УДК 621.316

П.Д. ЛЕЖНЮК, В.І. НАГУЛ, В.В. НЕТРЕБСЬКИЙ

ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ В ЗАДАЧАХ ТЕХНІЧНОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна

Анотація. Розглядаються аналогії між процесами в механічних і електричних системах, які зумовлені наявністю в природі принципу найменшої дії. Досліджується проблема створення умов самооптимізації електричних систем на основі принципу найменшої дії.

Аннотация. Рассматриваются аналогии между процессами в механических и электрических системах, обусловленные наличием в природе принципа наименьшего действия. Исследуется проблема создания условий самооптимизации электрических систем на основе принципа наименьшего действия.

Annotation. Analogies are examined between processes in the mechanical and electric systems, conditioned a presence in nature of principle of the least action. The problem of conditioning самооптимизации of the electric systems is probed on the basis of principle of the least action.

Ключові слова: принцип найменшої дії, аналогії в механічних і електричних системах, моделі самооптимізації.

ВСТУП

Процеси в електродинамічних системах супроводжуються внутрішнім і зовнішнім розсіюванням електроенергії, переважно у вигляді теплової енергії. Крім зменшення коефіцієнта корисної дії це призводить до ускладнення конструкції установки, тому що для створення нормальних умов її роботи необхідно відводити тепло, що виділяється. Очевидно, що виключенням є термоустановки, які призначені для перетворення електричної енергії в теплову. Проте як у першому випадку, так і в другому доцільно знати і враховувати загальні закономірності перетворення енергії (на рівні закону її збереження). Одним з підходів до дослідження цієї проблеми може бути оснований на використанні принципу найменшої дії (ПНД).

Завдяки роботам Фейнмана, Еддінгтона, Гельмгольца, Пуанкаре [1–4] ПНД як суто механічний принцип було поширено на істотно немеханічні процеси [5]. Таким чином він знайшов своє застосування для опису процесів електродинамічного, електромагнітного, теплового характеру тощо. В даній статті розглядається застосування ПНД щодо електродинамічних систем з метою забезпечення умов для їх самоорганізації або самооптимізації їх функціонування у відповідності з заданим критерієм оптимальності – втратами електроенергії.

ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ ЯК МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

Принцип найменшої дії в природних системах проявляється у вигляді механізму сомооптимізації. Під самооптимізацією систем розуміють природну автоматику, властивість систем та їх частин самоналагоджуватися таким чином, що забезпечується підвищення їх рівня з переходом до найбільш енергетично вигідного стану, або найбільш вигідного режиму функціонування. Перехід системи з одного стану в інший підпорядкований принципу найменшої дії (ПНД), який може бути сформульований наступним чином [1]. Після відхилення від оптимального стану функціонування в системі виникає зустрічна, протилежно скерована дія, тобто протидія, яка намагається повернути систему в оптимальний стан. Отже для будь-якої системи в довільний момент її існування нормою є якісний оптимум, глибина якого визначається мірою ідеальності системи.

ПНД зумовлює оптимальність функціонування будь-якої системи, а також розвиток, що скерований на підвищення міри її ідеальності. Для природних систем прояв даного явища є очевидним і необмеженим. Розвиток штучних систем у значній мірі здійснюється завдяки людині, тому вплив ПНД у даному випадку є опосередкованим. Під дією об'єктивної реальності, людина може лише прискорювати, або гальмувати розвиток системи, але його напрямок завжди скерований до оптимальності. Стримування розвитку штучної системи, підтримка її у статичному стані з часом за рахунок зниження міри ідеальності викликає її розпад, пов'язаний з неможливістю виконання покладених на неї функцій. З іншого боку, сприяння розвитку системи у природному напрямку забезпечує підвищення міри ідеальності. Для електричної системи характерною ознакою для оцінки близькості її до ідеального стану можуть бути втрати електроенергії в технологічному процесі. При досягненні ними певного значення (в напрямку збільшення) спочатку стає економічно недоцільна експлуатація системи, а потім і технічно неможливе її функціонування.

Для електричних кіл по аналогії з механічною системою введені кінетична і потенційна енергії, дисипативна функція Релея, узагальнені сили, відповідні непотенційним і недисипативним силам. На основі цих функцій обчислюються рівняння Лагранжа, які є рівняннями стану електричного кола. Згідно інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, що основується на ПНД, система характеризується функцією Лагранжа $L(g_1, g_2, ..., g_n; \dot{g}_1, \dot{g}_2, ..., \dot{g}_n; t)$, яка є певною функцією узагальнених координат g, узагальнених швидкостей $\dot{g}$ і часу t. Причому зміна стану системи між двома фіксованими положеннями від моменту $t=t_1$ до $t=t_2$ завжди відбувається таким чином, що надається стаціонарне значення (зазвичай мінімум) функціоналу [2]

$$\min Q = \int_{t_1}^{t_2} L(g, \dot{g}, t)dt, \qquad (1)$$

де L=K–П+D; K – кінетична енергія системи; П – потенційна енергія системи; D – енергія сил зовнішньої та внутрішньої дисипації.

Необхідні і достатні умови стаціонарності цього функціоналу («інтеграла дії»), що визначаються методами варіаційного числення, полягають у виконанні рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial g} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{g}}\right) = 0. \qquad (2)$$

Очевидно, що (1) є функціоналом, залежним від того, як змінюється стан системи в моменти $t_1 \le t \le t_2$. Розглянемо в (n+1) - мірному просторі *g, t* дві точки $M_1(g(t_1), t_1)$ і $M_2(g(t_2),t_2)$, зафіксувавши тим самим моменти t_1, t_2 і положення системи в ці моменти («швидкості» $\dot{g}$ в моменти t_1, t_2 не фіксуються). З точки M_1 в точку M_2 система може потрапити, рухаючись в просторі змінних *g , t* по будь-яких можливих траєкторіях («шляхах»), тобто по шляхах, що допускаються існуючими зв'язками (див. рис. 1 для випадку простору g_1, g_2, *t)*. Серед цих шляхів є оптимальний шлях *(*суцільна лінія). На ньому функції $g_j(t)$, $j = \overline{1, n}$ у будь-який момент часу відповідає рівнянням Лагранжа (1). Решта шляхів є неоптимальними (штрихові лінії).

Згідно принципу Гамільтона дія *Q* має на оптимальному шляху екстремальне в порівнянні з обхідними шляхами значення [5].

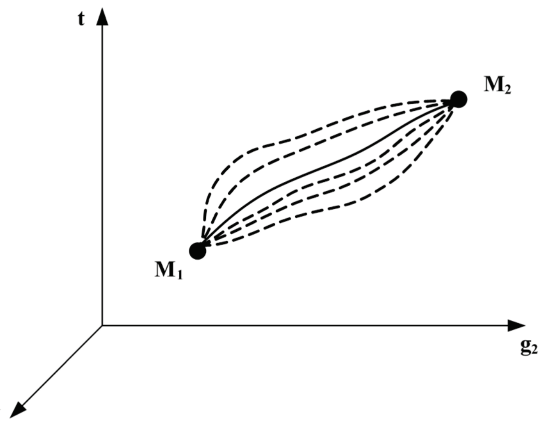

Рис. 1. Можливі траєкторії руху системи з однієї точки в іншу

Охарактеризуємо всі можливі шляхи однопараметричним сімейством функцій

$$g_j = g_j(t,\alpha), \quad t_1 \le t \le t_2, \quad |\alpha| \le \beta < \infty, \quad j = \overline{1,n},$$

де значенню $\alpha=0$ відповідає прямий шлях, а значенням $\alpha\neq 0$ - обхідні шляхи. Тоді дія (1), очевидно, є функцією параметра α:

$$Q(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} L\left[g_j(t,\alpha), \dot{g}_j(t,\alpha), t\right] dt.$$

Варіація Q при варіюванні параметра a

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial \alpha} d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \delta L \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial g_j} \delta g_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} \delta \dot{g}_j \right) dt, \tag{3}$$

Тобто δQ дорівнює сумі приростів, викликаних варіацією координат $\delta g_j(t,a)$ і швидкостей $\delta \dot{g}_j(t,a)$. Проінтегрувавши по частинах другий член в правій частині (3), отримуємо

$$\delta Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} \delta(\dot{g}_j) \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} - \frac{\partial L}{\partial g_j} \right) \delta g_j \cdot dt,$$

або, використовуючи переставність операцій варіювання по α і диференціюваннях по t

$$\delta(\dot{g}_j) = \delta\left[\frac{dg_j(t,\alpha)}{dt}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{d}{dt} g_j(t,\alpha)\delta\alpha = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} g_j(t,\alpha)\delta\alpha\right] = \frac{d}{dt}\delta g_j,$$

приходимо до рівності

$$\delta Q = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} \delta g_j \Bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{g}_j} - \frac{\partial L}{\partial g_j} \right) \delta g_j \cdot dt. \tag{4}$$

По побудові варіації $\delta g_j(a)$ рівні нулю в моменти t_1, t_2, тобто рівний нулю перший член в правій частині (4). Для прямого шляху за визначенням справедливі рівняння Лагранжа (1), тому рівний нулю також і другий член.

Таким чином, на оптимальному шляху $\delta Q = 0$. У цьому полягає суть принципу Гамільтона. Він є принципом найменшої дії, оскільки дія уздовж оптимального шляху має найменше порівняно з обхідними шляхами значення. Для більш загальних систем схоже твердження називається принципом Гамільтона-Остроградського [5].

ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІ АНАЛОГІЇ

Для електричного кола по аналогії з механічною системою вводяться кінетична і потенційна енергії, дисипативна функція Релея, узагальнені сили, що відповідають непотенційним і недисипативним силам. На основі введених функцій для електричної системи записуються рівняння Лагранжа, які є рівняннями її стану [6, 7].

Покажемо, яким чином рівняння аналітичної механіки можуть бути застосовані не тільки до механічних, але і до електричних і електромеханічних систем. Для електричного кола, в якому активний опір R, індуктивність L і ємність C з'єднані послідовно, згідно із законом Кірхгофа маємо

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = e(t)$$

або

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t). \tag{5}$$

де e(t) – е.р.с. в колі; q – заряд; $i = \frac{dq}{dt}$ – струм в колі.

Це рівняння є аналогом рівняння механічних коливань [6]

$$a\frac{d^2g}{dt^2} + b\frac{dg}{dt} + p\,g = G(t) ,$$

де G – сила, прикладена до механічної системи, a – маса, b – коефіцієнт дисипації (розсіювання) енергії, p – коефіцієнт пружності, g – узагальнена координата, що визначає положення механічної системи, на яку накладені зв‘язки .

При цьому індуктивності L відповідає інерційний коефіцієнт (узагальнена маса) a, активному опору R – дисипативний коефіцієнт b, коефіцієнту 1/C відповідає приведений коефіцієнт пружної сили p, заряд q відповідає узагальненій координаті g, е.р.с. e(t) – узагальненій силі G(t). Для кола, в якому активний опір, індуктивність і ємність з‘єднані паралельно згідно із законом Кірхгофа

$$\frac{u}{R} + \frac{1}{L}\int u dt + C\frac{du}{dt} = i(t) ,$$

де u(t) – прикладена напруга.

Почленно диференціюючи останній вираз, отримуємо

$$C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}u = \frac{di}{dt} . \qquad (6)$$

Тут ми маємо іншу систему аналогій, в якій координаті g відповідає напруга u і механічні коефіцієнти a, b, p замінюються на C, 1/R, 1/L. Узагальненій силі G(t) тут відповідає величина di/dt.

Дві електричні системи, що мають однакові (з точністю до позначень) рівняння, є двома різними електричними моделями однієї і тієї ж механічної системи. Кінетичній K і потенційній П енергіям, функції Релея D, узагальненій силі механічної системи з одним ступенем свободи G в першій і другій системі аналогій відповідають величини, приведені в таблиці 1.

Таблиця 1.

Аналогії механічної і електричної систем

Механічна система	a	b	c	G	$K = \frac{1}{2}a\dot{g}^2$	$D = \frac{1}{2}b\dot{g}^2$	$П = \frac{1}{2}cg^2$
Аналогія «сила-напруга»	L	R	$\frac{1}{C}$	e	$\frac{1}{2}L\dot{q}^2$	$\frac{1}{2}R\dot{q}^2$	$\frac{1}{2C}q^2$
Аналогія «сила-струм»	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{di}{dt}$	$\frac{1}{2}C\dot{u}^2$	$\frac{1}{2R}\dot{u}^2$	$\frac{1}{2L}u^2$

Скористуємось тепер приведеними аналогіями і запишемо, як приклад, рівняння Лагранжа для електричного кола, схема якого приведена на рис. 2.

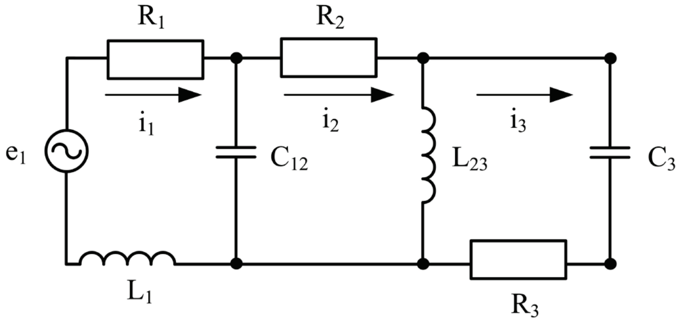

Рис. 2. Коло зі змішаним з‘єднанням елементів

Рівняння Лагранжа запишемо, дотримуючись першої системи аналогій. Попередньо запишемо, що

$$K = \frac{1}{2}L_1\dot{q}^2{}_1 + \frac{1}{2}L_{23}(\dot{q}_2 - \dot{q}_3)^2,$$

$$D = \frac{1}{2}R_1\dot{q}^2{}_1 + \frac{1}{2}R_2\dot{q}^2{}_2 + \frac{1}{2}R_3\dot{q}^2{}_3 \ ,$$

$$\Pi = \frac{1}{2C_3}q^2{}_3 + \frac{1}{2C_{12}}(q_1 - q_2)^2,$$

$$e_2 = e_3 = 0\,,$$

$$e_1 = E\sin\Omega t\,.$$

Тоді рівняння Лагранжа запишуться як

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C_{12}}q_1 - \frac{1}{C_{12}}q_2 = E\sin\Omega t \ ,$$

$$L_{23}\ddot{q}_2 - L_{23}\ddot{q}_3 + R_2\dot{q}_2 + \frac{1}{C_{12}}q_2 - \frac{1}{C_{12}}q_1 = 0 \ ,$$

$$L_{23}\ddot{q}_3 - L_{23}\ddot{q}_2 + R_3\dot{q}_3 + \frac{1}{C_3}q_3 = 0 \ .$$

Ці рівняння і будуть рівняннями стану електричного кола, зображеного на рис. 2. Отримані вони на підставі аналогій між законами механіки та електротехніки.

ПРИНЦИП НАЙМЕНШОЇ ДІЇ В ЕЛЕКТРОТЕХНІЦІ

А. Пуанкаре в своїй книзі «Електрика та оптика» писав: Максвелл не дає механічного пояснення електрики і магнетизму; він обмежується тим, що доводить можливість такого пояснення» [2]. Відмітимо, що в своїх роботах Максвелл вважав: «Щоб довести можливість механічного пояснення електрики, нам не потрібно утрудняти себе відшуканням цього самого пояснення, достатньо знати вирази двох функцій K і П, які обидві є складовими частинами енергії, утворити з їх допомогою рівняння Лагранжа і потім порівняти ці рівняння з експериментальними законами» [2, стор.776; 4, стор.417].

Варіаційний підхід до аналізу електричних кіл грунтується на тому факті, що багато співвідношень для електричних кіл (і електромеханічних систем), у тому числі і рівняння Кирхгофа, можуть бути отримані як наслідок принципу найменшої дії.

Рівняння виду (2) використовувалися в електротехнічній літературі при аналізі консервативних кіл і показувалося, що вони зводяться до рівнянь Кірхгофа. Для електричних неконсервативних кіл як узагальнені координати краще всього використовувати електричні заряди q. В цьому випадку струми $i = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$ є узагальненими швидкостями, напруги на ділянках кола (узяті із зворотним знаком) є узагальненими силами, магнітні потокозчеплення – узагальненими імпульсами. При цьому спостерігається пряма аналогія між електричними і механічними системами [7].

На основі принципу найменшої дії можуть бути отримані перший і другий закони Кірхгофа. Розглянемо електричне коло, яке має m вузлів і n віток, а кожна вітка знаходиться між двома сусідніми вузлами k і s, містить індуктивність L_{ks}, ємність L_{ks}, активний опір R_{ks} і джерело живлення з е.р.с. e_{ks} або довільні їх комбінації. Приймемо в якості узагальненої електричної координати заряд q, що перетікає через контур. Узагальненою швидкістю буде контурний струм *i*.

Запишемо вираз для всіх видів енергії системи для кожного з елементів:

- енергія магнітного поля індуктивних елементів (кінетична)

$$W_L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} L_{ks}\cdot i_{ks}^2 \qquad k \neq s\,; \tag{7}$$

- енергія електричного поля ємнісних елементів (потенційна)

$$W_C = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{C_{ks}}\left(q_s + q_k\right)^2 \qquad k \neq s\,; \tag{8}$$

- енергія, яка перетворюється на тепло (кінетична)

$$W_R = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m} R_{ks}\cdot i_{ks}^2, \qquad k \neq s\,; \tag{9}$$

- енергія, що поступає від джерел енергії і поглинається електроспоживачами

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\left(\pm e_{ks}\cdot i_{ks}\right), \qquad k \neq s\,. \tag{10}$$

З (7)–(10), виразивши струм *i* через заряд q, після диференціювання для будь-якого замкненого контура можна отримати рівняння електричного стану

$$\sum_{n}\left[L_{ks}\frac{di_{ks}}{dt} + \frac{1}{C_{ks}}\int i_{ks}dt + R_{ks}\cdot i_{ks} \pm e_{ks}\cdot i_{ks}\right] = 0\ , \tag{11}$$

яке є рівнянням другого закону Кірхгофа, отриманим як наслідок ПНД, а записавши заряд ділянки контура як $\left(q_k + q_s\right)$ ми використали перший закон Кірхгофа.

У більш загальному випадку відомо, що в однорідному середовищі дія електромагнітного поля при зміні стану характеризується найменшим виділенням теплової енергії і енергії, що йде на приріст енергії електромагнітного поля. Цей результат відомий як теорема Умова-Пойтинга.

ВАРІАЦІЙНИЙ МЕТОД ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ СТАНІВ ЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ПНД

Розглянемо, як приклад застосування ПНД, умови оптимальності усталених станів електричної системи (ЕС) з активними і реактивними елементами, джерелами живлення і електроприймачами. Щоб отримати рівняння Ейлера для усталеного стану ЕС, запишемо функціонал енергії. Згідно інтегрального варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського, у відповідності з (1):

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt = \int_{t_1}^{t_2}(W_L - W_C + W_R + W_e)dt\,, \tag{12}$$

де $L(q,\dot{q},t) = W_L - W_C + W_R + W_e$ – лінійна густина модифікованої функції Лагранжа.

Функціонал енергії набуває стаціонарного значення у випадку рівності нулю його варіації. Тоді ж одержує стаціонарне значення і функціонал дії за Гамільтоном-Остроградським. Це можливо, коли модифікована функція Лагранжа задовольняє рівняння (2).

В усталеному режимі ЕС, коли збалансоване генерування джерелами енергії і споживання її електроприймачами, варіативною частиною є тільки енергія внутрішньої і зовнішньої дисипації, що розсіюється у вигляді тепла. Звести до нуля цю варіацію в складній системі з замкненими контурами можливо, перерозподіляючи електроенергію між джерелами та споживачами. Для цього функція енергії дисипації повинна досягнути стаціонарного (мінімального) значення. Оскільки підінтегральна функція в (12) адитивна, то стаціонарного значення в цьому випадку набирає функціонал в цілому. Зауважимо, що обмін енергією між індуктивними і ємнісними елементами відбувається з втратами, які входять в W_R.

Відповідно функція Лагранжа, в яку входить тільки енергія дисипації, для досягнення стаціонарного значення функціоналу Q має задовольняти таке рівняння Ейлера, що трансформується з (2):

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_R}{\partial I}\right)=0\,, \tag{13}$$

де I – діюче значення струму, значення якого в часі змінюється у відповідності до зміни генерування і споживання електроенергії.

Рівняння (13) слід розглядати за умови, що обов'язковою є відповідність струмів в ЕС першому закону Кірхгофа. Не врахування закону Кірхгофа, якщо діяти формально за (13), приводить до тривіального результату: мінімум енергії розсіяння (втрат енергії) буде за умови рівності струмів у вітках нулю. Отже, задачу мінімізації втрат енергії необхідно розглядати як варіаційну задачу на умовний мінімум з використанням невизначених множників Лагранжа. Відповідним чином формується і система рівнянь (13).

Задача визначення струморозподілу в ЕС, який забезпечує мінімум втрат електроенергії на її передачу, може бути сформульована таким чином [8]: мінімізувати

$$W_R=\overline{I}_t R\overline{I}_a \tag{14}$$

за умови

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}'\mathbf{I}_a&=\mathbf{J}_a\\ \mathbf{M}'\mathbf{I}_p&=\mathbf{J}_p\end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

де $\overline{I}_t, \overline{I}_a$ – транспонований і спряжений вектори струмів у вітках; $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_p$ – вектори активних і реактивних складових струмів у вітках; $\mathbf{J}_a$, $\mathbf{J}_p$ – вектори активних і реактивних складових вузлових струмів; **R** – діагональна матриця активних опорів віток; **M'** – перша матриця інциденцій схеми, в якій викреслені рядки, що відповідають генеруючим вузлам (це еквівалентно об'єднанню всіх джерел живлення в один розрахунковий балансуючий вузол).

Задача (14)–(15) сформульована за допущення, що відсутні обмеження на задаючі (генеруючі) струми вузлів. Вона записана в дійсних координатах змінних, тому струми представлені своїми активними і реактивними складовими. Для надання їй узагальненого виду вибрана матрична форма запису.

Відповідна функція Лагранжа для (14) з урахуванням рівнянь зв'язку (15) запишеться:

$$L=\dot{\mathbf{I}}_t\mathbf{R}\hat{\mathbf{I}}+\left[\boldsymbol{\lambda}_{at}\boldsymbol{\lambda}_{pt}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{M}'\mathbf{I}_a-\mathbf{J}_a\\ \mathbf{M}'\mathbf{I}_p-\mathbf{J}_p\end{bmatrix}, \tag{16}$$

де $\left[\boldsymbol{\lambda}_{at}\boldsymbol{\lambda}_{pt}\right]$ – транспонований вектор невизначених множників Лагранжа.

Функція Лагранжа (16) задовольняє таку систему рівнянь, яка відповідає рівнянню Ейлера (13):

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2\mathbf{R}&0&\mathbf{M}'_t&0\\0&2\mathbf{R}&0&\mathbf{M}'_t\\\hline \mathbf{M}'&0&\multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}}\\0&\mathbf{M}'&&\end{array}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{a0}\\\mathbf{I}_{p0}\\\lambda_a\\\lambda_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\mathbf{J}_a\\\mathbf{J}_p\end{bmatrix}. \tag{17}$$

З системи рівнянь (17) оптимальні струми у вітках і множники Лагранжа у загальному визначаються як

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{a0}\\\mathbf{I}_{p0}\\\lambda_a\\\lambda_p\end{bmatrix}=\left(\left[\begin{array}{cc|cc}2\mathbf{R}&0&\mathbf{M}'_t&0\\0&2\mathbf{R}&0&\mathbf{M}'_t\\\hline \mathbf{M}'&0&\multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}}\\0&\mathbf{M}'&&\end{array}\right]\right)^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\\mathbf{J}_a\\\mathbf{J}_p\end{bmatrix}. \tag{18}$$

Розбивши в (18) матрицю коефіцієнтів в дужках на блоки, як це показано жирними лініями, і застосувавши формулу Фробеніуса, після нескладних перетворень одержимо розв'язок задачі визначення оптимальних струмів в вітках в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{a0} \\ \mathbf{I}_{p0} \\ \lambda_a \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_r \\ -2\mathbf{R}_{ij} & 0 \\ 0 & -2\mathbf{R}_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a \\ \mathbf{J}_p \end{bmatrix}, \tag{19}$$

де $\mathbf{C}_r = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}'_t\left(\mathbf{M}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}$ – матриця коефіцієнтів струморозподілу розрахункової схеми ЕС, в якій опори віток представлені тільки їх активними складовими (заступна R-схема ЕС); $\mathbf{R}_{ij} = \left(\mathbf{M}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{M}'_t\right)^{-1}$ – матриця вузлових опорів заступної R-схеми ЕС.

ОПТИМІЗАЦІЯ НОРМАЛЬНИХ УСТАЛЕНИХ СТАНІВ ЕС

На практиці стани ЕС можуть змінюватися. Змінюються споживання і генерування електроенергії, топологія, параметри, тощо. Відповідно повинні здійснюватися оптимізуючі впливи, які мають вводити ЕС в область оптимальності. Ця задача може бути сформульована як задача наближення поточного стану ЕС з параметрами x і u до економічного з параметрами x_e і u_e:

$$\mathrm{F}(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathrm{t}) \Rightarrow \mathrm{F}(\mathbf{x}_e,\mathbf{u}_e,\mathrm{t}) \tag{20}$$

за умов, що

$$\mathbf{x} \in \mathbf{D}_x, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{D}_u, \tag{21}$$

де $\mathbf{x}$ і $\mathbf{x}_e$ – параметри стану ЕС в поточному і економічному станах; $\mathbf{u}$ і $\mathbf{u}_e$ – параметри керування ЕС, зміна яких з $\mathbf{u}$ на $\mathbf{u}_e$ максимально наближає стан ЕС до економічного (ідеального з позиції втрат електроенергії); $\boldsymbol{D}_x$, $\boldsymbol{D}_u$ – відповідно допустимі області параметрів стану $\mathbf{x}$ і параметрів керування $\mathbf{u}$.

Для того, щоб наблизити (оптимізувати) втрати електроенергії в кожній точці траєкторії їх зміни до ідеально можливих, необхідно постійно в процесі експлуатації здійснювати в системі оптимізуючі дії засобами регулювання. Компенсувати додаткові втрати в ЕС можливо шляхом регулювання напруги у вузлах ЕС і введенням в контури зрівнювальних е.р.с. В такій постановці задачі керуючими змінними є е.р.с., які необхідно ввести у всі замкнені контури для реалізації оптимального струморозподілу, та навантаження джерел електроенергії.

На практиці числові значення оптимальних параметрів $\mathbf{x}_o$ і $\mathbf{u}_o$ з врахуванням обмежень (21) знаходяться, як правило, відповідно між $\mathbf{x}$ і $\mathbf{x}_e$ та $\mathbf{u}$ і $\mathbf{u}_e$. Визначити їх можна різними методами. На рис. 3 проілюстровано два підходи до побудови обчислювального процесу щодо визначення оптимальних параметрів системи: з застосуванням градієнтних методів і використанням ПНД.

Суть градієнтних методів полягає в тому, що вибирається початкове наближення $\mathbf{x}^{(0)}[\mathrm{x}_1^{(0)}, \mathrm{x}_2^{(0)}]$ в області допустимих розв'язків $\mathbf{D}$ і далі, за тією чи іншою обчислювальною схемою, здійснюється спуск в область оптимальності. За ПНД застосовується інший алгоритм: знаходиться ідеальний з мінімально можливими в заданих умовах втратами потужності стан системи $\mathbf{x}_e[x_{1e}, x_{2e}]$, який, як правило, знаходиться поза допустимою областю $\mathbf{D}$; далі здійснюється введення стану в допустиму область з точки $\mathbf{x}_e[x_{1e}, x_{2e}]$ в точку $\mathbf{x}_{опт}^{пнд}[x_{1опт}^{пнд}, x_{2опт}^{пнд}]$, в якій виконуються всі обмеження, але втрати є більшими. Зауважимо, що при використанні градієнтних методів обчислювальний процес будується навпаки – здійснюється не підйом, а спуск з рівня більших втрат (точка початкового наближення $\mathbf{x}^{(0)}[\mathrm{x}_1^{(0)}, \mathrm{x}_2^{(0)}]$) на рівень з меншими втратами.

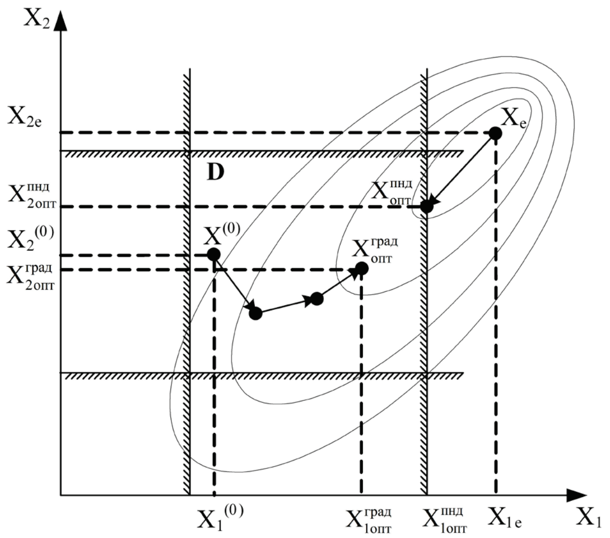

Рис. 3. Рівні втрат потужності в системі за різних значень параметрів стану

ВИСНОВКИ

1. Відомі як формальні аналогії між процесами в механічних і електричних системах мають глибоке фізичне підґрунтя – вони є наслідком системного принципу найменшої дії. Виходячи з принципу найменшої дії можуть бути встановлені закони електротехніки, зокрема закони Кірхгофа. Отже, якщо при переході системи з одного стану в інший ці закони виконуються, то така зміна стану здійснюється з найменшими втратами електроенергії, тобто розсіюванням її з системи у вигляді інших видів енергії є мінімальним. Таким чином, стосовно електричних систем, принцип найменшої дії за своєю суттю є принципом мінімізації втрат електроенергії.

2. В електричних системах принцип найменшої дії проявляється таким чином, що у будь-який момент часу функціонування для поточної сукупності параметрів системи та її незалежних параметрів вона знаходиться в оптимальному стані з точки зору втрат електроенергії, але глибина даного оптимуму зумовлена мірою ідеальності (економічності) самої системи. Сприяння природному стану електричної системи щодо підвищення міри її ідеальності дозволяє, завдяки механізмам самооптимізації, забезпечувати зниження втрат електроенергії під час її функціонування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Мякишев Г.Я. Динамические и статистические закономерности в физике / Мякишев Г.Я. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
2. Вариационные принципы механики: [Сб. ст. / ред. Л.С. Полак]. - М.: Гос. издательство физ.-мат. лит., 1959. – 932 с.
3. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: [в 12 т.] / том 6. Электродинамика. Глава 19. Принцип наименьшего действия / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс – М., : Мир, 1966.– С. 94–119.
4. Пуанкаре Анри. Избранные труды: том 3 / Пуанкаре Анри – М.: Наука, 1974.– 771 с.
5. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.
6. Павловський М.А. Теоретична механіка / Павловський М.А. – К.: Техніка, 2002. – 510 с.
7. Пентегов И.В. Лагранжиан электрической цепи с сосредоточенными параметрами и его применение / Пентегов И.В., Волков И.В. // Электричество. – 1969. – №5. – С. 59–63.
8. Лежнюк П.Д. Принцип найменшої дії в задачах оптимізації електроенергетичних систем / Лежнюк П.Д., Кулик В.В., Нетребський В.В. // Технічна електродинаміка. – 2006. – №3. – С. 35–41.

Надійшла до редакції 16.04.2010

ЛЕЖНЮК ПЕТРО ДЕМ'ЯНОВИЧ – д.т.н., професор, завідувач кафедри електричних станцій і систем, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

НАГУЛ ВОЛОДИМИР ІВАНОВИЧ – к.т.н., доцент, начальник виробничо-технічної служби, Південно-Західна електроенергетична система, м. Вінниця, Україна.

НЕТРЕБСЬКИЙ ВОЛОДИМИР ВАСИЛЬОВИЧ – асистент кафедри електричних станцій і систем, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.