МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійних робіт
з дисципліни «Чисельні методи»
для студентів денної і заочної форм навчання
спеціальності «Комп'ютерні науки»

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів денної і заочної форм навчання спеціальності «Комп'ютерні науки»

Вінниця
ВНТУ
2020

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 22.10.2020 р.)

Рецензенти:

Т. Б. Мартинюк, доктор технічних наук, професор

Н. І. Заболотна, доктор технічних наук, професор

Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів денної і заочної форм навчання спеціальності «Комп'ютерні науки» / Уклад. : Крилик Л. В., Яровий А. А., Ваховська Л. М. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 24 с.

У методичних вказівках наведено основні теоретичні дані до виконання самостійних робіт з дисципліни «Чисельні методи» та рекомендовану літературу. Методичні вказівки розроблено відповідно до робочої програми навчальної дисципліни «Чисельні методи».

ЗМІСТ

ТЕМА 1. ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Мета: обчислення систем лінійних алгебраїчних рівнянь методами лінійної алгебри.

Розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) є, фактично, базовою процедурою в пакетах математичного моделювання складних об’єктів і систем, що являють собою основний інструментарій спеціалістів з *інформаційних технологій.*

Вибір ефективного способу розв’язування СЛАР відіграє дуже важливу роль. Нині пропонується надзвичайно багато методів, а в математичному забезпеченні ПК є велика кількість прикладних програм, які дозволяють розв’язувати різноманітні лінійні системи, що виникають на практиці. Щоб вибрати оптимальний метод, необхідно врахувати специфіку постановок задач, знати недоліки та переваги методів і знати межі їх застосування.

Методи обчислення СЛАР поділяються на дві групи. До першої групи належать так звані **точні** або прямі методи – алгоритми, які приводять до розв’язання системи за скінченне число арифметичних операцій. Такі методи дають змогу знайти точний розв’язок СЛАР у припущенні, що всі обчислення виконуються точно (без округлень), а коефіцієнти системи і вільні члени – точні числа. Але на практиці всі обчислення виконуються з обмеженою кількістю десяткових розрядів, а ірраціональні коефіцієнти і вільні члени, якщо такі є, замінюються раціональними числами. Тому в процесі обчислень вдаються до округлень, а це означає, що розв’язки, які обчислюються за точними методами, фактично є наближеними числами з певними похибками (*похибками округлень*). До точних належать метод Гаусса (метод виключень), правило Крамера знаходження розв’язку за допомогою визначників, метод квадратних коренів, метод Халецького, метод прогонки та інші.

Другу групу становлять **наближені** методи, зокрема **ітераційні** методи розв’язання СЛАР. Ітераційними називають такі методи, які дають змогу знайти наближений розв’язок СЛАР із заздалегідь указаною точністю шляхом виконання скінченної кількості арифметичних операцій, хоча самі обчислення можуть проводитись і без округлень, а коефіцієнти і вільні члени системи бути точними числами. Точний розв’язок системи за допомогою ітераційних методів можна знайти тільки теоретично як границю збіжного нескінченного процесу. Розв’язуючи системи рівнянь ітераційними методами, крім *похибок округлення*, потрібно враховувати також *похибку методу*. До ітераційних належать метод ітерації, метод Зейделя тощо.

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути:

- метод Гаусса з послідовним виключенням невідомих;
- метод квадратних коренів;
- метод Халецького.

ТЕМА 2. НЕЛІНІЙНІ ЗАДАЧІ

Мета: уточнення коренів нелінійних рівнянь.

До методів розв'язання нелінійних рівнянь та систем нелінійних рівнянь зводиться багато практичних задач, наприклад, розрахунки нелінійних електричних кіл та систем керування, розв'язання нелінійних дифе-ренціальних рівнянь, аналіз стійкості систем шляхом оцінення їх власних значень та ін.

Якщо для найпростіших видів алгебраїчних рівнянь (не вище третього степеня) існують точні аналітичні формули, то для трансцендентних рівнянь і будь-яких систем рівнянь таких методів взагалі не існує та потрібно користуватися тільки наближеними ітераційними методами й алгоритмами.

Крім того, якщо закони функціонування моделі нелінійні, а система або процес, які моделюються, мають один ступінь свободи (тобто мають одну незалежну змінну), то така модель, як правило, описується одним нелінійним рівнянням.

Потреба відшукання коренів нелінійних рівнянь зустрічається в розрахунках систем автоматичного управління і регулювання, власних коливань машин і конструкцій, в задачах кінематичного аналізу та синтезу, плоских і просторових механізмів та інших завданнях.

Однак точне рішення рівняння не завжди є необхідним. Завдання відшукання коренів рівняння можна вважати практично вирішеним, якщо виконавець зуміє знайти корені рівняння із заданим ступенем точності. Для цього використовуються наближені (чисельні) методи розв'язання.

Більшість застосовуваних наближених методів рішення рівнянь є, по суті, **способами уточнення коренів**. Для їх застосування потрібно знати інтервал ізоляції $[a, b]$, в якому лежить уточнюваний корінь рівняння.

У завданнях проектування та дослідження поведінки реальних об'єктів, процесів і систем (ОПС) математичні моделі мають відображати реальні фізичні нелінійні процеси. При цьому ці процеси залежать, як правило, від багатьох змінних. Як результат – математичні моделі реальних ОПС описуються системами нелінійних рівнянь.

Метод Ньютона − це найпоширеніший метод обчислення систем нелінійних рівнянь. Він забезпечує швидшу збіжність порівняно з методом простих ітерацій. В основі методу Ньютона лежить ідея лінеаризації всіх нелінійних рівнянь системи. Цей метод має переваги порівняно іншими методами. Але для методу Ньютона так само існує проблема збіжності, зі збільшенням числа невідомих область збіжності зменшується, а в разі великих систем збіжність забезпечується, якщо початкова точка близька до шуканого розв'язку.

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути питання:

- метод простої ітерації;
- метод Ньютона для обчислення системи двох нелінійних рівнянь;
- метод Ньютона для системи з n рівнянь з n невідомими.

ТЕМА 3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Мета: обчислення звичайних диференціальних рівнянь з використанням багатокрокових методів.

При математичному описі різноманітних процесів, явищ та залежностей, що містять елементи «руху», користуються математичними моделями у вигляді рівнянь, до яких, крім незалежних величин і залежних від них шуканих функцій, входять також похідні (диференціали) певного порядку від шуканих функцій.

Такі рівняння називають диференціальними.

Найпростішим диференціальним рівнянням можна вважати:

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

де $f(x)$ – відома функція,

$y = y(x)$ – шукана функція.

Звичайне диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків. Для відшукання будь-якого конкретного розв'язку потрібні додаткові умови. Ці умови можуть бути різними і приводити до різних задач.

У випадку, коли додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної, має місце *задача Коші* (задача з початковими умовами).

Якщо умови задаються для двох або більше значень незалежної змінної, то задача стає *крайовою*.

У задачі Коші додаткові умови називаються початковими, а у крайовій задачі – граничними. При розв'язанні цих задач використовуються різні методи і алгоритми.

Методи розв'язання задачі Коші поділяються на *однокрокові* та *багатокрокові*.

В *однокрокових* методах для знаходження наступної точки на кривій $y = f(x)$ потрібна інформація лише про один попередній крок (методи Ейлера та Рунге-Кутта).

У *багатокрокових* методах (прогнозу і корекції) для знаходження наступної точки на кривій $y = f(x)$ потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок.

Для отримання досить точного чисельного значення часто використовується ітераційна процедура (наприклад, в методах Мілна-Адамса, Башфорта, Хеммінга).

Порівнюючи ефективність однокрокових і багатокрокових методів, виділяють такі особливості:

1. Багатокрокові методи потребують більшого обсягу пам'яті ПК, тому що оперують більшою кількістю початкових даних.
2. При використанні багатокрокових методів існує можливість оцінення похибки на кроці, тому значення кроку обирається оптимальним, а в однокрокових – з деяким запасом, що знижує швидкодію.
3. При однаковій точності багатокрокові методи потребують меншого обсягу обчислень. Наприклад, в методі Рунге–Кутта четвертого порядку точності доводиться обчислювати чотири значення функції на кожному кроці, а для забезпечення збіжності методу прогнозу і корекції того ж порядку точності – достатньо двох.
4. Однокрокові методи, на відміну від багатокрокових, дозволяють одразу почати розв'язування задачі («самостартування») і легко змінювати крок в процесі обчислень.

Найбільш простим однокроковим методом, який потребує мінімальних затрат обчислювальних ресурсів, але дає змогу обчислювати результат із порівняно низькою точністю, є метод Рунге-Кутта 1-го порядку **(метод Ейлера)**.

Найефективнішими і найчастіше застосовуваними методами розв'язування задачі Коші є методи Рунге-Кутта.

Методи Рунге-Кутта легко поширюються на системи диференціальних рівнянь і на диференціальні рівняння вищих порядків. Останні потрібно привести до систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути:

- методи Хеммінга та Башфорта;
- метод Адамса;
- метод Мілна.

ТЕМА 4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТАБЛИЧНИХ ДАНИХ

Мета: оброблення експериментальних даних з використанням інтерполяційних формул.

Будь-якому фахівцеві в своїй практичній діяльності доводиться вивчати залежності між різними параметрами досліджуваних об'єктів, процесів і систем. З усіх способів запису залежностей найбільш зручним є аналітичний спосіб запису залежності у вигляді функції.

Однак на практиці фахівець найчастіше отримує залежності між досліджуваними параметрами експериментально. У цьому випадку ставиться натурний експеримент, змінюються значення параметрів на вході системи, вимірюються значення параметрів на виході системи. Результати вимірювань заносяться в таблицю.

Таким чином, в результаті проведення натурного експерименту отримуємо залежності між досліджуваними параметрами у вигляді таблиці, тобто, отримуємо так звану табличну функцію.

Потім за цією табличною функцією потрібно здійснити науково-дослідні розрахунки. У розрахунковій практиці дослідника часто виникають задачі знайти значення функції для аргументів, які відсутні в таблиці. Такі задачі називаються задачами інтерполяції або екстраполювання. Для проведення яких застосовують інтерполяційний многочлен Лагранжа, схему Ейткіна, перший та другий інтерполяційні многочлени Ньютона. Поряд з виведеними спеціально для початку і кінця таблиці кінцевих різниць першою і другою інтерполяційними формулами Ньютона є ще декілька формул, розрахованих на їх застосування в центральній частині таблиці, тому вони називаються **центральними інтерполяційними формулами** – це інтерполяційні формули Гаусса, Стірлінга, Бесселя.

При інтерполюванні функцій з великою кількістю вузлів інтерполяційний поліном має високий степінь, що спричиняє коливання полінома на проміжках між вузлами інтерполювання. Щоб зменшити степінь інтерполяційного полінома, вузли інтерполювання можна розбити на групи і будувати інтерполяційні поліноми з меншою кількістю вузлів. Але в цьому разі на стиках між вузлами порушуються аналітичні властивості інтерполяційного полінома, з’являються точки розриву похідних. Позбутися цих недоліків при інтерполюванні можна за допомогою ***сплайнів***. Сплайн на проміжку між вузлами інтерполювання є поліномом невисокого степеня. На всьому відрізку інтерполювання сплайн – це функція, склеєна з різних частин поліномів заданого степеня, в місцях сполучення яких перша та друга похідні неперервні. Для їх побудови необхідно задати коефіцієнти, які однозначно визначають поліном у проміжку між двома точками. Наочне уявлення про сплайни дають криві, побудовані за допомогою лекал, а також трамвайні та залізничні колії. Найпростіший приклад сплайнів – ламані.

Апроксимація чи ***наближення*** – науковий метод, що полягає в заміні одних об'єктів іншими, близькими до вихідних, але простішими. Апроксимація дозволяє дослідити числові характеристики та якісні властивості об'єкта, зводячи задачу до вивчення простіших чи зручніших об'єктів (наприклад таких, характеристики яких легко обчислюються або властивості яких уже відомі). Прикладами апроксимації в математиці є заміна кривих ліній ламаними, ірраціональних чисел – раціональними, неперервних функцій – многочленами та багато інших.

Часто виникає необхідність замінити дискретну функцію $f(x)$ неперервною $\varphi(x)$. Наприклад, є набір точок, і необхідно знайти аналітичний вираз такої неперервної функції, яка б охоплювала усі задані точки. Але виконати таку задачу не дуже просто і шукана функція $\varphi(x)$ може мати занадто складний аналітичний вигляд. Через це, проводячи апроксимацію, допускають деяке незначне відхилення точок шуканої функції $\varphi(x)$ від заданих $f(x)$. Введення такого відхилення дозволяє значно спростити пошук аналітичної функції або спростити її вигляд. Також це дає можливість власноруч вибрати загальний вигляд функції для апроксимації: поліном, тригонометрична, експоненціальна чи показникова функція та багато інших (рисунок 4.1).

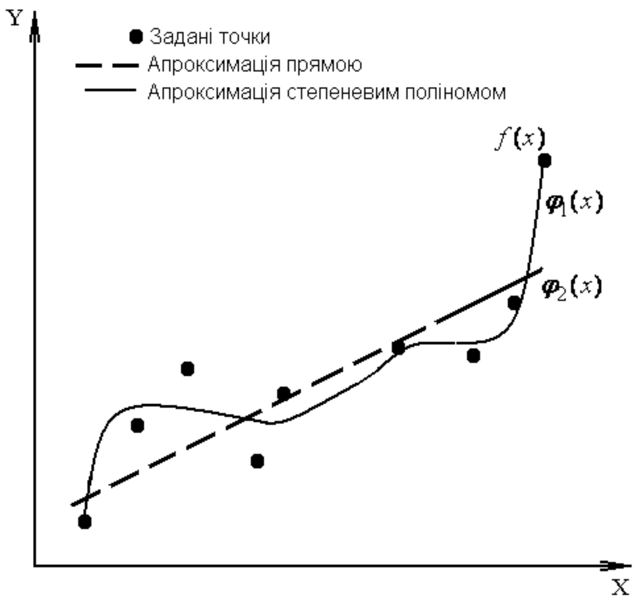

Рисунок 4.1 – Апроксимація функцій

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути:

- інтерполяційні формули Гаусса, Стірлінга, Бесселя;
- сплайн-інтерполяція: інтерполювання кубічними сплайнами; похибки наближення кубічними сплайнами; наближення таблично заданих функцій за допомогою сплайн-інтерполяції;
- апроксимація: метод найменших квадратів.

ТЕМА 5. ЧИСЕЛЬНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

Мета: застосування центральних інтерполяційних формул для чисельного диференціювання функції.

До чисельного диференціювання функцій вдаються тоді, коли функцію задано таблично, а тому методи чисельного диференціювання просто незастосовні, або коли функцію задано досить складним аналітичним виразом і тому обчислення похідних пов’язане із значними труднощами.

Щоб побудувати формули чисельного диференціювання, задану на відрізку $[a, b]$ функцію f замінюють відповідним інтерполяційним многочленом $P(x)$. Тоді

$$f(x) = P(x) + R(x; f), \tag{5.1}$$

де $R(x; f)$ – залишковий член інтерполяційної формули.

Якщо функція f на $[a, b]$ має похідні до k-го порядку включно, то, диференціюючи тотожність (5.1) за x, знаходять

$$\begin{aligned} &f'(x) = P'(x) + R'(x; f),\\ &f''(x) = P''(x) + R''(x; f),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &f^{(k)}(x) = P^{(k)}(x) + R^{(k)}(x; f). \end{aligned}$$

За наближені значення похідних від функції f беруть перші доданки правих частин цих рівностей:

$$f'(x) \approx P'(x), f''(x) \approx P''(x), f^{(k)}(x) \approx P^{(k)}(x), x \in [a,b]. \tag{5.2}$$

Тоді залишкові члени $r_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., k)$ формул чисельного диференціювання (5.2) дорівнюватимуть похідним від залишкового члена інтерполяційної формули (5.1), тобто

$$r_i(x) \equiv f^{(i)}(x) - P^{(i)}(x). \tag{5.3}$$

Якщо інтерполяційний многочлен P на певній ділянці з достатньою точністю наближає функцію f, а сама функція f досить гладка і змінюється плавно на цій ділянці, то можна сподіватись, що при досить малому кроці інтерполювання похідні інтерполяційного многочлена також мало відрізнятимуться від похідних функції f. Проте не потрібно забувати, що із зростанням порядку похідної точність чисельного диференціювання здебільшого різко спадає. *Тому на практиці формули чисельного диференціювання для похідних, вищих від другого порядку, застосовують досить рідко.*

Формули чисельного диференціювання за першою та другою інтерполяційними формулами Ньютона для функції y у точці $x = x_0$ використовують лише одностороннє значення функції при $x > x_0$. Відносно більшу точність мають симетричні формули диференціювання, що враховують значення цієї функції y як при $x > x_0$, так і при $x < x_0$. Ці формули зазвичай називаються центральними формулами диференціювання, що основані на інтерполяційних формулах Гаусса, Бесселя та Стірлінга.

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути:

- інтерполяційні формули Гаусса, Стірлінга, Бесселя;
- чисельне диференціювання функції, основане на інтерполяційних формулах Гаусса, Стірлінга, Бесселя.

ТЕМА 6. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ

Мета: обчислення визначених інтегралів з використанням чисельного інтегрування функцій.

Формула Ньютона-Лейбніца досить зручна для обчислення визначених інтегралів. Однак на практиці дуже рідко вдається обчислити точно визначений інтеграл чи проінтегрувати звичайне диференціальне рівняння. У багатьох випадках первісну функцію не можна знайти аналітично чи вона має досить складний і незручний для обчислень вигляд (навіть якщо вона є елементарною), що ускладнює обчислення інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца або воно взагалі стає неможливим. Часто на практиці підінтегральна функція задається таблично або графічно, що також унеможливлює використання аналітичних методів.

У всіх згаданих випадках для обчислення визначеного інтеграла використовують чисельні методи. Чисельне обчислення однорідних інтегралів називається механічною квадратурою, а коли розмірність інтеграла більша одиниці – механічною кубовою. Відповідно формули ***називають квадратурними*** та ***кубатурними***. Особливо важливе значення мають квадратурні формули – методи чисельного інтегрування функцій, в яких для знаходження наближеного значення визначеного інтеграла використовуються значення підінтегральної функції та її похідних у скінченній кількості точок, що належать переважно проміжку інтегрування.

До інтерполяційних квадратурних формул належать формули Ньютона-Котеса, Гаусса, Чебишева. Вузли цих формул рівновіддалені. Формули Ньютона-Котеса, Гаусса, Чебишева різняться степенями інтерполяційних многочленів. Щоб не мати справу з многочленами високих степенів, зазвичай розбивають проміжок інтегрування на окремі ділянки, а потім використовують формули Ньютона-Котеса, Гаусса, Чебишева з невисокими степенями на кожній ділянці, далі додають отримані результати. Це створює так звані складені формули.

Необхідність вибору кроку інтегрування h виникає тоді, коли задано точність обчислення ε. Одним із способів розв'язання цієї задачі є **вибір кроку інтегрування за оцінкою залишкового члена.** Як відомо, точне значення інтеграла визначають за формулами лівих і правих прямокутників, якщо підінтегральна функція стала; середніх прямокутників і трапецій, якщо функція лінійна, і за формулою Сімпсона, якщо підінтегральною функцією є многочлен степеня, не вищого від третього.

Точність квадратурної формули характеризується порядком залишкового члена $R(f)$ відносно степеня кроку інтегрування h. Крім того, залишковий член квадратурних формул залежить від кроку інтегрування і

$R(f)\to 0\ (h\to 0)$. Кажуть, що залишковий член $R(f)$ має порядок p (p – натуральне число), якщо існує скінченна границя:

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(f)}{h^p}=M\neq 0.$$

Це записують так: $R(f)=O(h^p)$.

Відомо, що залишкові члени формул лівих і правих прямокутників мають перший порядок, середніх прямокутників і трапецій – другий, а Сімпсона – четвертий. Квадратурну формулу вважають тим точнішою, чим більший порядок її залишкового члена $R(f)$.

Іноді оцінити залишковий член квадратурної формули дуже важко або й неможливо, наприклад тоді, коли функцію задано графічно або таблично, і аналітичний вираз її невідомий, або коли функцію задано складним аналітичним виразом і її похідні важко оцінити. Але якщо похідну певного порядку знайдено, то оцінити її за модулем на відрізку інтегрування завжди можна, побудувавши за допомогою ПК таблицю значень похідної. Проте оцінити залишковий член $R(f)$ квадратурної формули можна й тоді, коли не вдається оцінити безпосередньо модуль похідної функції. Важливо лише знати порядок залишкового члена $R(f)$ відносно кроку інтегрування h. Для цього використовують **метод подвійного перерахування**.

Під час підготовки до цієї теми необхідно розглянути:

- формули Ньютона-Котеса вищих порядків (правило трьох восьмих);
- квадратурні формули Чебишева та Гаусса;
- вибір кроку інтегрування за оцінкою залишкового члена;
- метод подвійного перерахування.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Квадратурна формула правих прямокутників має порядок точності:
   а) перший;
   б) другий;
   в) третій;
   г) четвертий.

2. Обчислення нелінійного рівняння за методом хорд можливе у випадку:
   а) лінійності функції;
   б) існування однієї незалежної змінної;
   в) виконання умови фіксованого кінця кривої функції;
   г) рівновіддаленого розташування вузлів.

3. Найпоширенішим методом проведення апроксимації функції є:
   а) метод Ньютона;
   б) метод половинного ділення;
   в) метод найменших квадратів;
   г) метод хорд.

4. Квадратурна формула середніх прямокутників має вигляд:
   а) $I \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) + R$;
   б) $I \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + R$;
   в) $I \approx \frac{b-a}{n}\left(y_1 + y_2 + ... + y_n\right) + R$;
   г) $I \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) + R$.

5. Похибка квадратурної формули парабол обчислюється за виразом:
   а) $I \approx \frac{b-a}{n}\left(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) + R$;
   б) $R \le \frac{(b-a)h^4}{180}\max_{[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$;
   в) $\Delta = \sqrt{\frac{E}{n+1}}$;
   г) $\left|b_k - a_k\right| < \varepsilon$.

6. Квадратурна формула лівих прямокутників має порядок точності:

а) перший;
б) другий;
в) третій;
г) четвертий.

7. Обчислення нелінійного рівняння за методом дотичний можливе, якщо існує:

а) постійність знаків похідних першого та другого порядку функції;
б) вибірка випадкових чисел;
в) невелике додатне число;
г) одна незалежна змінна.

8. Обчислення багатовимірних нелінійних систем здійснюють за допомогою:

а) методів прямокутників;
б) методів Ньютона та простої ітерації;
в) метода Гаусса;
г) метода січних.

9. Для методу Ньютона у випадку багатовимірних нелінійних систем:

а) не залежить від числа змінних;
б) область збіжності збільшується;
в) область збіжності зменшується;
г) залишається без змін.

10. Формули Ньютона-Котеса утворені на основі:

а) складених формул многочленів невисокого степеня;
б) лінійних рівнянь;
в) раціональних чисел;
г) первісних функцій.

11. В результаті обробки експериментальних даних на проміжку $[2; 9]$ з $h = 1$ отримано інтерполяційний многочлен:

а) другого степеня;
б) четвертого степеня;
в) сьомого степеня;
г) шостого степеня.

12. Квадратурна формула лівих прямокутників має вигляд:

а) $I \approx h\left(\dfrac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) + R$;

б) $I \approx \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} y_i + R$;

в) $I \approx \dfrac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_m\right) + 4\left(y_1 + ... + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + ... + y_{2m-2}\right)\right] + R$;

г) $R \le \dfrac{h \cdot (b-a)}{2}\max\limits_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

13. Похибка квадратурної формули середніх прямокутників обчислюється за виразом:

а) $I \approx \dfrac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i + R$;

б) $R \le \dfrac{h^2(b-a)}{24}\max\limits_{[a;b]}\left|f''(x)\right|$;

в) $R \le \dfrac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$;

г) $\left|y_n^* - y_n\right| \le \varepsilon$.

14. Інтерполяційна формула Лагранжа дає можливість знайти вираз інтерполяційного многочлена:

а) у вигляді таблиці;
б) у вигляді графіка;
в) в аналітичному вигляді;
г) у вигляді визначника Вандермонда.

15. Квадратурна формула середніх прямокутників має порядок точності:

а) перший;
б) другий;
в) третій;
г) четвертий.

16. Для обчислення значення функції першу інтерполяційну формулу Ньютона застосовують у випадку, коли значення аргументу лежить:

а) за межами відрізка інтерполювання;

б) в центрі відрізка інтерполювання;

в) ближче до початку відрізка інтерполювання;

г) ближче до кінця відрізка інтерполювання.

17. Зменшити степінь інтерполяційного многочлена можна за допомогою:

а) сплайнів;

б) метода хорд;

в) метода простої ітерації;

г) метода Сімпсона.

18. За сплайн-інтерполяцією система алгебраїчних рівнянь має розв'язок, якщо:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих;

б) перша похідна функції дорівнює нулю;

в) функція визначена;

г) похідні функції першого та другого порядку зберігають постійних знак.

19. В многочлені Лагранжа кожний з доданків:

а) є многочленом, порядки яких з віддаленням від початку підвищуються на одиницю;

б) є многочленом n-го степеня і всі доданки між собою рівноправні;

в) лінійні функції;

г) експоненціальні функції.

20. Інтерполяційний многочлен Лагранжа використовують у випадку:

а) рівновіддаленого розташування вузлів інтерполювання;

б) нерівновіддаленого розташування вузлів інтерполювання;

в) рівновіддаленого та нерівновіддаленого розташування вузлів інтерполювання;

г) на початку відрізка інтерполювання.

21. За методом половинного ділення обчислення припиняють у випадку, коли:

а) головний елемент рівняння не дорівнює нулю;

б) довжина останнього звуженого відрізка менша заданої точності;

в) перша похідна функції дорівнює нулю;

д) існує постійність знаків похідних функції першого та другого порядків.

22. Квадратурна формула парабол має вигляд:

а) $\left|y_n^* - y_n\right| \le \varepsilon$;

б) $I \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_m\right) + 4\left(y_1 + \ldots + y_{2m-1}\right) + 2\left(y_2 + \ldots + y_{2m-2}\right)\right] + R$;

в) $I \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) + R$;

г) $I \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i + R$.

23. Похибка квадратурної формули лівих прямокутників обчислюється за виразом:

а) $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$;

б) $R \le \frac{h^2(b-a)}{24}\max_{[a;b]}\left|f''(x)\right|$;

в) $R \le \frac{(b-a)h^2}{12}\max_{[a,b]}\left|f''(x)\right|$;

г) $R \le \frac{h\cdot(b-a)}{2}\max_{[a,b]}\left|f'(x)\right|$.

24. Точність квадратурної формули характеризується:

а) порядком залишкового члена відносно степеня кроку інтегрування;

б) довжиною інтервалу невизначеності;

в) порядком многочлена;

г) розташуванням початкового наближення.

25. Методи розв’язання задачі Коші поділяються на:

а) подвійного перерахування;

б) однокрокові та багатокрокові;

в) лінійні;

г) ітераційні.

26. До однокрокових методів розв’язання задачі Коші відносять:

а) метод половинного ділення;

б) методи Ейлера та Рунге-Кутта;

в) методи Мілна, Адамса;

г) метод Гаусса.

27. Квадратурна формула трапеції має порядок точності:

а) десятий;

б) другий;

в) третій;

г) п’ятий.

28. Оцінення похибки за методом Рунге-Кутта 4-го порядку передбачає застосування:

а) послідовного наближення;

б) збільшення кроку інтегрування;

в) подвійного перерахунку;

г) визначеності функції.

29. Обчислення нелінійного рівняння за методом січних можливе, якщо:

а) перша похідна функції не дорівнює нулю;

б) є вибірка випадкових чисел;

в) існує лінійність функції;

г) існує одна незалежна змінна.

30. Для інтерполювання функції за інтерполяційними формулами Ньютона використовують:

а) табличні різниці n-го порядку;

б) диференціальні рівняння другого порядку;

в) початкові умови;

г) крайові умови.

31. Залишкова середня квадратична похибка апроксимації обчислюється за виразом:

а) $\Delta = \sqrt{\dfrac{E}{n+1}}$;

б) $|b_k - a_k| < \varepsilon$;

в) $\left|y_n^* - y_n\right| \le \varepsilon$;

г) $\left|y_n^* - y(x_n)\right| \approx \dfrac{y_n^* - y_n}{15}$.

32. Похибка квадратурної формули трапеції обчислюється за виразом:

а) $\left|y_n^* - y_n\right| \le \varepsilon$;

б) $R \le \dfrac{(b-a)h^4}{180} \max\limits_{[a,b]} \left|f^{(4)}(x)\right|$;

в) $R \le \dfrac{(b-a)h^2}{12} \max\limits_{[a,b]} \left|f''(x)\right|$;

г) $\left|y_n^* - y(x_n)\right| \approx \dfrac{y_n^* - y_n}{15}$.

33. Квадратурна формула Сімпсона має порядок точності:

а) шостий;
б) другий;
в) перший;
г) четвертий.

34. Залишковий член інтерполяційної формули Лагранжа характеризує:

а) точність наближення функції інтерполяційним многочленом;
б) лінійність функції;
в) неперервність функції;
г) рівномірний закон розподілу випадкових чисел.

35. Обчислення нелінійного рівняння за методом половинного ділення можливе у випадку:

а) функція визначена на проміжку моделювання;
б) значення функції дорівнює нулю;
в) виконання умови фіксованого кінця кривої функції;
г) існує одна незалежна змінна.

36. Другу інтерполяційну формулу Ньютона застосовують у випадку, коли значення аргументу лежить:

а) ближче до кінця відрізка інтерполювання.
б) по середині відрізка інтерполювання;
в) за межами відрізка інтерполювання;
г) ближче до початку відрізка інтерполювання;

37. Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо невідома функція:

а) залежить від двох і більшої кількості незалежних змінних;

б) залежить тільки від однієї незалежної змінної;

в) залежить від жорстких обмежень на характер функції;

г) залежить від порядку диференціального рівняння.

38. Апроксимація – це:

а) незначне відхилення точок шуканої функції від заданих точок функцій;

б) табличні різниці n-го порядку;

в) послідовне наближення функції;

г) складені формули многочленів невисокого степеня.

39. Похибка квадратурної формули правих прямокутників обчислюється за виразом:

а) $R \le \frac{(b-a)h^2}{12} \max\limits_{[a,b]} \left| f''(x) \right|$;

б) $\left| y_n^* - y_n \right| \le \varepsilon$;

в) $R \le \frac{h \cdot (b-a)}{2} \max\limits_{[a,b]} \left| f'(x) \right|$;

г) $R \le \frac{(b-a)h^4}{180} \max\limits_{[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$.

40. Квадратурна формула трапеції має вигляд:

а) $I \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right) + R$;

б) $I \approx \frac{b-a}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i + R$;

в) $I \approx \frac{h}{3}\left[\left(y_0 + y_m \right) + 4\left(y_1 + ... + y_{2m-1} \right) + 2\left(y_2 + ... + y_{2m-2} \right) \right] + R$;

г) $R \le \frac{h \cdot (b-a)}{2} \max\limits_{[a,b]} \left| f'(x) \right|$.

41. Для інтерполювання функції за другою інтерполяційною формулою Ньютона виберіть значення аргументу на проміжку $[4;12]$, якщо $h=1$:

а) $x=1{,}98$;

б) $x=8{,}2$;

в) $x=11{,}7$;

г) $x=4{,}1$.

42. Використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа, за умови, що функцію задана таблично,

i	0	1
x_i	2	3
y_i	7	8

отримано:

а) $L_1(x)=2x^2+7$;

б) $L_2(x)=2x^2+4x+5$;

в) $L_1(x)=x+5$;

г) $L_3(x)=3{,}2x^3-6x^2+3x+6$.

43. Використовуючи квадратурну формулу лівих прямокутників, за умови, що $h=0{,}2$ і функція задана таблично,

i	0	1	2	3	4	5
y_i	5	5,4	5,8	6,2	6,6	7

отримано такі значення:

а) $I=5{,}8$;

б) $I=7{,}28$;

в) $I=0{,}68$;

г) $I=5{,}356$.

44. Користуючись методом Рунге-Кутта 1-го порядку, за умови, що $y(1)=1$, $y'=2x+y$, $h=0{,}1$, $[1;1{,}2]$ отримано:

а) $x_2=7{,}2;\quad y_2=10{,}01$;

б) $x_2=5{,}22;\quad y_2=18{,}05$;

в) $x_2=0{,}12;\quad y_2=8{,}35$;

г) $x_2=1{,}2;\quad y_2=1{,}65$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Квєтний Р. Н. Методи комп’ютерних обчислень : навчальний посібник / Квєтний Р. Н. – Вінниця : ВДТУ, 2001. – 148 с.

2. Брановицька С. В. Обчислювальна математика та програмування : підручник / Брановицька С. В., Медведєв Р. Б., Фіалков Ю. Я. – К. : ІВЦ Видавництво «Політехніка», 2004. – 220 с.

3. Копченова Н. В. Вычислительная математика в примерах и задачах : учебное пособие / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М. : Лань, 2008. – 368 с.

4. Киреев В. И. Численные методы в примерах и задачах: учебн. пособие / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – М. : Высшая школа, 2006. – 480 с.

5. Вержбицкий В. М. Основы численных методов : учебник для вузов / Вержбицкий В. М. – М. : Высшая школа, 2002. – 840 с.

6. Турчак Л. И. Основы численных методов : учебное пособие / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. – М. : Физматлит, 2005. – 304 с.

7. Фельдман Л. П. Чисельні методи в інформатиці : підручник / Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. – К. : Видавнича група BHV. – 2006. – 473 с.

8. Шахов Ю. Н. Численные методы : учебное пособие / Ю. Н. Шахов, Е. И. Деза. – М. : Книжный дом «Либроком», 2012. – 248 с.

9. Бахвалов Н. С. Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. – М. : БИНОМ «Лаборатория знаний», 2003. – 632 с.

10. Крилик Л. В. Обчислювальна математика. Інтерполяція та апроксимація табличних даних : начальний посібник / Крилик Л. В., Богач І. В., Прокопова М. О. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 111 с.

11. Формалев В. Д. Численные методы : учебник для вузов / В. Д. Формалев, Д. Л. Ревизников. – М. : Физмалит, 2006. – 400 с.

12. Мамчук В. І. Числові методи : навчальний посібник / Мамчук В. І. – Київ : НАУ, 2015. – 388 с.

13. Колесницький О. К. Чисельні методи : навчальний посібник / Колесницький О. К, Арсенюк І. Р., Месюра В. І. – Вінниця : ВНТУ, 2017. – 130 с.

14. Чисельні методи в комп’ютерних науках : навчальний посібник. Т. 2 / [В. А. Андруник, В. А. Висоцька, В. В. Пасічник та ін.]. – Львів : Новий Світ-2000, 2018. – 536 с.

15. Методичні вказівки до виконання самостійних робіт з дисциплін «Чисельні методи в мікро- та наносистемній техніці» та «Обчислювальна математика» для студентів денної і заочної форм навчання спеціальностей «Мікро- та наносистемна техніка» та «Електроніка» / Уклад. : Л. В. Крилик, О. О. Селецька. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 33 с.

16. Крилик Л. В. Чисельні методи. Чисельне інтегрування функцій : навчальний посібник / Крилик Л. В., Богач І. В., Лісовенко А. І. – Вінниця : ВНТУ, 2019. – 74 с.

Навчальне видання

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання самостійних робіт з дисципліни «Чисельні методи» для студентів денної і заочної форм навчання спеціальності «Комп'ютерні науки»

Укладачі: Людмила Вікторівна Крилик
Андрій Анатолійович Яровий
Любов Михайлівна Ваховська

Рукопис оформлено *Л. Крилик*

Редактор *Т. Старічек*

Оригінал-макет виготовив *О. Ткачук*

Підписано до друку 23.11.2020 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman.
Друк різографічний. Ум. друк. арк 1,44.
Наклад 40 (1–21) пр. Зам. № 2020-097.

Видавець та виготовлювач
інформаційний редакційно-видавничий центр.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
E-mail: kivc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.