 3 ПЕРЕЛІК ЗАДАЧ ДЛЯ САМОРОЗВ'ЯЗАННЯ

### 3.1 Оцінювання непевності вимірювання кутової швидкості

За допомогою цифрового засобу вимірювання кутової швидкості отримано такі значення кутової швидкості в рад/с: 100; 101; 99; 100.

Рівняння перетворення кутової швидкості має вигляд

$$\omega = \frac{2\pi f_0}{N_z} \quad (3.1)$$

де  $z$  – кількість міток на фотоелектричному сенсорі ( $z=30$ );

$N$  – кількість імпульсів;

$f_0$  – частота імпульсів квантування (1 кГц).

Із специфікації відомо, що відносна похибка опорної частоти внутрішнього генератора складає  $\pm 2,5 \cdot 10^{-7}$ .

Температурний коефіцієнт частоти опорного генератора не перевищує  $\pm 10^{-9} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

Вимірювання виконувались при температурі навколишнього середовища  $+25 \text{ }^\circ\text{C}$ . (Температура при нормальних умовах дорівнює  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ).

Необхідно оцінити комбіновану та розширену непевності.

### 3.2 Оцінювання непевності вимірювання тиску з одноразовим спостереженням

Проведено вимірювання тиску, що має верхню межу вимірювання  $P_k = 10 \text{ bar}$ , клас точності засобу вимірювання 0,1/0,01.

В результаті вимірювання тиску  $P = 5,5 \text{ bar}$ .

Вимірювання здійснено при температурі навколишнього середовища  $28 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Відомо, що температурна похибка не перевищує основну похибку на кожних  $5 \text{ }^\circ\text{C}$  відхилення температури від нормальних умов  $+20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Потрібно оцінити розширену непевність результату вимірювання тиску.

### 3.3 Оцінювання непевності опосередкованого вимірювання на основі заданого рівняння перетворення

Потрібно виконати оцінювання комбінованої та розширеної непевностей вимірювань величини  $X$  (табл. А.1, додаток А), яка пов'язана з вихідною величиною  $Y$  функціональними залежностями, що наведені в таблиці А.2 додатка А (варіанти завдань виберіть за порядковим номером у списку). Впливні коефіцієнти  $k$  та  $b$  мають такі межі невилучених залишків

систематичної похибки:  $\theta_k=0,04$  в припущенні про трикутний закон розподілу, а  $U_b= 0,06$  в припущенні про нормальний закон розподілу з ймовірністю  $P$ , яка задана в таблиці А.1 додатка А.

### **3.4 Перерахунок характеристик похибок у характеристики непевності**

За допомогою відомих залежностей виконайте перерахунок характеристик похибок у характеристики непевності для одноразових та багаторазових вимірювань. Дані про характеристики похибок наведені в таблиці Б.1 додатка Б.

### **3.5 Оцінювання непевності вимірювання деформації**

В результаті перевірки вимірювача деформації клейковини відповідно до методики перевірки, зазначеної в паспорті на засіб вимірювання, отримано такі результати вимірювань в умовних одиницях:

- при використанні кінцевої міри товщиною 2 мм значення деформації складає: 12,6; 12,3; 12,5;

- при використанні кінцевої міри товщиною 6 мм значення деформації складає: 6,5; 6,1; 6,5;

- при використанні кінцевої міри товщиною 10 мм значення деформації складає: 3,5; 3,9; 4,1.

Потрібно оцінити комбіновану та розширену непевності.

Із паспорта на засіб вимірювання відомо, що:

- межі вимірювання деформації клейковини становлять від 0 до 150,7 умовної одиниці;

- основна абсолютна похибка вимірювання не перевищує  $\pm 0,3$  умовної одиниці;

- межі допустимої абсолютної додаткової похибки вимірювання при відхиленні напруги мережі від номінального значення не перевищують  $\pm 0,1$  умовної одиниці;

- межі допустимої абсолютної похибки вимірювання, що обумовлена відхиленням температури навколишнього середовища від номінальної в межах від +10 до + 35 °С, не перевищують  $\pm 0,2$  умовної одиниці.

### **3.6 Оцінювання непевності вимірювання обертового моменту**

В результаті вимірювань обертового моменту за допомогою засобу вимірювання обертового моменту сили отримано такі значення моменту в Нм: 3,1; 3,0; 2,9; 3,1; 3,3.

Із специфікації виробника відомо:

- діапазон вимірювання моменту складає від 0 до 3,9 Нм;

- межі допустимої абсолютної похибки складають  $\pm 0,098$  Нм;

- поріг чутливості ЗВ складає 0,078 Нм.

Умови експлуатації:

- температура: від 10 до 35 °С;

- вологість: до 80 %.

Вимірювання проводились в приміщенні при температурі 25 °С.

Потрібно оцінити непевності типу А, типу В, комбіновану, розширену та подати результати вимірювань.

### 3.7 Оцінювання непевності вимірювання товщини

В результаті вимірювань товщини за допомогою ультразвукового товщиноміра отримано такі значення товщини в мм: 2,1; 2; 2,1; 1,9.

Із специфікації виробника відомо:

- діапазон вимірювання товщини складає від 0,8 до 3 мм;

- межі допустимого значення основної похибки приладу складають  $t = \pm (0,01T + 0,05)$  мм;

- додаткова температурна похибка не перевищує значення основної похибки;

- дискретність приладу складає 0,1 мм.

Потрібно оцінити розширену непевність вимірювань товщини та подати результати досліджень.

### 3.8 Оцінювання непевності вимірювання густини

Потрібно оцінити непевність вимірювання густини  $\rho$  твердого тіла за результатами вимірювання його об'єму  $V$  і маси  $m$  при рівні довіри  $p = 0,9$ .

Маса тіла вимірювалась шляхом багаторазового зважування з використанням набору зразкових тягарців, похибка яких не перевищує  $\pm 0,02$  мг.

Об'єм тіла визначався методом гідростатичного зважування з використанням того ж набору тягарців.

Рівняння перетворення має вигляд:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (3.2)$$

Результати вимірювань об'єму і маси наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Результати вимірювань об'єму і маси

№	Об'єм тіла $V_i \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$	Маса тіла $m_i \cdot 10^{-3} \text{ кг}$
1	195,39	252,9
2	195,33	252,3
3	195,39	252,5

### 3.9 Оцінювання непевності вимірювань масової частки вологи

Потрібно оцінити непевність вимірювання масової частки вологи вуглекислого барію.

Маса скляночки для зважування з наважкою до висушування,  $m_1$  :

- для першої проби  $m_{1(1)} = 41,0055$  г;
- для другої проби  $m_{1(2)} = 41,3842$  г;
- межі похибки зважування  $\pm 0,001$  г для діапазону вимірювань до 50 г;
- рівномірний розподіл значень похибки зважування в межах до 50 г;
- непевність типу В.

Маса скляночки для зважування  $m_{cm}$ :

- для першої проби  $m_{cm(1)} = 21,0034$  г;
- для другої проби  $m_{cm(2)} = 21,3822$  г.

Стандартна непевність  $u_1(m_{cm})$ , пов'язана з похибкою зважування, визначається аналогічно непевності величини  $m_1$ .

Стандартну непевність  $u_2(m_{cm})$ , обумовлену відхиленнями маси скляночки для зважування після висушування, визначаємо за умов :

- різниця між двома наступними зважуваннями скляночки для зважування після сушіння не має перевищувати 0,002 г;
- 95-відсотковий довірчий інтервал для різниці двох оцінок величини, розподіленої за нормальним законом розподілу;
- непевність типу В.

Маса скляночки для зважування з наважкою після висушування:

- для першої проби  $m_{2(1)} = 40,9850$  г;
- для другої проби  $m_{2(2)} = 41,3638$  г.

Стандартна непевність  $u_1(m_2)$ , пов'язана з похибкою зважування, визначається аналогічно непевності величини  $m_2$ .

Стандартну непевність  $u_2(m_2)$ , обумовлену відхиленнями маси скляночки для зважування з наважкою після висушування, визначаємо за умови:

- різниця між двома наступними зважуваннями скляночки для зважування з наважкою проби вуглекислого барію після сушіння не має перевищувати 0,002 г;
- 95-відсотковий довірчий інтервал для різниці двох оцінок величини, розподіленої за нормальним законом розподілу;
- непевність типу В:

Масову частку вологи вуглекислого барію  $X$  у відсотках обчислюють за формулою

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} * F, \% \quad (3.3)$$

$$X_i = \frac{m_{1i} - m_{2i}}{m_i} * 100 = \frac{m_{1i} - m_{2i}}{m_{1i} - m_{cti}} * 100, \% \quad (3.4)$$

де  $X_i$  – масова частка вологи  $i$ -ої проби вуглекислого барію, %;

$m_1$  – маса скляночки для зважування з наважкою до висушування, г;

$m_2$  – маса скляночки для зважування з наважкою після висушування, г;

$m$  – маса наважки вуглекислого барію, м;

$m_{ct}$  – маса скляночки для зважування, г;

$i$  – номер паралельної проби,  $i = 1, 2$ ;

$F$  – поправка, що враховує дозволена розбіжність між паралельними визначеннями, приймається рівною одиниці:  $F = 1$ .

Всі вхідні величини розглядаються як некорельовані, оскільки отримані незалежно одна від одної в різних експериментах.

Стандартна непевність поправкового множника розраховується за формулою

$$u(F) = \frac{r}{100\% \times 2,8 \times \sqrt{2}} \quad (3.5)$$

де допустиме відносне розходження становить  $r = 20\%$  та 95-відсотковий довірчий інтервал для різниці двох оцінок величини, розподіленої за нормальним законом розподілу.

При розрахунку стандартної непевності вимірюваної величини  $X$  коефіцієнти чутливості розраховуються як частинні похідні функції вимірювань за вхідними величинами.

Розширена непевність  $U$  визначається при коефіцієнті охоплення  $k$ , який вибирається рівним 2 при рівні довіри приблизно 95 % у припущенні нормального розподілу ймовірностей вимірюваної величини.

### 3.10 Оцінювання непевності вимірювань відносного подовження еластичного герметика

Результати випробувань зразків герметика поліуретанового на відносне подовження наведено в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2 - Результати випробувань зразків герметика

Номер зразка	Початкова довжина робочої ділянки зразка, $l_0$ , мм	Довжина робочої ділянки в момент розриву, $l_{pi}$ , мм	Сила, яка викликає розрив зразка, $H$	Відносне подовження, $\varepsilon_{pi}$ , %.
1	25	180	15,0	620
2	25	165	12,8	560
3	25	180	15,0	620
4	25	175	14,0	600
5	25	150	12,0	500

Випробування проводять при температурі навколишнього повітря ( $20 \pm 3$ ) °С і відносній вологості ( $65 \pm 5$ ) %.

Засіб вимірювання – металева лінійка за ДСТУ ГОСТ 427:2009 Лінійки вимірювальні металеві. Технічні умови (ГОСТ 427-75) з межею вимірювань 300 мм і ціною поділки 1 мм.

Відносне подовження герметика поліуретанового розраховується за виразом

$$\varepsilon_p = \bar{\varepsilon}_p + F_r = \frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_{pi}}{k} + F_r \quad (3.6)$$

де  $\bar{\varepsilon}_p$  – середнє арифметичне вимірювань відносного подовження п'яти зразків, %;

$\varepsilon_{pi}$  – відносне подовження кожного випробовуваного зразка, %;

$k$  – кількість випробованих зразків герметика;

$F_r$  – поправка на розсіювання результатів вимірювань відносних подовжень, отриманих на всіх випробованих зразках, %,  $F_r = 0$ .

Всі вхідні величини розглядаються як некоррелированні.

Відносне подовження кожного випробовуваного зразка, у відсотках, розраховується на підставі функції вимірювань

$$\varepsilon_{pi} = \frac{(l_{pi} - l_{oi}) \cdot 100}{l_{oi}} \quad (3.7)$$

де  $l_{pi}$  – довжина робочої ділянки зразка в момент розриву, мм;

$l_{oi}$  – початкова довжина робочої ділянки зразка, мм

Стандартна непевність  $u(l_{oi})$  та  $u(l_{pi})$  визначаються за умов:

- максимальна абсолютна похибка вимірювання  $\pm \Delta l = \pm 0,10$  мм;
- ціною поділки лінійки  $d = 1$  мм;
- рівномірний розподіл значень похибки лінійки і помилки оператора при знятті показів зі шкали лінійки у відповідних межах;
- непевність типу В.

Стандартна непевність  $u(F_r)$  поправки розраховується за типом А в припущенні нормального розподілу.

Сумарна стандартна непевність  $u(\varepsilon_p)$  обчислюється з урахуванням відповідних коефіцієнти чутливості  $c_{l_0}$ ,  $c_{l_p}$ ,  $c_{F_r}$ .

Розширена непевність  $U$  розраховується для нормального розподілу та при кількості вимірювань менше 10, тому значення коефіцієнта охоплення вибирається в припущенні розподілу Стюдента при ймовірності 95% і кількості ефективних ступенів вільності, які розраховуються за формулою Уелча-Саттертуета.

### 3.11 Оцінювання непевності вимірювань твердості за Брінеллем

Умови проведення вимірювань:

- температура навколишнього повітря +15 °С;
- відносна вологість 60 %;
- товщина контрольованого ділянки деталі 10 мм;
- шорсткість поверхні, на якій проводиться вимірювання  $Ra$  1,2;
- всі вхідні величини розглядаються як некорельовані.

Результати вимірювання твердості за шкалою Брінелля:  $H1 = 180$  НВ,  $H2 = 184$  НВ,  $H3 = 175$  НВ,  $H4 = 172$  НВ,  $H5 = 183$  НВ.

Умови для розрахунку стандартної непевності поправки  $u(\delta_m)$ :

- межа (діапазон) абсолютної похибки ( $\pm \Delta = \pm 15$  НВ);
- рівномірний закон розподілу;
- непевність типу В;

Умови для розрахунку стандартної непевності поправки на роздільну здатність  $u(\delta_p)$ :

- величина одиниці молодшого розряду дисплея ( $a = 1$  НВ);
- рівномірний закон розподілу;
- непевність типу В.

При розрахунку  $u_c(H)$  вважаємо, що коефіцієнти чутливості усіх впливних величин дорівнюють 1.

Сумарний розподіл вимірюваної величини припускаємо рівномірним (оскільки домінує складова непевності від величини  $\delta_m$ , відсотковий внесок становить понад 90%).

Коефіцієнт охоплення для рівня довіри 95% приймається рівним  $k = 1,65$ .

Вимірюваною величиною є твердість металу за шкалою Брінелля,  $H$ , яка визначається як

$$H = H_{\text{вим}} + \delta_m + \delta_p \quad (3.8)$$

де  $H_{\text{вим}}$  – середнє математичне результатів вимірювань твердоміром НВ;

$\delta_m$  – поправка на похибку твердоміра, НВ,  $\delta_m = 0$  ;

$\delta_p$  – поправка на роздільну здатність дисплея твердоміра, НВ,  $\delta_p = 0$ .

Стандартна непевність величини  $H_{\text{вим}}$  розраховується як середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного з 5 одиничних результатів спостережень.

**Примітка.** Ця складова може не враховуватися, якщо відхилення максимального одиничного показання твердості від мінімального не перевищує межі допустимої основної похибки твердоміра.



### **3.12 Оцінювання непевності результатів сукупного вимірювання**

Сформууйте систему нормальних рівнянь за методом найменших квадратів для результатів сукупних вимірювань  $x_i$ . Оцініть непевність результатів вимірювань та наведіть результати досліджень.

Результати сукупних вимірювань беруться з таблиці В.1 додатка В відповідно до виданого варіанта.

### **3.13 Оцінювання непевності динамічного вимірювання**

На основі заданого диференціального рівняння (відповідно до виданого варіанта – додаток Г), що описує динамічний режим роботи вимірювального перетворювача та моделі заданого вхідного сигналу оцініть непевність динамічного вимірювання. Всі впливні коефіцієнти передатної функції вимірювального перетворювача і зображення вхідного сигналу при побудові характеристики зміни динамічної непевності для спрощення розрахунків прийміть рівними 1, частоту дискретизації рівною 1 кГц, а час спостереження  $T=10$  с.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Васілевський О. М. Основи теорії невизначеності вимірювань : підручник / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук, Є. Т. Володарський. – Вінниця : ВНТУ, 2015. – 230 с.— ISBN:978-966-641-632-5.
2. Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement : JCGM 100:2008. – Sevres : JCGM, 2008. – 120 p.
3. Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM:1995) : ISO/IEC GUIDE 98-3:2008. – ISO, Switzerland, 2008. – 120 p. – (Міжнародний стандарт).
4. Васілевський О. М. Основи теорії невизначеності вимірювань : навчальний посібник / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук. – Вінниця : ВНТУ, 2012. – 172 с. – ISBN 978-966-641-454-3.
5. Захаров И. П. Теория неопределенности в измерениях : учеб. пособие / И. П. Захаров, В. Д. Кукуш. – Харьков : Консум, 2002. – 256 с. – ISBN 966-7920-24-0.
6. Поджаренко В. О. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності : навчальний посібник / Поджаренко В. О., Васілевський О. М., Кучерук В. Ю. – Вінниця : ВНТУ, 2008. – 128 с.
7. Ціделко В. Д. Невизначеність вимірювання. Обробка даних і надання результату вимірювання : [монографія] / В. Д. Ціделко, Н. А. Яремчук. – К. : Політехніка, 2002. – 176 с.
8. Васілевський О. М. Алгоритм оцінювання невизначеності у вимірюваннях при виконанні метрологічних робіт / О. М. Васілевський // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2006. – № 3 (7). – С. 147–151.
9. Основы теории неопределенности измерений : [учебник] / [И. П. Куритник, Б. Р. Нусупбеков, А. Н. Василевский, В. Ю. Кучерук, Д. Ж. Карабекова]. – Караганда : Изд-во КарГУ, 2015. – 200 с. – ISBN 978-601-80533-2-0.
10. Васілевський О. М. Елементи теорії підвищення точності вимірювання та синхронізації кутових швидкостей роторів взаємозв'язаних електродвигунів : [монографія] / О. М. Васілевський, П. І. Кулаков. – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 176 с. – ISBN 978-966-641-420-8.
11. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Extension to any number of output quantities : JCGM 102:2011. – Sevres: JCGM, 2011. – 72 p.
12. Vasilevskiy O. M. Calibration method to assess the accuracy of measurement devices using the theory of uncertainty / O. M. Vasilevskiy // International Journal of Metrology and Quality Engineering. – 2014. – 5.04: 403. – <https://doi.org/10.1051/ijmqe/2014017>.
13. Bisikalo O. V. Evaluation of uncertainty in the measurement of sense of natural language constructions / O. V. Bisikalo, O. M. Vasilevskiy //

International Journal of Metrology and Quality Engineering. – 2017. – Vol. 8. – Num. 6. – DOI 10.1051/ijmqe/2017001.

14. Vasilevskyi O. M. A frequency method for dynamic uncertainty evaluation of measurement during modes of dynamic operation // International Journal of Metrology and Quality Engineering. – 2015. – V. 6. – Number 2–202.

15. Васілевський О. М. Оцінка невизначеності вихідних сигналів засобів вимірювальної техніки в динамічних режимах роботи / О. М. Васілевський // Системи обробки інформації. – Харків, 2010. – № 4 (85). – С. 81–84.

16. Василевский А. Н. Способ выражения динамической неопределенности средств измерений / А. Н. Василевский // Приборы и методы измерений. – Минск. – 2013. – № 2 (7). – С. 109–113.

17. Vasilevskyi O. M. Spectral method to evaluate the uncertainty of dynamic measurements / O. M. Vasilevskyi, M. Yu. Yakovlev, P. I. Kulakov // Technical Electrodynamics. – 2017. – № 4. – P. 72–78.

18. Vasilevskyi O. M. Evaluation of dynamic measurement uncertainty in the time domain in the application to high speed rotating machinery / O. M. Vasilevskyi, P. I. Kulakov, K. V. Ovchynnykov, V. M. Didych // International Journal of Metrology and Quality Engineering. – 2017. – Vol. 8. – art. 25 (pages 9). – DOI: 10.1051/ijmqe/2017019.

19. Oleksandr Vasilevskyi, Pavlo Kulakov, Dmytro Kompanets, Oleksander M. Lysenko, Vasyl Prysyzhnyuk, Waldemar Wójcik, Doszhon Baitussupov. A new approach to assessing the dynamic uncertainty of measuring devices, *Proceedings Volume 10808, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018*, 108082E, <https://doi.org/10.1117/12.2501578>.

20. Васілевський О. М. Спосіб апіорної оцінки непевності вимірювальних приладів, що використовуються при динамічних вимірюваннях / О. М. Васілевський // Вісник інженерної академії України. – 2018. – № 1. – С. 156–162.

21. Elster C., Eichstädt S., Link A. Uncertainty evaluation of dynamic measurements in line with GUM // *XIX IMEKO World Congress on Fundamental and Applied Metrology*. - 2009.

22. S. Eichstädt, *Analysis of Dynamic Measurements – Evaluation of Dynamic Measurement Uncertainty*. – Wirtschaftsverl (2012).

23. Eichstädt S., Link A., Elster C. Dynamic uncertainty for compensated second-order systems // *Sensors*. 2010. – № 10. – P. 7621. – <https://doi.org/10.3390/s100807621>.

24. Рекомендации по межгосударственной стандартизации. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений» : РМГ 43-2001. – Офиц. изд. – Минск : Издательство стандартов, 2002. – 20 с.

25. Васілевський О. М. Дослідження якості результатів вимірювань зусилля на основі концепції невизначеності / О. М. Васілевський // Вісник інженерної академії України. – 2013. – № 3–4. – С. 229–232.

26. Василевский А. Н. Неопределенность измерительного канала активности ионов при контроле гумусового состояния почв с помощью ионоселективных электродов / А. Н. Василевский, В. А. Поджаренко, В. Н. Дидыч // Системи обробки інформації. – 2008. – № 4 (71). – С. 85–87.

27. Дідич В. М., Васілевський О. М., Поджаренко В. О. Потенціометричні засоби вимірювання активності іонів складових елементів гумусу в ґрунті // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 5. – С. 5-10.

28. Василевский А. Н. Исследование неопределенности измерения концентрации ионов при использовании средства измерения, построенного по принципу аналого-цифрового преобразования / А. Н. Василевский, Е. Д. Никитенко // Збірник наукових праць Одеської державної академії технічного регулювання та якості. – 2015. – Випуск 2 (7). – С. 62–65.

29. Васілевський О. М. Елементи теорії побудови потенціометричних засобів вимірювального контролю активності іонів з підвищеною вірогідністю : [монографія]. / О. М. Васілевський, В. М. Дідич. – Вінниця : ВНТУ. – 2013. – 176 с. – ISBN 978-966-641-505-2.

30. Васілевський О. М. Методологічні засади метрологічного забезпечення вимірювань параметрів руху електромоторів у статичному режимі роботи / О. М. Васілевський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2014. – № 5 (116). – С. 42–52.

31. Васілевський О. М. Елементи теорії підвищення точності вимірювання та синхронізації кутових швидкостей роторів взаємозв'язаних електромоторів : [монографія] / О. М. Васілевський, П. І. Кулаков. – Вінниця : ВНТУ. – 2011. – 176 с. – ISBN 978-966-641-420-8.

32. Васілевський О. М. Актуальні проблеми метрологічного забезпечення : [навчальний посібник] / О. М. Васілевський, В. О. Поджаренко. – Вінниця : ВНТУ, 2010. – 214 с. – ISBN 978-966-641-348-5.

33. Васілевський О. М. Система вимірювального контролю параметрів взаємозв'язаних роторних машин : [монографія] / О. М. Васілевський, В. О. Поджаренко. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця. – 2007. – 156 с. – ISBN 978-966-641-213-6.

34. Васілевський О. М. Оцінювання інструментальної складової непевності вимірювання крутильного моменту на основі інструментальних похибок // Вісник інженерної академії України. – 2015. – № 3. – С. 209–216.

35. Васілевський О. М. Метрологічне забезпечення вимірювань крутного моменту електромоторів з урахуванням концепції непевності // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2015. – № 3. – С. 75–79.

36. Васілевський О. М. Комп'ютерно-вимірювальна система контролю якості електроенергії загального призначення та аналіз її невизначеностей // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2008. – № 1 (11). – С. 21–26.

37. Васілевський О. М. Метрологічне забезпечення засобу вимірювання параметрів якості електроенергії загального призначення / О. М. Васілевський, В. Ю. Кучерук // Системи обробки інформації. – Харків. – 2012. – № 1 (99). – С. 125–129.

38. Васілевський О. М. Дослідження якості результатів вимірювань обертальних параметрів електромоторів на основі концепції невизначеності / О. М. Васілевський, Т. М. Мельник // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2013. – № 2. – С. 11–15.

39. Сопрунюк П. М. Неопределенность результатов измерений при контроле асинхронности вращения электромеханических преобразователей / П. М. Сопрунюк, А. Н. Василевский, Ю. А. Чабанюк // Системи обробки інформації. – 2006. – Випуск 7 (56). – С. 72–75.

40. Васілевський О. М., Кучерук В. Ю., Володарський Є. Т. Непевність результатів вимірювань, контролю та випробувань : підручник. – Херсон : «ОЛДІ-ПЛЮС», 2020. – 352 с. – ISBN 978-966-289-374-8.

41. Бензины автомобильные и авиационные. Определение бензола методом инфракрасной спектроскопии : ГОСТ Р 51930-2002. – М. : ИПК Издательство стандартов, 2002.

42. Васілевський О. М. Методика визначення міжповірного інтервалу засобів вимірювання на основі концепції невизначеності / О. М. Васілевський // Технічна електродинаміка. – 2014. – № 6. – С. 81–88.

43. Васілевський О. М. Методика оцінювання метрологічної надійності засобів вимірювальної техніки з урахуванням концепції невизначеності / О. М. Васілевський, О. Г. Ігнатенко, В. В. Присяжнюк, Ю. М. Костюк // Вісник інженерної академії України. – 2016. – № 1. – С. 217–220.

44. Васілевський О. М. Нормування показників метрологічної надійності // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2011. – № 4. – С. 9–13.

45. Васілевський О. М., Дідич В. М. Оцінювання міжкалібрувальних інтервалів засобів вимірювальної техніки // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2018. – № 2. – С. 24–30.

46. Васілевський О. М. Дослідження динамічної невизначеності вимірювання динамічного моменту роторних систем // Вісник інженерної академії України. – 2013. – № 2. – С. 57–60.

47. Васілевський О. М. Аналіз динамічних метрологічних характеристик вимірювального перетворювача вібрації : наукові праці IV Міжнародної науково-техн. конф. [«Метрологія та вимірювальна техніка»], (Харків, 12–14 жовтня 2004 р.) / Держ. комітет України з питань техн. регулювання та споживчої політики; головн. ред. Г. С. Сидоренко. – Харків : Національний науковий центр «Інститут метрології», 2004. – Т. 2. – С. 130–132.

48. Поджаренко В. О., Васілевський О. М. Діагностика технічного стану електромеханічних систем за логарифмічним декрементом затухання // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія: «Обчислювальна техніка та автоматизація». – 2005. – № 88. – С. 138–144.

49. Vasilevskiy O. M., Kulakov P. I., Dudatiev I. A., Didych V. M., Andrzej K., Bатырбек S., Azat A., Kozbekova A. Vibration diagnostic system for evaluation of state interconnected electrical motors mechanical parameters // Proc. SPIE 10445. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments 2017. – 2017. – 104456C. – doi:10.1117/12.2280993.
50. Vasilevskiy O. M., Kulakov P. I., Didych V. M. Technique Of Research Uncertainty Dynamic Measurements Of Vibration Acceleration Of Rotating Machines // IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering (IOSR-JEEE). – 2016. – Volume 11. – Issue 5. – Ver. III. – PP. 34–39. – DOI: 10.9790/1676-1105033439.
51. Васілевський О. М. Методика визначення довірчого рівня при оцінюванні розширеної непевності вимірювання віброприскорення // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2015. – № 3 (34). – С. 100–103.
52. Поджаренко В. О., Дідич В. М., Васілевський О. М. Оцінка вірогідності автоматизованого контролю складових елементів гумусу в ґрунті // Вісник національного університету «Львівська політехніка». Серія: «Автоматика, вимірювання та керування». – 2009. – № 639. – С. 51–54.
53. Vasilevskiy O., Didych V., Kravchenko A., Yakovlev M., Andrikevych I., Kompanets D., Danylyuk Y., Wójcik W., Nurmakhambetov A. Method of evaluating the level of confidence based on metrological risks for determining the coverage factor in the concept of uncertainty // Proceedings Volume 10808. Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018. – 2018. – 108082C. – DOI: 10.1117/12.2501576.
54. Васілевський О. М. Засіб вимірювання динамічного моменту електромоторів та аналіз його точності // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2012. – № 73. – С. 52–56.
55. Vasilevskiy O. M. Metrological characteristics of the torque measurement of electric motors / O. M. Vasilevskiy // International Journal of Metrology and Quality Engineering. – 2017. – vol. 8.
56. Vasilevskiy O. An approach to the evaluation of dynamic uncertainty in measurement using non-statistical techniques / O. Vasilevskiy, V. Kucheruk, I. Kurytnik // Pomiar. Automatyka. Kontrola. – 2014. – Volume 60. – Issue 11. – P. 997–1001.
57. Vasilevskiy, O. M., Didych, V. M. «The method of expressing the uncertainty of dynamic measurements», *Modern engineering research: topical problems, challenges and modernity* : Collective monograph. – Riga : Izdevnieciba «Baltija Publishing». – 2020. – pp. 63–83. – ISBN 978-9934-588-47-1.

# *Додатки*

*Додаток А*  
Варіанти завдання № 3.3

Таблиця А.1 – Результати вимірювань величини *X* та їхні ймовірності

Вар.	P	Дані вхідної величини <i>X</i> , що вимірювалась								
1	0,9	1,68	1,77	1,74	1,60	1,52	1,76	1,61	1,68	1,92
2	0,95	2,29	2,50	2,37	2,47	2,45	2,48	2,36	2,34	2,39
3	0,99	3,86	3,88	3,84	3,91	3,98	3,92	3,92	3,78	3,83
4	0,95	4,81	4,71	4,69	4,87	4,69	4,74	4,70	4,66	4,79
5	0,9	5,72	5,65	5,70	5,55	5,56	5,66	5,56	5,69	5,55
6	0,95	6,60	6,69	6,79	6,78	6,65	6,63	6,72	6,71	6,71
7	0,98	7,79	7,83	7,68	7,81	7,73	7,71	7,74	7,66	7,81
8	0,9	8,82	8,74	8,69	8,78	8,81	8,84	8,74	8,88	8,82
9	0,99	9,02	9,19	9,26	9,24	9,14	9,24	9,18	9,15	9,10
10	0,95	10,73	10,81	10,57	10,60	10,59	10,74	10,58	10,59	10,64
11	0,9	11,77	11,81	11,89	11,78	11,71	11,79	11,90	11,91	11,81
12	0,95	12,76	12,97	12,91	12,80	12,87	12,80	12,77	12,89	12,98
13	0,9	13,74	13,64	13,57	13,58	13,69	13,57	13,65	13,50	13,68
14	0,98	14,92	14,82	14,88	14,81	14,90	14,90	14,96	14,93	14,87
15	0,95	15,44	15,49	15,39	15,36	15,30	15,35	15,40	15,44	15,47
16	0,9	16,68	16,77	16,74	16,60	16,52	16,76	16,61	16,68	16,92
17	0,95	17,92	17,82	17,88	17,81	17,90	17,90	17,96	17,93	14,87
18	0,98	18,76	18,97	18,91	18,80	18,87	18,80	18,77	18,89	18,98
19	0,9	19,82	19,74	19,69	19,78	19,81	19,84	19,74	19,88	19,82
20	0,95	20,29	20,50	20,37	20,47	20,45	20,48	20,36	20,34	20,39
21	0,95	21,79	21,83	21,68	21,81	21,73	21,71	21,74	21,66	21,81
22	0,9	22,77	22,81	22,89	22,78	22,71	22,79	22,90	22,91	22,81
23	0,99	23,86	23,88	23,84	23,91	23,98	23,92	23,92	23,78	23,83
24	0,95	24,81	24,71	24,69	24,87	24,69	24,74	24,70	24,66	24,79
25	0,98	0,9	0,97	0,84	0,86	0,89	0,91	0,93	0,87	0,85
26	0,95	31,1	30,9	31,5	31,3	30,8	30,7	31,4	31,1	31,2



Таблиця А.2 – Рівняння перетворень, за якими проводились вимірювання X

Варіанти	b	K	Y=f(X, k, b)
1	0,95	14	$Y = \sqrt{k} + X^2 / b$
2	1,25	2,5	$Y = (b/k)^3 + \sqrt{X}$
3	2,55	0,95	$Y = k^2 X^3 / b$
4	1,2	5,5	$Y = b^3 + X / \sqrt{k}$
5	3,6	4,54	$Y = k^{0,5} b^4 / \sqrt{X}$
6	2,95	3,25	$Y = k^2 / (X + \sqrt{b})$
7	4,1	8,78	$Y = k + b\sqrt{X + k}$
8	5,2	1,65	$Y = k^4 / \sqrt{X + b}$
9	6,6	2,5	$Y = \sqrt{k + X^2} / b$
10	1,66	3,25	$Y = X + b\sqrt{k + bX}$
11	0,98	1,83	$Y = \sqrt{kb} / \sqrt{X} + X$
12	5,27	9,51	$Y = k^{2/3} + (b + X) / \sqrt{X}$
13	6,05	9,05	$Y = b^3 + X^2 / (X + k)$
14	2,35	6,25	$Y = X / \sqrt{b} + (k/X)^{1,5}$
15	5,85	8,75	$Y = \sqrt[3]{X} + k^3 \sqrt{b + X}$
16	6,65	2,25	$Y = k^4 X / \sqrt{X + b}$
17	7,23	4,52	$Y = \sqrt{X + b^2} / k^2$
18	7,88	9,61	$Y = 1/b + k^2 / X^3$
19	6,54	0,85	$Y = b/X + \sqrt{k^3 X}$
20	3,22	5,5	$Y = X^2 / (b^3 + \sqrt{kX})$
21	7,05	5	$Y = X + b^3 X^4 / \sqrt{k}$
22	3,36	2,43	$Y = (X - 1) / \sqrt{k^4 + b^3 X}$
23	0,99	0,88	$Y = b^3 \exp(2X^2/k)$
24	8,85	4,55	$Y = \exp(b) \sin(Xk)$
25	7,33	9,72	$Y = \operatorname{tg}(b/X) / \sqrt[3]{k}$
26	3,54	5,89	$Y = 2^b \cos(k/X)$

Додаток Б

Варіанти завдання № 3.4

Таблиця Б.1 – Характеристики похибок, що підлягають перерахунку

Варіант	$\Delta_{0,95}$	$\Delta_{0,99}$	$\gamma$	N	m
1	1,5	1,0	0,7	5	2
2	2,3	1,8	0,9	10	1
3	3,1	2,6	10	20	3
4	2,7	1,05	0,5	25	4
5	2,0	0,95	0,4	30	5
6	1,8	0,9	8	45	2
7	1,4	0,85	7	50	3
8	1,2	0,8	0,9	100	4
9	0,8	0,15	0,8	15	6
10	0,5	0,09	0,4	90	2
11	0,3	0,005	0,8	25	3
12	0,1	0,002	2	35	4
13	0,05	0,045	8	29	7
14	0,03	0,0013	10	26	4
15	0,01	0,0067	0,7	18	3
16	0,07	0,035	0,9	16	2
17	1,4	0,558	3	11	1
18	1,6	0,427	16	9	9
19	3,45	0,085	0,25	8	4
20	5,05	0,075	1	44	3
21	4,32	0,0065	9	35	2
22	3,25	0,089	8	30	3
23	3,99	0,077	0,1	29	4
24	2,95	0,022	0,6	4	5
25	10,55	0,025	0,9	28	1
26	2,85	0,95	0,8	45	8

## Додаток В

### Варіанти завдання № 3.12

Таблиця В.1 – Варіанти завдань

Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_4$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
1	4,16	2,18	2,21	2,20	3,16	3,33	3,25	2,21	2,20	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2+x$ $_4$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
2	8,13	4,14	4,17	4,15	6,13	6,26	6,19	4,17	4,15	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
3	12,16	6,18	6,21	6,20	9,16	9,33	9,25	6,21	6,20	0,97
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
4	10,13	5,14	5,17	5,15	7,13	7,26	7,19	6,17	4,15	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
5	6,23	3,26	3,30	3,28	4,23	4,47	4,35	4,30	2,28	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_2+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
6	6,16	3,18	2,21	4,20	4,16	5,33	5,25	3,21	3,20	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_1+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
7	10,13	6,14	5,17	5,15	9,13	8,26	8,19	3,17	7,15	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
8	7,16	3,18	4,21	3,20	6,16	6,33	6,25	2,21	5,20	0,97
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
9	9,23	3,26	6,30	3,28	7,23	7,47	7,35	4,30	5,28	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_3$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_2+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
10	12,16	7,18	5,21	7,20	10,16	10,33	10,25	4,21	8,20	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
11	15,13	5,14	7,17	8,15	10,13	13,26	13,19	7,17	8,15	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_4$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
12	12,16	3,18	6,21	6,20	7,16	10,33	10,25	7,21	5,20	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
13	12,23	7,26	7,30	5,28	8,23	6,47	6,35	10,30	2,28	0,97
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
14	12,16	5,18	4,21	8,20	7,16	10,33	10,25	7,21	5,20	0,99
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	Рдов
15	11,16	7,18	5,21	6,20	10,16	9,33	9,25	3,21	8,20	0,9

Продовження табл. В.1

Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
16	17,8	6,2	5,3	7,12	12,1	11,2	12,75	7,42	4,9	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
17	16,6	16,8	16,1	17,2	18,6	18,3	18,5	17,2	18,2	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
18	19,9	11,18	8,51	9,2	15,6	14,35	12,51	7,82	12,62	0,99
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
19	29,2	17,8	12,1	11,4	19,6	24,5	21,1	17,21	18,2	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
20	35,3	21,5	19,6	31,5	28,2	31,1	32,8	18,7	23,9	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
21	45,3	25,1	29,3	17,1	35,5	30,9	36,2	24,5	15,9	0,99
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
22	11,13	2,06	4,1	7,12	5,11	10,15	10,13	7,08	4,1	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
23	13,13	5,14	9,17	4,15	10,13	9,26	9,19	7,17	6,15	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
24	11,13	6,14	9,17	2,15	10,13	6,26	6,19	6,17	5,15	0,9
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
25	7,13	4,14	5,17	2,15	6,13	4,26	4,19	4,17	3,15	0,95
Вар.	$x_1+x_2+$ $+x_3+x_4$	$x_2+x_3$	$x_1+x_2$	$x_3+x_4$	$x_1+x_2+$ $+x_3$	$x_1+x_3+$ $+x_4$	$x_2+x_4+$ $+x_3$	$x_2+x_4$	$x_3+x_1$	<i>Рдов</i>
26	6,23	3,26	3,30	3,28	4,23	4,47	4,35	4,30	2,28	0,97

Додаток Г

Варіанти завдання № 3.13

Таблиця Г.1 – Моделі вимірювального перетворювача та вхідного сигналу

Вар.	Диференціальне рівняння	Модель вхідного сигналу
1	$m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$	$P(t) = \cos(\omega_0 t)$
2	$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + b_o l_o \frac{d\varphi(t)}{dt} + c_o l_1^2 \varphi(t) = H_o \omega(t)$	$\omega(t) = e^{\omega_0 t}$
3	$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = ma(t)$	$a(t) = te^{\omega_0 t}$
4	$aT^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (aT + T) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = k\Theta(t)$	$\Theta(t) = 1 - e^{\omega_0 t}$
5	$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t)$	$\Theta(t) = at^2$
6	$\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$	$\Theta(t) = \frac{1}{\omega_0} e^{at} \sin(\omega_0 t)$
7	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$	$\Theta(t) = e^{at} \cos(\omega_0 t)$
8	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c g^2(t)$	$g(t) = \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
9	$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$	$\theta(t) = \frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
10	$\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} \varphi(t) = \frac{1}{\lambda} z(t)$	$z(t) = \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{b^2 - a^2}$
11	$J \frac{d\beta(t)}{dt} + bl\beta(t) = H\Psi(t)$	$\Psi(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$ , $n = 3$
12	$\frac{d^2 U(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{dU(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k U(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t)$	$\Theta(t) = \sin(\omega_0 t)$
13	$aT^2 \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + (aT + T) \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = k\Theta(t)$	$\Theta(t) = e^{-zt}$

14	$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dx(t)}{dt} + c_1 x(t) = ma(t)$	$a(t) = t^n,$ $npu \quad n = 4$
15	$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = H_o \omega(t)$	$\omega(t) = e^{\beta t} \sin(at)$
16	$m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$	$P(t) = t \sin(at)$
17	$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$	$\theta(t) = e^{\beta t} \cos(at)$
18	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c\mathcal{G}(t)$	$\mathcal{G}(t) = e^{\beta t} t^n,$ $npu \quad n = 2$
19	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$	$\Theta(t) = e^{\beta t} sh(at)$
20	$\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$	$\Theta(t) = e^{\beta t} ch(at)$
21	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + r\omega(t) = c\mathcal{G}(t)$	$\mathcal{G}(t) = e^{\beta t} t \cos(at)$
22	$\frac{dU(t)}{dt} + \frac{\alpha S}{mc} U(t) = \frac{\alpha S}{mc} \theta(t)$	$\theta(t) = e^{\beta t} t^n,$ $npu \quad n = 4$
23	$m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t)$	$P(t) = e^{\beta t} t \cos(at)$
24	$J \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varphi(t) = \omega(t)$	$\omega(t) = t \cos(at)$
25	$\tau \frac{dP(t)}{dt} + P(t) = \Theta(t)$	$\Theta(t) = t \cdot ch(a \cdot t)$
26	$J \frac{d\omega(t)}{dt} + DQ\omega(t) = A\Theta(t)$	$\Theta(t) = e^{\beta t} t \sin(at)$

*Навчальне видання*

**Васілевський Олександр Миколайович**

**Присяжнюк Василь Васильович**

**ОЦІНЮВАННЯ НЕПЕВНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ  
ВИМІРЮВАНЬ, КОНТРОЛЮ ТА ВИПРОБУВАНЬ**

Практикум

Рукопис оформив *О. М. Васілевський*

Редактор *В. Дружиніна*

Оригінал-макет виготовив *О. Ткачук*

Підписано до друку 02.09.2020.

Формат 29,7×42 ¼. Папір офсетний.

Гарнітура Times New Roman.

Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 8,63.

Наклад 50 (1-й запуск 1-21) пр. Зам. № 2020-081.

Видавець та виготовлювач

Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.

ВНТУ, ГНК, к. 114.

Хмельницьке шосе, 95,

м. Вінниця, 21021.

Тел. (0432) 65-18-06.

**press.vntu.edu.ua;**

*E-mail:* kivc.vntu@gmail.com

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.