УДК 681.325.2

Н. І. ЗАБОЛОТНА, О. В. ДРОНЕНКО

МОДЕЛЮВАННЯ ПАРАЛЕЛЬНОГО БЛОЧНОГО МЕТОДУ МНОЖЕННЯ МАТРИЦЬ У ФОРМІ З ПЛАВАЮЧОЮ КОМОЮ В ОПТОЕЛЕКТРОННОМУ СПЕЦОБЧИСЛЮВАЧІ

Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, Україна
E-mail: zabolotna@vstu.vinnica.ua

Анотація. Розглянуто можливість створення оптоелектронного помножувача, який відрізняється від існуючих аналогів, поданням знакозмінних матриць в формі з плаваючою комою та організацією процесу множення за блочним методом. Запропоновано структурну схему оптоелектронного спецпроцесора для помноження матриць у формі з плаваючою комою за блочним методом, розраховано часові характеристики запропонованого приладу.

Аннотация. Рассмотрено возможность создания оптоэлектронного умножителя, который отличается от существующих аналогов, представлением знакопеременных матриц в форме с плавающей запятой и организацией процесса умножения блочным методом. Предложено структурную схему оптоэлектронного спецпроцессора для суммирования матриц в форме с плавающей запятой блочным методом, рассчитано временные характеристики предлагаемого прибора.

Abstract. It is considered an opportunity of creation the optoelectronic multiplicater that differs from existing analogues, by representation of sign-variable matrixes in the form with a floating point and organization process of multiplying by block method. It is offered the block diagram optoelectronic special processor for multiplication of matrixes in the form with a floating point and it is designed time characteristics of the suggested device.

Ключові слова: оптоелектронний, матричний, помножувач, блочний метод, плаваюча кома.

ВСТУП

Матриці та матричні операції широко використовуються при математичному моделюванні самих різноманітних процесів, явищ та систем. Матричні обчислення є основою великої кількості наукових та інженерних розрахунків – серед прикладних областей можуть військова промисловість, медицина, обчислювальна математика, фізика, економіка та ін.

Оскільки, операція множення матриць є базовою для широкого кола алгоритмів обробки сигналів і зображень, то з цієї точки зору оптичні матричні обчислювальні пристрої, що реалізують дану операцію, представляють особливий інтерес.

Операція множення матриць є базовою для широкого кола алгоритмів обробки сигналів і зображень, то з цієї точки зору оптичні матричні обчислювальні пристрої, що реалізують дану операцію представляють особливий інтерес.

Відомо, що в цифровій обчислювальній техніці використовують дві форми подання чисел: з фіксованою комою і з плаваючою комою. При цифровому обробленні сигналів виникають наступні проблеми:

- похибки округлення ведуть до накопичення шуму системи;
- обмеження динамічного діапазону ведуть до спотворення сигналу, викликаного насиченням.

Подання чисел у формі з плаваючою комою дозволяють уникнути цих проблем. Крім того, з метою запобігання труднощів, пов'язаних із введенням матриці масштабних коефіцієнтів, прийнятих для усунення переповнення розрядної сітки в процесі обчислень в формі з фіксованою комою, є також сенс переходу до арифметики з плаваючою комою. Тому в запропонованому обчислювальному пристрої використовується арифметика з плаваючою комою.

Оскільки матричні обчислення є обчислювально трудоємкими, вони являють собою область застосування паралельних оптоелектронних спецобчислювачів.

Відомий цифровий паралельний оптоелектронний помножувач знакозмінних матриць у формі з плаваючою комою [1], що базується на принципах паралельного введення-виведення, суміщеного з паралельною матричною обробкою за розрядними зрізами та організацією глобальних оптичних зв'язків. Має зміст адаптація відомого помножувача до особливостей блочної організації операції множення матриць, що дозволить оброблення даних більшої розмірності, ніж це дозволяють існуючі спецобчислювачі, реалізовані на основі існуючої елементної бази.

Розглянемо паралельний алгоритм цифрового перемноження матриць з плаваючою комою за блочним методом, який наведений на рисунку 1, на основі розробленого паралельного алгоритму множення знакозмінних матриць у формі з плаваючою комою [1].

Множення чисел у формі з плаваючою комою складається з наступних етапів:

1. Визначення знаку добутку шляхом додавання за mod2 знакових цифр мантис чисел A і B.
2. Визначення порядку добутку шляхом алгебраїчного додавання порядків чисел A і B в доповняльному коді.
3. Визначення мантиси добутку шляхом множення мантис чисел A і B за правилами множення чисел з фіксованою комою.
4. Проведення нормалізації та округлення мантиси результату.

Розроблений алгоритм містить 5 етапів (див. рис.1).

Чотири тривимірні масиви **Xms, Yms, Dps, Yps** зберігають РЗ мантис та порядків елементів відповідно вхідних матриць блоків **A** і **B** розмірності *MN× MN*, а значення масивів блоків **Sms, Sps** обнуляють (вершина 2, рис.1).

Скористаємось методом блочного множення матриць. Отже, розіб'ємо вхідні матриці ***A*** та ***B*** на квадратні матриці нижчих порядків – блоки, розмірність яких *N*x*N*, відповідно кількість блоків, що будуть формувати вхідні матриці **A** та **B** – *M*x*M*. Тоді матрицю **A** можна розглядати як складну матрицю, елементами якої є блоки:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A_{11}} & \mathbf{A_{12}} & \cdots & \mathbf{A_{1j}} \cdots \mathbf{A_{1M}} \\ \mathbf{A_{21}} & \mathbf{A_{22}} & \cdots & \mathbf{A_{2j}} \cdots \mathbf{A_{2M}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathbf{A_{i1}} & \mathbf{A_{i2}} & \cdots & \mathbf{A_{ij}} \cdots \mathbf{A_{MM}} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

а відповідно матрицю **B***:*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_{11}} & \mathbf{B_{12}} & \cdots & \mathbf{B_{1j}} \cdots \mathbf{B_{1M}} \\ \mathbf{B_{21}} & \mathbf{B_{22}} & \cdots & \mathbf{B_{2j}} \cdots \mathbf{B_{2M}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathbf{B_{i1}} & \mathbf{B_{i2}} & \cdots & \mathbf{B_{ij}} \cdots \mathbf{B_{MM}} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$.

Кожен блок має вигляд, аналогічний такому:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} \end{bmatrix},$$

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pr} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

де $p = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, N}$, а відповідно.

Таким чином, вхідними даними та результатом є матриці розмірністю *MN*x*MN.*

Етап 1. Виконується алгебраїчне додавання порядків співмножників з метою визначення порядку добутку (вершини 4–7, рис.1). Для цього використовується процедура, що виконує паралельне додавання знакозмінних матриць цілих чисел, описана в [1], причому результат додавання формується в доповняльному коді і потім переводиться у прямий (вершини 4-7, рис.1).

Етап 2. Визначення матриці блоків **MultM** добутку мантис **A** і **B.**

Нехай мантиса коженого з блоків вхідних матриць ***A, B*** представляється в прямому коді відповідними наборами бінарних розрядних зрізів (РЗ) з виділенням РЗ зі старшим 2^L коефіцієнтом в якості знакового:

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{2^L Sg}(\mathbf{A}_{ij}) + \sum_{\alpha=0}^{L-1} 2^{\alpha} \mathbf{A}_{ij(\alpha)},$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{2^L Sg}(\mathbf{B}_{ij}) + \sum_{\beta=0}^{L-1} 2^{\beta} \mathbf{B}_{ij(\beta)}, \tag{4}$$

де $\mathbf{A}_{ij(\alpha)}$, $\mathbf{B}_{ij(\beta)}$, – бінарні РЗ відповідного блоку з поточними номерами α, β відповідного блоку матриць **A, B**; $2^{\alpha}, 2^{\beta}$ – вагові коефіцієнти бінарних розрядних зрізів кожного з блоків матриць ***A, B*** відповідно; $\mathbf{Sg(A)}$ та $\mathbf{Sg(B)}$ – знакові РЗ, елементи яких кодуються нулем (одиницею) у випадку додатних (від'ємних) значень відповідних елементів матриць **A** і **B,** відповідно.

Матриця-результат **C** має бути представлена в прямому коді у вигляді набору з (P+1) РЗ

$$\mathbf{C}_{ij} = 2^{Z} \mathbf{Sg}(\mathbf{C}_{ij}) + \sum_{\gamma=0}^{Z-1} 2^{\gamma} \mathbf{C}_{ij(\gamma)}, \tag{5}$$

де $\mathbf{Sg}(\mathbf{C}_{ij})$ - знаковий РЗ; $\mathbf{C}_{ij(\gamma)}(\overline{\gamma = 0, (Z-1)})$ – інформаційні РЗ.

Будь-який елемент $c_{i,j,p,r}$ матриці блоків результату формується шляхом накопичення частинних добутків з урахуванням їх знаків. Виконується перетворення прямих кодів, що являють собою інформаційні зважені бінарні базові компоненти часткових добутків, в доповняльні коди в залежності від знаку частинного добутку, що формується, з їх подальшим накопиченням за правилами алгебраїчного додавання з знакового розряду [1].

$$c_{ij,pk} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} 2^{(2L-1)}(Sg(a_{im,pn}) \oplus Sg(b_{mj,nr})) \times \sum_{\beta=0}^{L-1}\sum_{\alpha=0}^{L-1} 2^{(\alpha+\beta)} \times$$
$$\times \begin{cases} (a_{im,pn}(\alpha) \wedge b_{mj,nr}(\beta)), \text{ якщо } Sg(a_{im,pn}) \oplus Sg(b_{mj,nr}) = 0 \\ \overline{a_{im,pn}(\alpha) \wedge b_{mj,nr}(\beta)}), \text{ якщо } Sg(a_{im,pn}) \oplus Sg(b_{mj,nr}) = 1,\ \alpha \neq 0; \\ \overline{a_{im,pn}(\alpha) \wedge b_{mj,nr}(\beta))} + 1), \text{ якщо } Sg(a_{im,pn}) \oplus Sg(b_{mj,nr}) = 1,\ \alpha = 0; \end{cases} \tag{6}$$

де $a_{im,pn}(\alpha) \wedge b_{mj,nr}(\beta))$ – бінарний базовий компонент n-го частинного добутку m-го блоку розряду елемента; $a_{im,pn}(\alpha)$ – α -й розряд елемента $a_{im,pn}$; $b_{mj,nr}(\beta))$ – β -й розряд елемента $b_{mj,nr}$; $Sg(a_{im,pn}) \oplus Sg(b_{mj,nr})$ – знаковий розряд частинного добутку; $\oplus$ – додавання за модулем 2; + – алгебраїчне додавання.

Матрицю-результат **C,** що отримується під час оброблення в доповняльному коді, необхідно представити в прямому коді, виконавши при цьому нескладні перетворення.

При розгляді просторово-часового процесу формування компонент $c_{i,j}$ матриці-результату за аналогією з попередніми дослідженнями можна виділити багато алгоритмів множення знакозмінних матриць з ЦЧІ, що однозначно визначаються законами $\alpha(t), \beta(t).$ Їх особливістю є процес накопичення послідовності бінарних бінарних базових компонент з урахуванням знаку відповідних частинних добутків.

Обравши в якості закону $2^{(\alpha(t)+\beta(t))}$, з внесенням деяких змін, пов'язаних з виділенням по закінченню кожного "захисного" часового інтервалу такту оброблення зрізового розряду компонент частинного добутку, загальний час (*T*) перемноження знакозмінних матриць може бути оцінено у вигляді

$$T = (LNM\,(L + int[\log_2(\mathrm{NM}+1)] + 1) + L)\Delta T, \tag{7}$$

де ΔT – тривалість такту обчислення.

З урахуванням вказаної вище просторово-часової матричної моделі операції паралельного множення знакозмінних матриць з ЦЧІ виглядає наступним чином

$$c(t) = \sum_{t=0}^{T-1} 2^{(\alpha(t)+\beta(t))} \times \begin{cases} \mathbf{Z}(t) \oplus \mathbf{Sg}(z)(t), \text{ } якщо \text{ } \alpha = \overline{1,(L-1)}; \\ \mathbf{Sg}(z)(t), \text{ } якщо \text{ } \alpha(t) = L; \\ \mathbf{Z}(t) \oplus \mathbf{Sg}(z)(t) + \mathbf{Sg}(z)(t), \text{ } якщо \text{ } \alpha(t) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\mathbf{Z}(t)$ – масив бінарного базового компонента частинного добутку, що визначається за формулою

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{R}(\varphi^{m(t)} \mathbf{A}(\alpha(t) \wedge \mathbf{E}) \wedge \varphi^{m(t)}(\mathbf{B}(\beta(t)))\,, \tag{9}$$

з урахуванням конкретних законів $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $m(t)$; $\mathbf{Sg}(z)(t)$ – знаковий масив бінарного базового компонента, що визначається у вигляді

$$\mathbf{Sg}(z)(t) = \mathbf{R}(\varphi^{\leftarrow m(t)})(\mathbf{Sg}(A) \wedge \mathbf{E}) \oplus \varphi \uparrow^{m(t)} (\mathbf{Sg}(B))\,. \tag{10}$$

Добуток мантис формується за Ms+N·M·(Ms+$\log_2$N·M +1) робочих тактів у вигляді набору із (2·Ms+$\log_2$NM) зрізів доповняльного коду, з яких залишається лише перших (Ms+1) розрядних зрізів, а решта відсікають. Отримані (Ms+1) розрядних зрізів сформованого добутку мантис переводяться у прямий код (вершина 8, рис.1) і записуються у деякий масив **RM** (вершина 9, рис.1).

Етап 3. Паралельне округлення добутку мантис матриць до кількості розрядів Ms виконується методом спрощеного округлення за доповненням, тобто шляхом примусового запису у молодший РЗ округленого результату одиниць (вершина 10, рис.1).

Етап 4. Нормалізація результату. Ознакою **R1** порушення нормалізації праворуч є 0 в старшому інформаційному РЗ мантиси результату. В залежності від елементів матриці добутку мантис інформація або залишається без змін (паралельно перезаписується), або зсувається на один РЗ ліворуч (вершина 13, рис.1). Паралельно з цим процесом відбувається зменшення порядку результату на одиницю в елементах, що були денормалізовані, шляхом додавання інверсного **R1** до відповідних елементів матриці порядку результату (вершини 14,15 рис.1).

Етап 5. Після виконання попередніх етапів порядок результату сформовано в доповняльному коді, тому виконується переведення порядку результату в прямий код (вершини 17, 18) і зчитуємо результат у прямому коді (вершина 19, рис.1).

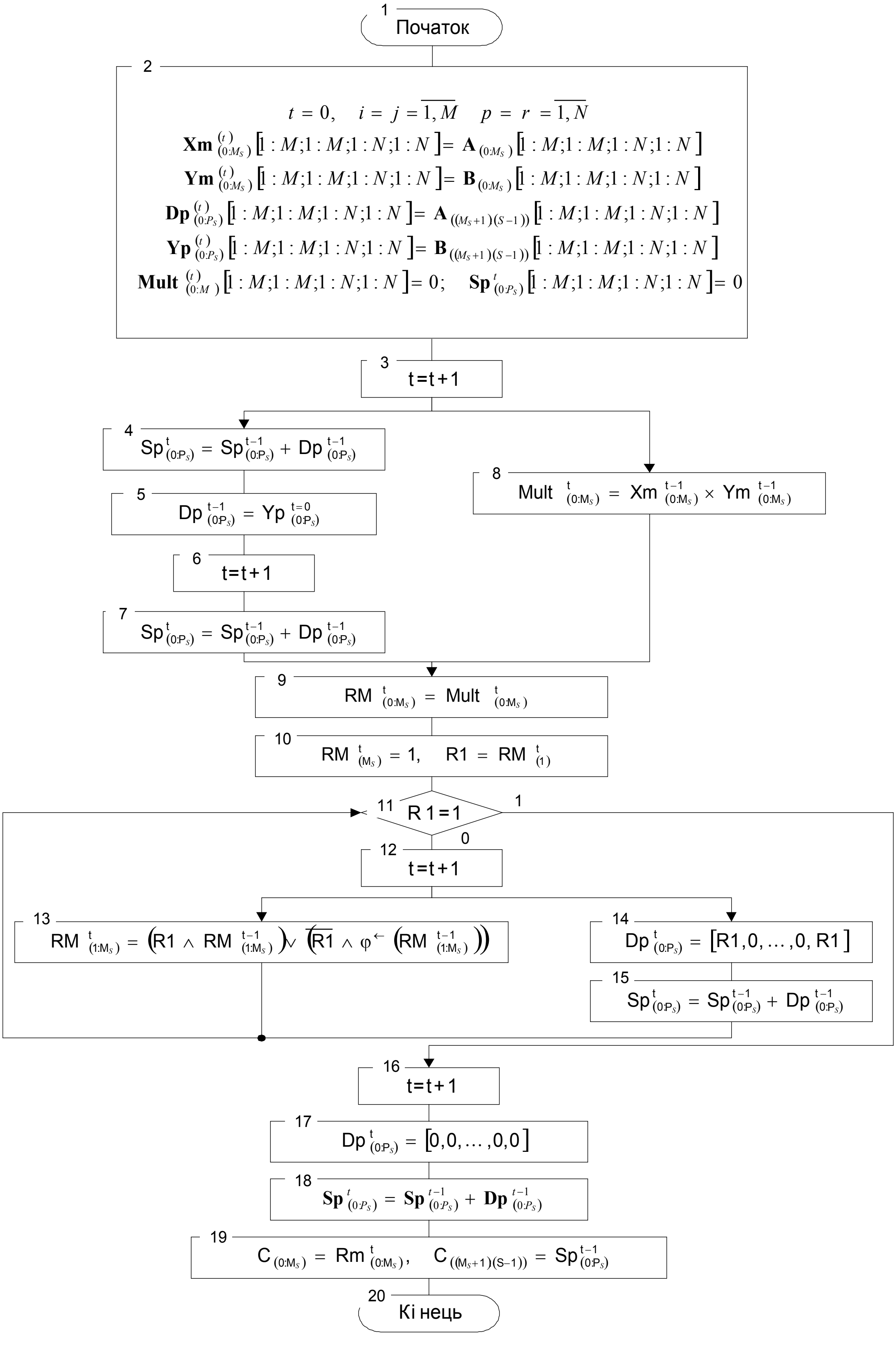

Рис. 1. Паралельний алгоритм множення матриць з плаваючою комою за блочним методом

Максимальний час T виконання операції перемноження матриць **A** і **B** з розмірностями *MN×MN* і числом зрізів мантиси Ms та порядку Ps може бути оцінений за кількістю тактів у такому вигляді:

$$T_n = N \cdot M \cdot Ms \cdot (Ms + \log_2 NM + 1) + Ps \cdot Ms + 3 \cdot Ms + 1 \quad (\textit{тактів})\ . \tag{11}$$

В результаті просторово-часового відображення алгоритму множення матриць на паралельну структуру, розроблено структурну організацію оптоелектронного спецобчислювача для паралельного множення бінарних матриць розмірністю *MN×MN,* поданих у формі з плаваючою комою на основі оптичного розрядно-зрізового кодування та цифрового часового інтегрування (ЦЧІ).

Структурна схема блоку паралельного помноження включає: блок обробки мантис (рис. 2) і блок обробки порядку матриць (рис. 3) .

Блок паралельної обробки порядків (рис.3) складається з паралельних блоків: матриці оптоелектронних регістрів просторового зсуву МРгП1 і МРгП2 на один розрядний зріз в сторону старших розрядних зрізів; матриці оптоелектронних матричних комутаторів цифрових картин ММКП1 і ММКП2; матриці оптоелектронних накопичувальних суматорів МНСмП знакозмінних цілочисельних матриць.

Структурна схема блоку обробки матриць мантис (рис.2) складається з паралельного блочного оптоелектронного помножувача знакозмінних цілочисельних матриць (Пер-ч), матриці картинних тригерів МТг, матриці оптичних блоків просторового зсуву МБЗС, матриці оптоелектронних паралельних регістрів MRG та матриці оптоелектронних затворів.

Максимальний час T виконання операції помноження матриць A і B з розмірностями *MN×MN* і числом зрізів мантиси Ms та порядку Ps може бути оцінений для даної структури за формулою (11), за базові логічні елементи обрано матричні елементи І, АБО, НІ на основі ОКТ на перспективних оптичних бістабільних елементів на SEED-приладах (Self Electro-optic Effect Device), для яких $\tau = 1$ *нс* [3].

$$T_n = (N \cdot M \cdot Ms \cdot (Ms + \log_2 NM + 1) + Ps \cdot Ms + 3 \cdot Ms + 1) \cdot 8 \cdot \tau\ . \tag{12}$$

Таким чином, для розроблений помножувач дозволяє оброблення двох матриць розмірністю MN×MN, при M=100, N=256, Ms= 63 та Ps=31 за $T_n = 10{,}116\ c$.

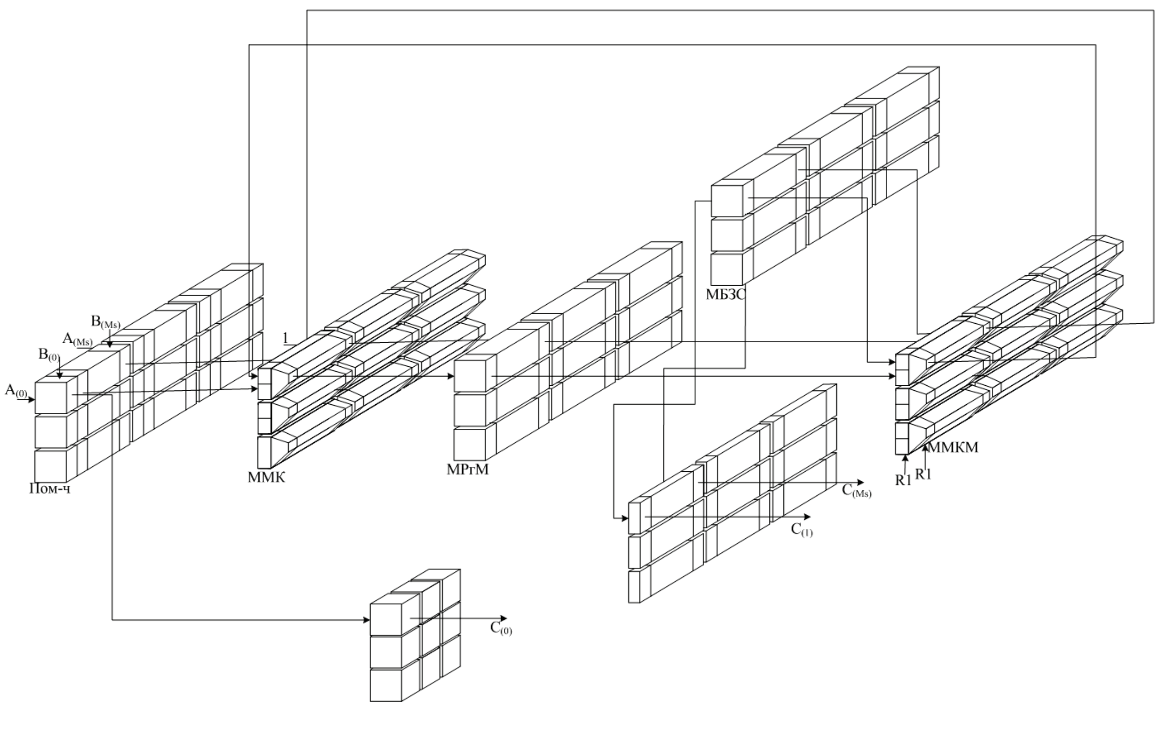

Рис. 2. Структурна схема блоку обробки мантис для помножувача матриць
в формі з плаваючою комою за блочним методом

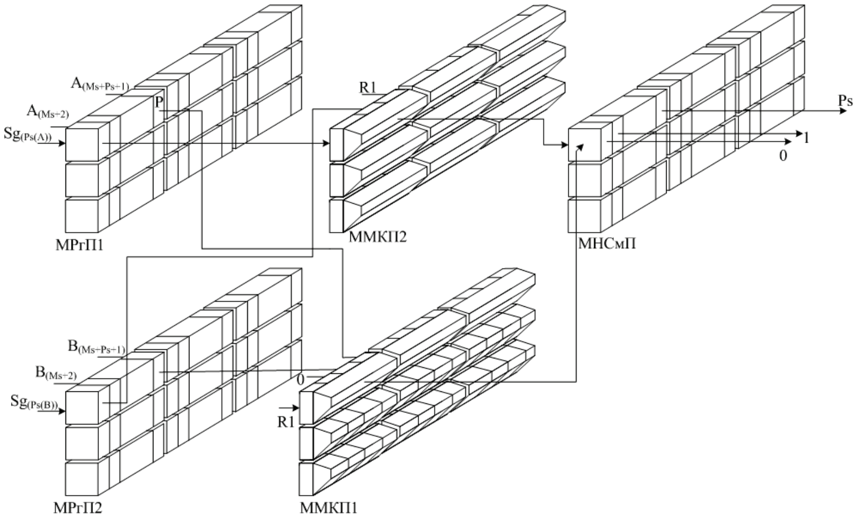

Рис. 3. Структурна схема блоку обробки порядків для помножувача матриць в формі з плаваючою комою за блочним методом

ВИСНОВКИ

Розроблено математичну модель паралельного методу множення великорозмірних матриць у формі з плаваючою комою. Розроблено нову структурну модель паралельного оптоелектронного розрядно-зрізового помножувача матриць у формі з плаваючою комою за блочним методом, який характеризується:

- підвищенням продуктивності;
- розширеними функціональними можливостями;
- розширеним діапазоном вхідни даних;
- високою точністю оброблення даних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Заболотная Н.И. Организация параллельного перемножения знакопеременных матриц в цифровом оптоэлектронном процессоре многоуровневых изображений / Наталья Заболотная, Владислав Шолота // Электронное моделирование. – 1997. - №3. – С. 41 – 49.
2. Вербовецкий А.А. Нетрадиционный оптический метод построения цифрового умножителя с фиксированной точкой/ А. А. Вербовецкий // Радиотехника. - 2002. - №4. - С. 20 – 24.
3. Заболотна Н.І. Оптоелектронний цифровий пристрій множення-обернення матриць з плаваючою комою/ Н. І. Заболотна, В. В. Шолота, І. В. Крук // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 2001. – №3. – С. 33 – 36.
4. Fuh A.Y.G. Dynamic pattern formation and beam steering characteristics of cholesteric gratings/ A.Y.G. Fuh, C.H. Lin, and C.Y. Huang // Jpn. J. Appl. Phys. - 2002. – №1, Part 1 41. – P.211–218.
5. Miller D.A.B. Quantum-Well-Self-Electro-Optic-Effect Devices/ D. A. B. Miller //Optical and Quantum Electronics. - 1990. - Vol. 22. - P. 61 – 98.

Надійшла до редакції 11.11.2008р.

ЗАБОЛОТНА НАТАЛІЯ ІВАНІВНА – к.т.н., доцент кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, декан факультету функціональної електроніки та лазерної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.

ДРОНЕНКО ОЛЕНА ВАСИЛІВНА – аспірант кафедри лазерної та оптоелектрлнної техніки, Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця, Україна.