

## МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ НЕЧІТКИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

ВЯЧЕСЛАВ ДЖЕДЖУЛА <sup>1</sup>, ПРИНА ЄПІФАНОВА <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Вінницький національний технічний університет  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2740-0771>  
e-mail: djedjulavv@gmail.com

<sup>2</sup> Вінницький національний технічний університет  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0391-9026>  
e-mail: epifanovairene@gmail.com

*В роботі узагальнено науково-методичні підходи до розробки економіко-математичних моделей на основі теорії нечіткої логіки та лінгвістичної змінної. Прогнозування та підтримка прийняття рішень за допомогою нечітких математичних моделей дозволяє узагальнити та сконцентрувати експертну інформацію, здійснити прогнозування перебігу процесів різних сфер з урахуванням кількісних та якісних факторів. У порівнянні з відомими експертними методами теорія нечіткої логіки має низку переваг, головними з яких є автоматизація розрахунків за рахунок використання математичних пакетів. Обґрунтовано, що побудова функцій належності є одним з головних етапів побудови нечітких математичних моделей. Розглянуто основні способи, якими можна будувати функції належності залежно від способу отримання інформації. Для побудови функцій належності використовують два методи: залучення багатьох експертів і залучення одного експерта. Незважаючи на те, що в математичних пакетах побудова функцій належності автоматизована, першочерговий вибір форми і характеристик повинен здійснюватися розрахунковим шляхом розглянутими в роботі методами. Узагальнено найпоширеніші функції належності, до яких належать трикутна, трапецієвидна, гаусова, сигмовидна. Наведено приклад побудови функцій належності для умовної лінгвістичної змінної.*

**Ключові слова:** нечітка логіка, функції належності, фазифікація, дефазифікація, моделювання

DOI: 10.31891/mdes/2021-1-5

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Прогнозування та підтримка прийняття рішень за допомогою нечітких математичних моделей дозволяє узагальнити та сконцентрувати експертну інформацію, здійснити прогнозування протікання процесів технічної, економічної, соціальної сфер, де фактори можуть мати як якісні так і кількісні характеристики. Прогнозування ефективності вкладення коштів у заходи з енергозбереження, визначення рівня інноваційного потенціалу підприємства, прогнозування виходу біогазу з біореактора – це та багато інших процесів дозволяє моделювати теорія нечіткої логіки та лінгвістичної змінної. Цей метод як взаємозв'язана сукупність математичних моделей, алгоритмів й формалізованих методик дозволяє використовувати експертно-лінгвістичну інформацію для прогнозування характеристики певного проекту або процесу та здійснювати порівняння з альтернативними варіантами.

### ОГЛЯД ПРОВЕДЕНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ФОРМУЛЮВАННЯ ЦІЛЕЙ

Засновником теорії нечіткої логіки та лінгвістичної змінної вважають професора Л. Заде [1]. Розвиток теорії надали такі вчені, як Т. Сааті [2], О.П. Ротштейн [3], С.Д. Штовба [4], Матвійчук А. В. [5] та багато інших. Дана теорія дозволяє уникати громіздкості і непотрібної точності у системах, де необхідним є отримання результату із врахуванням багатьох факторів, які традиційними математичними теоріями поєднати дуже важко. У порівнянні з відомими експертними методами теорія нечіткої логіки має низку переваг, головними з яких є автоматизація розрахунків за рахунок використання математичних пакетів, наприклад Matlab, Scilab; можливість навчання моделей, використання кількісних і якісних властивостей об'єкта моделювання, отримання рішення для різних споріднених задач на основі однієї бази знань наповненої експертною, аналітичною та експериментальною інформацією та інші.

Метою цієї роботи є узагальнення науково-методичних підходів до розробки економіко-математичних моделей на основі теорії нечіткої логіки та лінгвістичної змінної.

### ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ ДОСЛІДЖЕННЯ

Нечіткою множиною  $\tilde{A}$  на універсальній множині  $U$  називається сукупність пар  $(\mu_A(u), u)$ , де  $\mu_A(u)$  – ступінь належності елемента  $u \in U$  до нечіткої множини  $\tilde{A}$ . Належність елемента до універсальної множини оцінюється числом з діапазону  $[0, 1]$ . Найвищий ступінь належності відповідає числу 1.

Лінгвістичною змінною називається змінна, значеннями якої є слова або словосполучення мови. Множина усіх можливих значень лінгвістичної змінної називається терм-множиною, кожен елемент терм-множини називається термом [1-8].

Функцією належності називається функція, яка дозволяє обчислити ступінь належності довільного елемента універсальної множини до нечіткої множини [1-8].

Найпоширенішими функціями належності є трикутна, трапецієвидна, гаусова, сигмовидна (рис. 1).

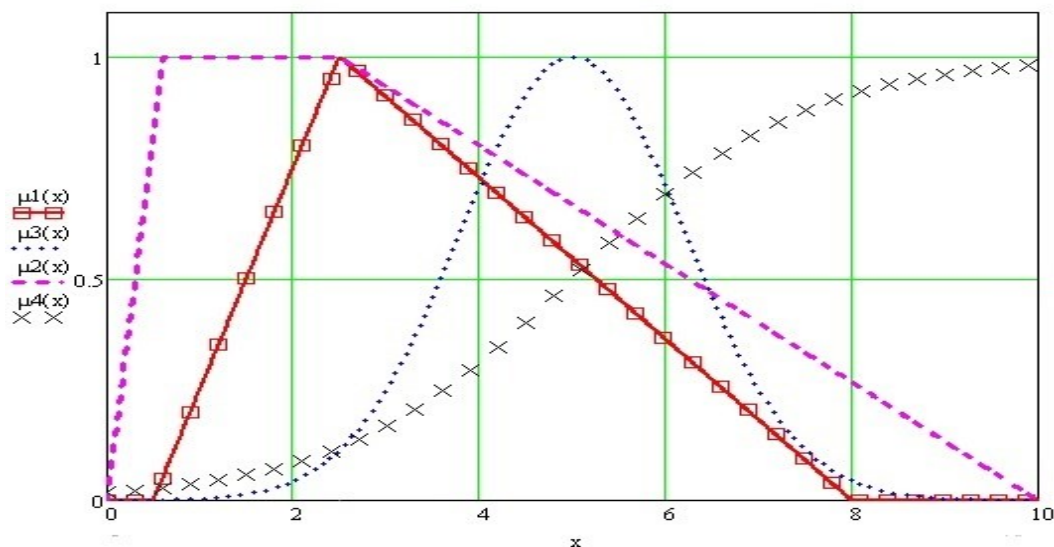


Рис. 1. Графіки найпоширеніших функцій належності (розроблено на основі [1-3]):

- μ1(x) - трикутна, при  $a = 0,5; b = 2,5; c = 8$ ;
- μ2(x) - трапецієвидна, при  $a = 0; b = 0,6; c = 2,5; d = 10$ ;
- μ3(x) - гаусова, при  $b = 5; c = 12$ ;
- μ4(x) - сигмовидна, при  $a = 0,8; c = 5$ .

Задаються функції належності таким чином:

трикутна форма функції належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & u \leq a \text{ або } u \geq c \\ \frac{u-a}{b-a}, & a < u \leq b \\ \frac{c-u}{c-b}, & b < u \leq c \end{cases} \quad (1)$$

де  $(a, c)$  - носій нечіткої множини;

$b$  - координата максимуму;

- трапецієвидна форма функції належності:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & u \leq a \text{ або } u \geq d \\ \frac{u-a}{b-a}, & a \leq u \leq b \\ 1, & b \leq u \leq c \\ \frac{d-u}{d-c}, & c \leq u \leq d \end{cases} \quad (2)$$

де  $(a, d)$  - носій нечіткої множини;

$[b, c]$  - ядро нечіткої множини;

- гаусова форма функції належності:

$$\mu(x) = \exp\left(-\frac{(u-b)^2}{2xc^2}\right), \quad (3)$$

де  $b$  - координата максимуму;

$c$  - коефіцієнт концентрації;

- сигмовидна форма функції належності:

$$\mu(x) = \frac{1}{1+\exp(-a \times (u-c))} \quad (4)$$

де  $a$  - коефіцієнт крутизни;

$c$  - координата переходу через 0,5.

Метод побудови функцій належності передбачає фазифікацію нечітких оцінок факторів впливу. Етап фазифікації включає вибір нечітких термів для лінгвістичної оцінки факторів впливу, що задані на відповідних універсальних множинах.

Нечіткою множиною, за допомогою якої формалізується терм  $\tilde{S}$ , є сукупність пар [1-6]:

$$\tilde{S} = \left\{ \frac{\mu_S(u_1)}{u_1}, \frac{\mu_S(u_2)}{u_2}, \dots, \frac{\mu_S(u_n)}{u_n} \right\}, \quad (5)$$

де  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = U$  – універсальна множина, на якій задається нечітка множина;

$S \in U$ ;  $\mu_S(u_i)$  – ступінь належності елемента  $u_i \in U$  нечіткій множині  $\tilde{S}$ .

Розв'язання задачі фазифікації ґрунтується на ідеї розподілу ступенів належності універсальної множини згідно з їх рангами.

Для побудови функцій належності використовують два методи: залучення багатьох експертів і залучення одного експерта.

При побудові математичної моделі на базі інформації групи експертів рекомендується використовувати анкету опитування експерта (табл. 1).

Таблиця 1

Анкета опитування експерта

	$u_1$	$u_2$	...	$u_n$
$l_1$				
$l_2$				
...				
$l_n$				

Ступені належності нечіткій множині розраховуються за формулою [4]:

$$\mu_{l,j}(u_j) = \frac{1}{K} \times \sum_{k=1, K} b_{j,i}^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

де  $K$  – кількість експертів;

$b_{j,i}^k$  – думка  $k$ -го експерта про наявність у елемента  $u_i$  властивості нечіткої множини  $l_j$ .

Приймається, що експертні оцінки бінарні, тобто оцінка 1 позначає наявність у елемента  $u_i$  властивості нечіткої множини  $l_j$ , а 0 – на їх відсутність.

Після заповнення експертами анкет формується матриця результатів опитування експертів. Парні порівняння здійснюються за дев'ятибальною шкалою Сааті у матриці [2]. При використанні знань одного експерта формується матриця парних порівнянь. Ступені належності відповідають координатам власного вектору матриці парних порівнянь [4]. Обчислення власного вектору матриці парних порівнянь значно збільшує трудомісткість використання математичної моделі. Тому нами пропонується використовувати узгоджені парні порівняння.

У такому випадку потреби у пошуку власного вектору матриці немає [1-5] і ступені належності розраховують за формулою:

$$\mu(u_i) = \frac{1}{a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}}, \quad (7)$$

де  $a_{ij}$  – елементи матриці парних порівнянь.

Таблиця 2

Матриця парних порівнянь					
	$u_1$	$u_2$	...	$u_{n-1}$	$u_n$
$u_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n-1}$	$a_{1n}$
$u_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n-1}$	$a_{2n}$
...	...	...	...	...	...
$u_{n-1}$	$a_{n-11}$	$a_{n-12}$	...	$a_{n-1n-1}$	$a_{n-1n}$
$u_n$	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nn-1}$	$a_{nn}$

Примітка:  $a_{ij}$  – рівень переваги елемента  $u_i$  над  $u_j$  ( $i, j = 1, n$ ).

Детальніше розглянемо приклад побудови функцій належності для умовної лінгвістичної змінної  $A$ . Для лінгвістичної оцінки даного фактору використовується множина {низький, нижче середнього, середній, вище середнього, високий}. Універсальна множина, на якій задається ЛЗ « $A$ »  $U(A) = \{0,1\}$  балів. Матриця парних порівнянь для терму «низький» має вигляд :

$$A_H(L) = \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_1 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{4}{8} & \frac{2}{9} & \frac{1}{8} \\ u_2 & \frac{8}{7} & 1 & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ u_3 & \frac{8}{4} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ u_4 & \frac{8}{2} & \frac{7}{2} & \frac{4}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ u_5 & 8 & 7 & 4 & 2 & 1 \end{matrix} \quad (8)$$

Експертно задається лише нижній рядок матриці. За відомими елементами рядка можна знайти елементи інших рядків за формулою:

$$a_{i,j} = \frac{a_{kj}}{a_{ki}}, i, j, k = 1 \dots n. \quad (9)$$

Розраховані функції належності для терму «низький» зведемо у табл. 3.

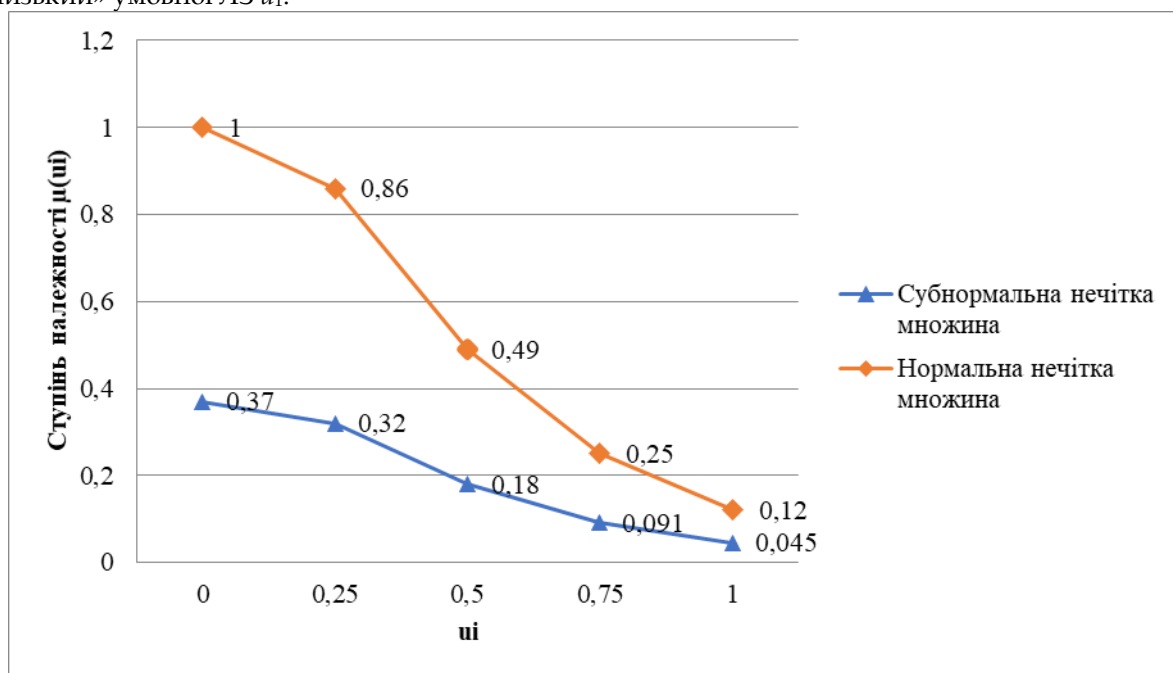
Нормальна нечітка множина отримана шляхом нормалізації: ділення на найбільший ступінь належності всіх ступенів належності.

Таблиця 3

Функції належності для терму «низький» ЛЗ

$u_i$	1	4	8	12	15
$\mu$ «низький» $u_i$ субнормальна нечітка множина	0,37	0,32	0,18	0,091	0,045
$\mu$ «низький» $u_i$ нормальна нечітка множина	1	0,86	0,49	0,25	0,12

На рис. 2 наведено графіки субнормальної і нормалізованої функцій належності для терму «низький» умовної ЛЗ  $d_1$ .

Рисунок 2. Графіки субнормальних і нормалізованих функцій належності для терму «низький» ЛЗ « $L$ »

Для використання програмних продуктів в обробці нечіткої інформації скористаємося стандартними функціями належності, взявши за основу форми і значення функцій, що отримані шляхом побудови «по точках».

## ВИСНОВКИ

Побудова функцій належності є одним з головних етапів побудови нечітких математичних моделей. Функції належності можна будувати двома основними способами, які залежать від способу отримання інформації: бази знань наповнювались експертної інформацією одного експерта чи багатьох. В математичних пакетах побудова функцій належності автоматизована, в залежності від форми функції і її характеристик будуються стандартні вбудовані функції. Але першочерговий вибір форми і характеристик повинен здійснюватися розрахунковим шляхом наведеними вище методами.

## REFERENCES

1. Zade L. Poniatye lynchvystycheskoi peremennoi y ee prymerenye k pryniatyiu pryblzhennykh resheniy. M. : Myr, 1976. 167 s.
2. Saaty T. L. Vzaymodeistviye v tekhnicheskyykh systemakh. Tekhnicheskaya kybernetyka. 1979. № 1. S. 68–84.
3. Rotshtein A. P., Shtovba S. Nechetkaia nadezhnost alhorytmicheskyykh protsessov. Vynnytsa : Kontynent – PRYM, 1997. 142s.
4. Shtovba S. D. Proektyrovanye nechetkykh system sredstvamy Matlab. M. : Horiachaia lynyia - Telekom, 2007. 288 s.
5. Matviichuk A. V. Shtuchnyi intelekt v ekonomitsi: neironni merezhi, nechetka lohika : monohr.. – K. : KNEU, 2011. 439 c.
6. Nedosekyn A. O. Fynansovyi menedzhment na nechetkykh mnozhestvakh : monohrafiya. M. : Audyt y fynansovyi analiz, 2003. 184 s.
7. Pankevych O. D., Shtovba S. D. Diahnostuvannya trishchyn budivelnnykh konstruksii za dopomohoiu nechetkykh baz znan : monohr. Vinnytsia : UNIVERSUM-Vinnytsia, 2005. 108 s.
8. Dylyhenskyi N. V., Dymova L. H., Sevastianov P. V. Nechetkoe modelyrovanye y mnohokryteryalnaia optymizatsiya proyzvodstvennykh system v usloviakh neopredelennosti: tekhnolohiya, ekonomyka, ekolohiya. M. : Mashynostroenyie-1, 2004. 401 s.

## METHODICAL APPROACHES TO CONSTRUCTION OF FUNCTIONS OF FUZZY MATHEMATICAL MODELS

VIACHESLAV DZHEDZHULA <sup>1</sup>, IRYNA YEPIFANOVA <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Vinnytsia National Technical University

<sup>2</sup> Vinnytsia National Technical University

*The paper generalizes scientific and methodological approaches to the development of economic and mathematical models based on the theory of fuzzy logic and linguistic variable. Forecasting and decision support using fuzzy mathematical models allows to summarize and concentrate expert information, to predict the course of processes in various fields, taking into account quantitative and qualitative factors. In comparison with known expert methods, the theory of fuzzy logic has a number of advantages, the main of which are the automation of calculations through the use of mathematical packages, such as Matlab, Scilab; the ability to learn models, use quantitative and qualitative properties of the object of modeling, obtain solutions for various related problems on the basis of one knowledge base filled with expert, analytical and experimental information, and others. It is substantiated that the construction of membership functions is one of the main stages in the construction of fuzzy mathematical models. The main ways in which you can build membership functions depending on the method of obtaining information are considered. Two methods are used to construct membership functions: the involvement of many experts and the involvement of one expert. The method of constructing membership functions involves fassification of fuzzy estimates of influencing factors. The phase of fasification involves the choice of fuzzy terms for the linguistic assessment of the influencing factors given on the corresponding universal sets. The most common membership functions are generalized, which include triangular, trapezoidal, Gaussian, sigmoid. An example of an expert questionnaire is given, which should be used when building a mathematical model based on information from a group of experts. An example of constructing membership functions for a conditional linguistic variable is given. Calculating the eigenvector of a matrix of pairwise comparisons significantly increases the complexity of using a mathematical model. Therefore, we propose to use consistent pairwise comparisons. Despite the fact that in mathematical packages the construction of membership functions is automated, the primary choice of form and characteristics should be carried out by calculation methods considered in the work.*

*Keywords: fuzzy logic, membership functions, fassification, defasification, modeling*