

КОЛИВАННЯ КОНІЧНОГО ГІСТЕРЕЗИСНОГО РОТОРА В ГАЗОМАГНІТНІЙ ОПОРІ

СОКОЛ В.М., КУЛАКОВ П.І., ПОДЖАРЕНКО А.В.

Вінницький державний технічний університет

Диференційні рівняння руху конічного гістерезисного ротора в безконтактній газоманітній опорі [1] витікають з динамічної моделі системи [2] і мають вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{\eta} &= \frac{F_{ei\eta} - N_{\eta} + F_{\eta} + G_{\eta}}{m} - \frac{\delta_{c\eta}}{m} \dot{\eta} \\
 \ddot{\zeta} &= \frac{F_{ei\zeta} - N_{\zeta} + F_{\zeta} + G_{\zeta}}{m} - \frac{\delta_{c\zeta}}{m} \dot{\zeta} \\
 \ddot{\xi} &= \frac{N_{\xi} - F_{\xi} - G_{\xi}}{m} - \frac{\delta_{c\xi}}{m} \dot{\xi} \\
 \dot{\omega}_x &= \frac{J_{Gx} - J_{Gz}}{J_{Gx}} \omega_y \omega_z - \frac{M_{\bar{A}\eta}}{J_{Gx}} (\sin \varphi + \alpha \cos \varphi) - \frac{M_{\bar{A}\zeta}}{J_{Gx}} (\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) - \frac{\delta_x \omega_x}{J_{Gx}} \\
 \dot{\omega}_y &= \frac{J_{Gx} - J_{Gz}}{J_{Gx}} \omega_x \omega_z - \frac{M_{\bar{A}\eta}}{J_{Gx}} (\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) + \frac{M_{\bar{A}\zeta}}{J_{Gx}} (\sin \varphi + \alpha \cos \varphi) - \\
 &\quad - \frac{\delta_y \omega_y}{J_{Gx}} - \frac{\varepsilon (N_{\xi} - F_{\xi})}{J_{Gx}} \\
 \dot{\omega}_z &= \frac{\varepsilon}{J_{Gz}} [(N_{\eta} + F_{\eta})(\cos \varphi - \alpha \sin \varphi) - (N_{\zeta} + F_{\zeta})(\sin \varphi + \alpha \cos \varphi)] - \\
 &\quad - \frac{\beta \varepsilon}{J_{Gz}} (N_{\xi} + F_{\xi}) \cos \varphi - \frac{\beta}{J_{Gz}} (M_{\bar{A}\eta} - \alpha M_{\bar{A}\zeta}) + \frac{M_D}{J_{Gz}}
 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де m - маса ротора, J_{Gx} , J_{Gy} та J_{Gz} - моменти інерції ротора відносно осей η , ζ , ξ , $F_{ei\eta}$ та $F_{ei\zeta}$ радіальні складові сили інерції $F_1 = m\varepsilon\omega^2$, N_{η} та N_{ζ} - радіальні складові підйомної сили газового шару, F_{η} та F_{ζ} - радіальні складові сили електромагнітного тяжіння між ротором і статором, N_{ξ} та F_{ξ} - осьові складові підйомної сили газового шару та сили електромагнітного тяжіння між ротором і статором, $M_{\Gamma\eta}$ та $M_{\Gamma\zeta}$ - відновлюючі моменти газового шару відносно осей η , ζ , M_D - обертаючий момент, ω_x , ω_y , ω_z - складові вектора кутової швидкості ω відносно осей η , ζ , ξ , α та β - кути прецесії та нутації, $\varphi = \omega t$ - кут повороту ротора відносно осі обертання, $\delta_{c\eta}$, $\delta_{c\zeta}$, $\delta_{c\xi}$ - коефіцієнти демпфірування радіальних коливань, δ_x , δ_y - коефіцієнти демпфірування крутильних коливань, ε - ексцентриситет маси ротора.

Враховуючи досить малу величину зазора між ротором і конічною розточкою статора порівняно з радіусами та довжиною ротора, а також велику жорсткість газоманітної опори [3], і нехтуючи в зв'язку з цим вельми малими кутовими перекосами осі обертання ротора, будемо вважати, що ротор обертається тільки навколо осі ξ , яка співпадає за напрямком з віссю симетрії статора і має вертикальний напрямок, і може рухатись прямолінійно за координатами ζ , η , ξ .

Зобразимо узагальнену силу Q у вигляді

$$Q = Cq \quad (2)$$

де q - узагальнена координата, а

$$C_q = \frac{\partial Q}{\partial q} \quad (3)$$

e узагальнена жорсткість.

З урахуванням прийнятих припущень із системи диференційних рівнянь (1) визначимо рівняння радіального переміщення

$$\ddot{\eta} + 2\delta_{\eta}\dot{\eta} + \frac{C_e}{m}\eta = e\omega^2 \cos \omega t, \quad (4)$$

$$\ddot{\zeta} + 2\delta_{\zeta}\dot{\zeta} + \frac{C_e}{m}\zeta = e\omega^2 \sin \omega t, \quad (5)$$

де власна частота коливань системи за радіальною координатою η

$$\Omega_{\eta} = \sqrt{\frac{C_{\eta}}{m}} = \sqrt{\frac{C_{N_{\eta}} + C_{F_{\eta}}}{m}} = \sqrt{m^{-1} \left(\frac{\partial N_{\eta}}{\partial \eta} + \frac{\partial F_{\eta}}{\partial \eta} \right)} \quad (6)$$

З системи диференційних рівнянь (1) визначимо також (з урахуванням прийнятих припущень) рівняння обертання ротора

$$\dot{\omega} = \frac{\varepsilon}{J_{Gz}} \left[(N_{\eta} + F_{\eta}) \cos \varphi - (N_{\zeta} + F_{\zeta}) \sin \varphi \right] + \frac{M_D}{J_{Cz}}, \quad (7)$$

де, згідно [4], обертальний момент визначається співвідношенням

$$M_D = \frac{1}{8} B_m H_c p_e L \left[\frac{h_R}{\cos \chi} (R_0 + R_1) - \left(\frac{h_R}{\cos \chi} \right)^2 \right], \quad (8)$$

H_c - коерцитивна сила матеріалу ротора, яка для гістерезисних сплавів типу «вікалой» становить 200 -300 А/м, p_e - кількість пар полюсів, h_R - товщина активного шару ротора, R_0 та R_1 - радіуси відповідно більшої та меншої основ конуса ротора, L - довжина ротора, χ - кут конусності ротора,

$$B_m = \frac{\sqrt{2} \mu_0 m_{\phi} k_{\text{об}} w_{\text{об}} I_{\phi}}{\pi p_e h_m}, \quad (9)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, m_{ϕ} - кількість фазних обмоток статора, $k_{\text{об}}$ - обмотувальний коефіцієнт, $w_{\text{об}}$ - кількість витків обмотки статора, I_{ϕ} - фазний струм, h_m - величина магнітного зазору між ротором і статором.

Рівняння (7) з урахуванням виразів (8) і (9) являє собою математичний вираз залежності кутового прискорення ротора від кута повороту та струму статора

Величина e радіального зміщення ротора в диференційних рівняннях (4) і (5) може бути визначена через ексцентриситет маси ε [5]:

$$e = \frac{\varepsilon \Omega_e^2}{\Omega_e^2 - \omega^2} \quad (10)$$

Враховуючи початкові умови $\eta_0 = \dot{\eta}_0 = 0$ та $\zeta_0 = \dot{\zeta}_0 = 0$ та вираз (10), вимушені коливання ротора в радіальному напрямку знайдемо з розв'язку диференційних рівнянь (4) і (5) у вигляді:

$$\eta = \frac{\varepsilon \omega^2 \Omega_e^2}{(\Omega_e^2 - \omega^2) \sqrt{(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_\eta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \Theta_2); \quad (11)$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon \omega^2 \Omega_e^2}{(\Omega_e^2 - \omega^2) \sqrt{(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_\zeta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \Theta_2). \quad (12)$$

З урахуванням ідентичності коефіцієнтів демпфірування у радіальних напрямках [3] порівняння виразів (11) та (12) показує, що вони відрізняються за фазою на кут $\pi/2$ і збігаються за іншими параметрами (амплітуда та частота коливань), тому в подальшому будемо аналізувати лише один з цих виразів.

З рівнянь (11) і (12) випливає, що амплітуда вимушених коливань ротора дорівнює:

$$A = \frac{\varepsilon \omega^2 \Omega_e^2}{(\Omega_e^2 - \omega^2) \sqrt{(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2 \omega^2}}. \quad (13)$$

З (13) знаходимо коефіцієнт динамічності системи:

$$K_{aei} = \frac{\Omega_e^2}{\sqrt{(\Omega_e^2 - \omega^2)^2 + 4\delta_e^2 \omega^2}}.$$

Не враховуючи сили опору при обертанні ротора, відмітимо рівність амплітуд радіальних складових газової сили ($N_\eta = N_\zeta = N_e$) та електромагнітної сили ($F_\eta = F_\zeta = F_e$) і визначимо циклічну частоту коливань ω (кутову швидкість) в (11) і (13) з розв'язку диференційного рівняння (7) у вигляді:

$$\omega = \frac{\sqrt{2\mu_0 m_\delta k_{i\dot{a}} w_{i\dot{a}} H_{\bar{n}} h_R (R_0^2 - R_1^2)} I_\delta t + \frac{\varepsilon(N_e + F_e)}{2\omega J_{Gz}} \sin 2\varphi}{8\pi h_i J_{Gz}} \quad (14)$$

Перший доданок в правій частині трансцендентного рівняння (14) характеризує синхронну кутову швидкість конічного гістерезисного ротора без урахування впливу на неї сил опору:

$$\omega_c = \frac{\sqrt{2\mu_0 m_\delta k_{i\dot{a}} w_{i\dot{a}} H_{\bar{n}} h_R (R_0^2 - R_1^2)} I_\delta t_p}{8\pi h_i J_{Gz}} \quad (15)$$

де t_p - час розгону ротора до синхронної кутової швидкості.

Графоаналітичний розв'язок рівняння (15) у вигляді залежності синхронної кутової швидкості від струму статора та часу розгона ротора знайдемо з використанням обчислювального математичного пакету прикладних програм «Maple V for Win-

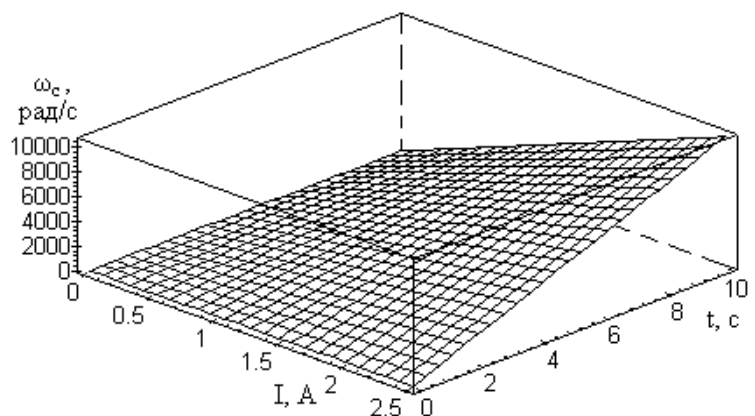


Рис. 1. Залежність кутової швидкості від струму статора та часу розгона ротора

dows» [6]. Залежність кутової швидкості ротора від струму статора та часу розгону ротора у вигляді графоаналітичного розв'язку рівняння (15) показано на рис. 1.

Підставляючи (15) у вираз (13), знайдемо з останнього залежність амплітуди радіальних коливань ротора від його кутової швидкості та струму статора. Таку амплітудно-частотну характеристику системи у вигляді графоаналітичного розв'язку рівняння (13) з урахуванням (15), одержаного з допомогою пакету прикладних програм «Maple V for Windows», показано на рис. 2. Аналіз амплітудно-частотної характеристики системи показує, що зона резонансних частот зміщується в сторону більших частот при зростанні струму статора. Це пояснюється тим, що із зростанням струму зростають сила електромагнітного тяжіння між ротором і статором та жорсткість газоманітної опори.

Значне зростання амплітуди резонансу при зростанні струму статора також пояснюється зростанням жорсткості та зниженням демфіруючих властивостей газоманітної опори при зростанні струму статора.

З рівняння (15) випливає, що у відсутності сил опору синхронна кутова швидкість не залежить від кута φ повороту ротора і лінійно зростає із зростанням часу розгону та/або струму статора. Проте, на величину кутової швидкості значний вплив чинить другий доданок правої частини рівняння (14), що має вигляд:

$$\omega_k = \frac{\varepsilon(N_e + F_e)}{2\omega J_{Gz}} \sin 2\omega t \quad (16)$$

Очевидно, що рівняння (16) описує коливальний процес з амплітудою, яка зростає із збільшенням ексцентриситета маси ротора і зменшується при збільшенні кутової швидкості ω обертання ротора, та циклічною частотою, що вдвічі перебільшує циклічну частоту обертання ротора. Це означає, що складова ω_k частоти обертання з періодом, вдвічі меншим за період обертання, збільшує і зменшує синхронну кутову швидкість ротора, спричиняючи його крутильні коливання.

Рівняння крутильних коливань ротора знайдемо, інтегруючи (16) в межах від 0 до t :

$$\varphi_k = \frac{\varepsilon(N_e + F_e)}{2\omega J_{Gz}} \int_0^t \sin 2\omega t dt = -\frac{\varepsilon(N_e + F_e)}{4\omega^2 J_{Gz}} \cos 2\omega t \quad (17)$$

Таким чином, з розв'язку диференціальних рівнянь руху визначені радіальні коливання ротора під дією ексцентриситета маси, що спричиняють вібраційні процеси в роторній системі, крутильні коливання ротора, та їх амплітуду, циклічну частоту кру-

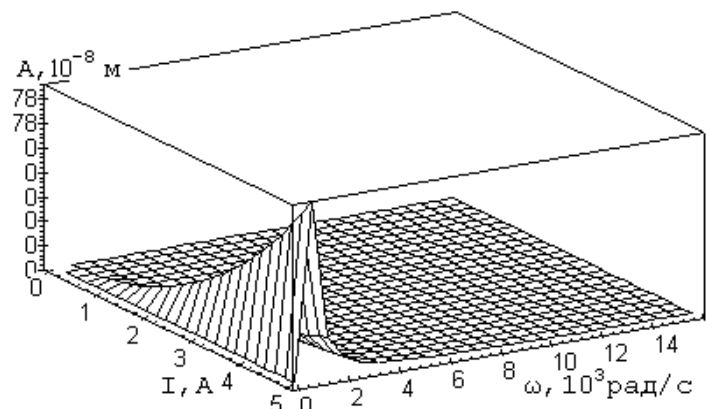


Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики системи та їх залежність від струму статора

тильних коливань, її вплив на кутову швидкість ротора, та взаємозв'язок цих параметрів.

З розглянутої математичної моделі коливань конічного гістерезисного ротора в газоманітній опорі випливає можливість створення інформаційно-вимірювальної системи, яка при безпосередньому вимірюванні кута повороту ротора визначала б миттєві значення кутової швидкості та кутового прискорення ротора.

В роботі [5] доведено, що вимірювання амплітуди крутильних коливань і миттєвого значення кутової швидкості ротора дозволяє визначити безконтактним методом приведеній момент інерції ротора з рівняння

$$J_{cz} = \frac{m e^2 \omega^2}{\varphi_k \sqrt{(\Omega_c^2 - \omega^2)^2 + 4 \delta_c^2 \omega^2}} \quad (18)$$

Таким чином, досліджена математична модель коливань конічного гістерезисного ротора в безконтактній газоманітній опорі може бути визначена як база для системи вимірювання динамічних параметрів роторної системи.

Література

1. Сокол В.М., Шнайдер А.Г., Толкачев Э.А. Газоманитный подвес ротора мотор-подшипников как саморегулирующаяся система // Техническая электродинамика. - 1992. - № 5. - С. 48 - 55.
2. Сокол В.М. Динамическая модель высокоскоростного ротора с учетом его неуравновешенности // Автоматизация и современные технологии. - 1996. - № 6. - С. 23 - 26.
3. Шнайдер А.Г., Сокол В.М. Демпфирование колебаний ротора мотор-подшипников // Вестник машиностроения. - 1991. - № 10. - С. 28 - 31.
4. Делекторский Б.А., Тарасов В.Н. Управляемый гистерезисный привод. - М.: Энергоатомиздат, 1983. - 128 с.
5. Сокол В.М. Определение момента инерции ротора в процессе его балансировки // Автоматизация и современные технологии. - 1995. - № 7. - С. 22 - 24.
6. Поджаренко В.О., Сокол В.М., Селезньова Р.В. Математичні обчислення в Maple for Windows. - Вінниця: Континент-ПРИМ, 1997. - 106 с.