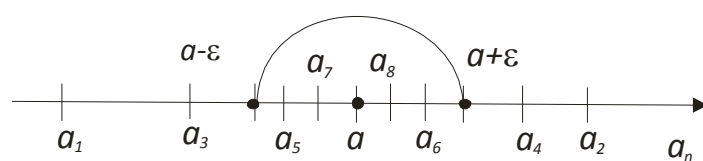


А. А. Коломієць, В. І. Ключко, В. О. Краєвський

## Практикум з вищої математики: обчислення границь



Міністерство освіти і науки України  
Вінницький національний технічний університет

А. А. Коломієць, В. І. Клочко, В. О. Краєвський

# Практикум з вищої математики: обчислення границь

**Практикум**

Вінниця  
ВНТУ  
2020

УДК 517(076)  
К61

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 9 від 30.04.2020 р.)

Рецензенти:

**В. М. Михалевич**, доктор технічних наук, професор

**О. М. Джеджула**, доктор педагогічних наук, професор

**В. Д. Дереч**, кандидат фізико-математичних наук, доцент

**Т. Л. Годованюк**, кандидат педагогічних наук, доцент, професор

**Коломієць, А. А.**

К61      Практикум з вищої математики: обчислення границь : практикум / А. А. Коломієць, В. І. Клочко, В. О. Краєвський. – Вінниця : ВНТУ, 2020. – 56 с.

ISBN 978-966-641-804-6

У практикумі наведено приклади розв'язання основних типів границь, які найчастіше зустрічають студенти в типових розрахунках, а також у подальшому при дослідженні на збіжність рядів та невластних інтегралів. Відповідно вміння обчислювати границі функцій є фундаментальним і обов'язковим вмінням для студентів. Мета практикуму – надати студентам можливість більш детально розібратися у методах обчислення границь функцій, у методах розкриття основних невизначеностей, що зустрічаються при обчисленні границь, а також поглибити знання теоретичного матеріалу.

Призначений для студентів усіх спеціальностей.

УДК 517(076)

ISBN 978-966-641-804-6

© ВНТУ, 2020

## ЗМІСТ

Вступ .....	6
1 Деякі теоретичні відомості з теорії границь .....	7
2 Теорема про границі суми, добутку і частки функцій .....	11
3 Перша та друга чудові границі .....	13
4 Обчислення границь функцій .....	17
4.1 Обчислення границь, що не містять невизначеностей .....	17
4.2 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ .....	17
4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ .....	20
4.4 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ при $x \rightarrow a$ , під знаком границі знаходиться дробово-раціональний вираз $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ .....	21
4.5 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під знаком границі містяться нескінченно малі функції .....	22
4.6 Розкриття невизначеностей типу $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під знаком границі містяться ірраціональні вирази .....	23
4.7 Розкриття невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ при $x \rightarrow a$ .....	24
4.8 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція .....	24
4.9 Розкриття невизначеності типу $\{1^\infty\}$ з використанням другої важливої границі .....	25

<i>5 Класифікація основних невизначеностей при розкритті границь та шляхи їх розв'язання. ....</i>	<i>28</i>
<i>6 Моделювання професійної діяльності інженера .....</i>	<i>32</i>
<i>7 Приклади розв'язання типового розрахунку.....</i>	<i>34</i>
<i>8 Завдання для типових розрахунків.....</i>	<i>40</i>
<i>9 Завдання для самостійної роботи.....</i>	<i>48</i>
<i>10 Основні підказки для студентів.....</i>	<i>49</i>
<i>11 Тести для перевірки знань.....</i>	<i>51</i>
<i>Глосарій.....</i>	<i>54</i>
<i>Література.....</i>	<i>55</i>

## ***ВСТУП***

У практикумі наведено приклади основних типів границь, які найчастіше зустрічають студенти в типових розрахунках, а також у подальшому при дослідженні на збіжність рядів та невласних інтегралів. Відповідно, вміння обчислювати границі функцій є фундаментальним і обов'язковим для студентів.

При обчисленні границь студенти часто роблять помилки, плутаючи розкриття невизначеностей різного виду. Тому за мету у практикумі автори обрали описати в стислому вигляді розкриття основних невизначеностей, навести основні алгоритми обчислення границь та систематизувати в загальну таблицю типи границь, невизначеності, їх розкриття та приклади.

## 1 ДЕЯКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ

Кожному числу  $n \in \mathbb{N}$  поставимо у відповідність деяке дійсне число  $x_n = f(n)$ . У цьому випадку кажуть, що задано *числову послідовність* і позначають  $\{x_n\}$ .

**Означення.** Число  $a$  називається *границею* послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для будь-якого додатного числа  $\varepsilon$  знайдеться натуральне число  $N$  таке, що для всіх членів послідовності  $\{x_n\}$  з номерами, що більші за  $N$  виконується нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Те, що число  $a$  є границею послідовності  $\{x_n\}$ , записують так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ або } x_n \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Якщо послідовність має границю, то її називають *збіжною* і, якщо не має границі, *розбіжною*.

Будь-який інтервал виду  $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ , де  $\varepsilon > 0$ , називається  $\varepsilon$ -*околом* точки  $a$  на числовій осі.

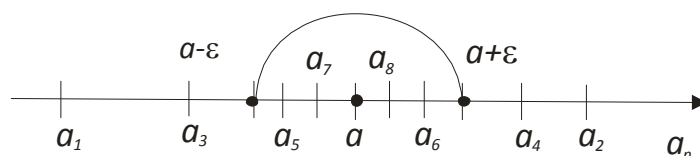


Рисунок 1 – Ілюстрація групування точок в околі точки  $a$

З геометричної точки зору, якщо число  $a$  є границею послідовності  $\{x_n\}$ , то в довільний  $\varepsilon$  окіл точки  $a$  потраплять всі члени послідовності  $\{x_n\}$ , окрім скінченної їх кількості ( $\varepsilon$  може бути як завгодно малим). Можна сказати, що члени послідовності  $\{x_n\}$  групуються навколо точки  $a$  (рис. 1).

Нехай на деякій множині  $X$  задано функцію  $f(x)$  і деяку. Виберемо з  $X$  послідовність точок  $\{x_n\}$ , що відрізняються від точки  $a$ :

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  Нехай число  $a$  є *границею* послідовність точок  $\{x_n\}$ .  
 $x_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Знайдемо значення функції  $f(x)$  у точках послідовності  $\{x_n\}$   
 $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ . Ці значення утворюють послідовність  
 $\{f(x_n)\}$

**Означення.** Число  $b$  називається *границею функції*  $f(x)$  у точці  $x = a$  (або при  $x \rightarrow a$ ), якщо для будь-якої збіжної до  $a$  послідовності значень аргументу  $x$ , відмінних від  $a$ , відповідна послідовність значень функції збігається до числа  $b$ .

$$\forall \{x_n\}, x_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b.$$

Це означення називають означенням за Гейне або означенням границі «мовою послідовностей».

**Означення.** Число  $A$  називається *границею функції*  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow a$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що при  $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$  виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . У цьому випадку записують

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

**Означення.** Число  $A$  називається *границею функції*  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $M(\varepsilon) > 0$  таке, що при  $|x| > M(\varepsilon)$  виконується нерівність  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . У цьому випадку записують

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

Дамо означення лівої і правої границі функції «мовою послідовностей».



**Означення.** Число  $A$  називається границею функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  зліва, якщо для послідовності  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , значень аргументу  $x$ , що збігається до числа  $x_0$  і таких, що  $x_n < x_0$ , відповідна послідовність значень функції  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ , збігається до числа  $A_1$ .

Позначається ця границя символічно так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ ,

Або інакше: для  $\forall x_n : x_n \rightarrow x_0$  і  $x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A_1$ ;  
 $A_1 = f(x_0 - 0)$ .

**Означення.** Число  $A_2$  називається границею функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  справа, якщо для довільної послідовності  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , значень аргументу  $x$ , що збігається до числа  $x_0$  і таких, що  $x_n > x_0$ , відповідна послідовність значень функції  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ , збігається до числа  $A_2$ .

Позначається ця границя символічно так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2,$$

Або інакше: для  $\forall x_n : x_n \rightarrow x_0$  і  $x_n > x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A_2$ ;  
 $A_2 = f(x_0 + 0)$ .

**Означення.** Число  $b$  називається *границею функції  $f(x)$  справа* в точці  $x = a$ , якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $a < x < a + \delta$   $[a - \delta < x < a]$ , виконується нерівність:  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Позначають границю справа  $\lim_{x \rightarrow a + 0} f(x)$  або  $f(a + 0)$ .

**Означення.** Число  $b$  називається *границею функції  $f(x)$  справа (зліва)* в точці  $x = a$ , якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке додатне число  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $a - \delta < x < a$ , виконується нерівність  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

Скорочено означення границі справа (зліва) в точці  $x = a$ , можна записати так:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ або } f(a-0).$$

**Теорема.** Для того, щоб у точці  $x = a$  існувала границя функції  $f(x)$  необхідно і достатньо, щоб існували ліва і права границі і були рівні між собою:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

**Приклад.** Обчислити ліву і праву границі функції

$$y = \frac{1}{e^{x+1}}$$

Обчислимо ліву границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Обчислимо праву границю функції :

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1+0-1}} = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty$$

Як бачимо, ліва і права границя функції в точці можуть не співпадати.

**Приклад.** Обчислити ліву і праву границі функції  $y = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 - 3}{x + 1} = -\infty$$

**Означення.** Число  $b$  називається *границею функції*  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого як завгодно малого числа  $\varepsilon > 0$  існує таке додатне число  $N$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $|x| > N$ , виконується нерівність  $|f(x) - b| < \varepsilon$ . Записують:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

Розглянемо *нескінченно великі і нескінченно малі функції*.

**Означення.** Функція  $f(x)$  називається *нескінченно малою* при  $x \rightarrow a$ , якщо виконується рівність:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Іншими словами, функція  $f(x)$  називається *нескінченно малою* при  $x$ , що прямує до  $a$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що при  $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$  виконується нерівність:  $|f(x)| < \varepsilon$ .

**Означення.** Функція  $\alpha(x)$  називається *нескінченно великою* при  $x$ , що прямує до  $a$ , якщо для будь-якого  $N > 0$  існує число  $\delta(N)$  таке, що при  $|x - a| < \delta(N)$  виконується нерівність  $|\alpha(x)| > N$ , це можна записати так:  
 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \infty$ .

**Означення.** Нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  називаються *нескінченно малими одного порядку малості*, якщо границя їх відношення  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ .

**Означення.** Нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$  називають *еквівалентними*, якщо  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ . Їх позначають так:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ .

Таблиця 1

**Нескінченно малі (н. м.) і нескінченно великі (н. в.) послідовності та функції, зв'язок між ними**

Послідовність	Функція
<p>Послідовність <math>\{x_n\}</math> називається <i>нескінченно малою</i>, якщо</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$	<p>Функція <math>f(x)</math> називається <i>нескінченно малою</i> функцією (скорочено н. м. ф.) при <math>x \rightarrow a</math>, якщо</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$
<p>Послідовність <math>\{x_n\}</math> називається <i>нескінченно великою</i>, якщо</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty,$	<p>Функція <math>f(x)</math> називається <i>нескінченно великою</i> функцією (скорочено н. в. ф.) у точці <math>x = a</math> при <math>x \rightarrow a</math>, якщо:</p> $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$

Розглянемо деякі властивості н. м. і н. в. послідовностей і функцій

**Властивість 1.** Алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |x_n + y_n| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0.$$

**Властивість 2.** Добуток скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

**Властивість 3.** Добуток нескінченно малої послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою послідовністю.

Усі перераховані вище властивості мають місце і для нескінченно малих функцій.

Наведемо основні *еквівалентності* функцій.

1.  $\sin a(x) \sim a(x)$ ;

9.  $\sqrt[k]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{\alpha(x)}{k}$ ;

2.  $\operatorname{tg} a(x) \sim a(x)$ ;

10.  $\sqrt[k]{a^k + \alpha(x)} - a \sim \frac{\alpha(x)}{k \cdot a^{k-1}}$ ;

3.  $1 - \cos a(x) \sim \left(\frac{\alpha(x)}{2}\right)^2$ ;

11.  $a^{\alpha(x)} - a^{\beta(x)} \sim (\alpha(x) - \beta(x)) \ln a$ ;

4.  $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;

12.  $(1 + \alpha(x))^m - 1 \sim \alpha(x) \cdot m$ ;  
 $\alpha \rightarrow 0, m, k = \text{const}$

5.  $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ ;

6.  $e^{\alpha(x)} \sim \alpha(x)$ ;

13.  $a^\alpha - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ ;

7.  $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$ ;

14.  $e^{\alpha(x)} - e^{\beta(x)} \sim \alpha(x) - \beta(x)$ ;  
 $\alpha, \beta \rightarrow 0$

8.  $\log_a[1 + a(x)] \sim \alpha(x) \log_a e$ ;

15.  $a^{\alpha(x)} - b^{\beta(x)} \sim \alpha(x) \ln a - \beta(x) \ln b$ .

16.  $\ln U(x) \sim U(x) - 1$

## 2 ТЕОРЕМИ ПРО ГРАНИЦІ СУМИ, ДОБУТКУ І ЧАСТКИ ФУНКЦІЙ

З метою розв'язання деяких нижче наведених прикладів подамо властивості границь функцій.

Границі функцій мають такі властивості:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ , де  $C$  – константа,

2.  $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , де  $C$  – константа.

3. Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

4. Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

5. Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ , причому  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

6. Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

Ви часто будете зустрічатися з такими формулами. Звертаємо на них особливу увагу!

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \infty, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0. \quad K - \text{ константа}$$

Границя частки двох функцій не існує (дорівнює  $\infty$ ), якщо границя чисельника існує і відмінна від 0, а границя знаменника дорівнює нулю.

$$б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{K}{g(x)} = \frac{K}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} = 0, \text{ якщо } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty.$$

Границя частки двох функцій дорівнює 0, якщо границя чисельника існує, а границя знаменника дорівнює  $\infty$ .

Розглянемо деякі важливі границі, які у подальшому допоможуть при обчисленні границь.

### **3 ПЕРША ТА ДРУГА ЧУДОВІ ГРАНИЦІ**

*Необхідні знання про першу чудову границю*

Границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  (\*)

називають *першою чудовою границею*.

Зазначимо, що границя функції  $\frac{\sin x}{x}$  у точці  $x = 0$  має невизначеність

$$\frac{0}{0}.$$

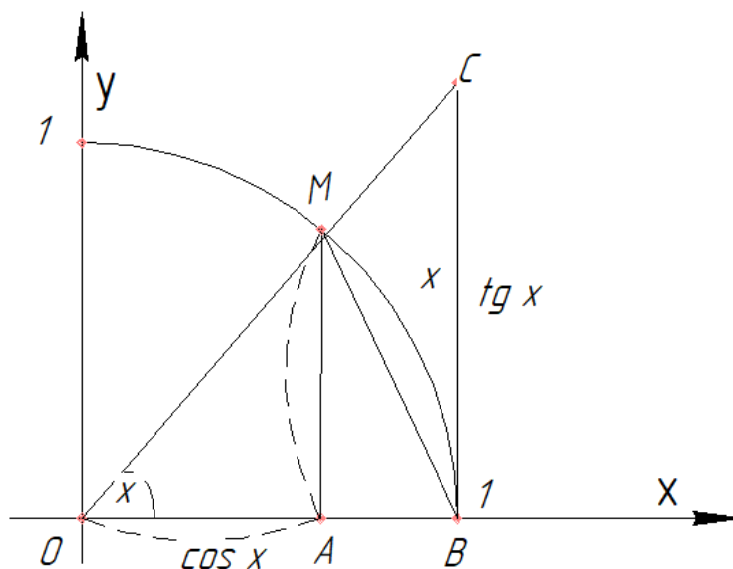


Рисунок 2

Доведемо формулу (\*). Візьмемо круг з одиничним радіусом (рис. 2) і позначимо радіальну міру кута  $COB$  через  $x$ . Нехай  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Запишемо співвідношення між площами трикутників  $OMB$ ,  $OCB$  та кругового сектора  $OMB$ :

$$S_{\triangle OMB} < S_{\text{сектора } OMB} < S_{\triangle OCB}$$

$$\text{де } S_{\triangle OMB} = \frac{1}{2} OB \cdot AM = \frac{1}{2} \sin x,$$

$$S_{\text{сектора } OMB} = \frac{1}{2} OM^2 \cdot x = \frac{1}{2} x,$$

$$S_{\triangle OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

$$\text{то } \frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x,$$

$$\text{звідси } 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad (\sin x > 0) \quad \text{або} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то за теоремою про границю проміжної функції існує границя

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Нехай тепер  $x < 0$ . Функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  парна:  $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ , тому

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Першу важливу границю широко використовують для обчислення границь виразів, що містять тригонометричні функції. За допомогою формули (\*) можна довести границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin kx}{x} = k;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} kx}{x} = k; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Розглянемо приклади на застосування першої чудової границі.

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

*Розв'язання.* Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Відповідь:  $\frac{1}{2}$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$

*Розв'язання.* Маємо невизначеність  $(0 \cdot \infty)$ . Нехай  $x-2=t$ ;

при  $x \rightarrow 2$ ,  $t \rightarrow 0$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(2+t)}{4} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{4}\right) =$$
$$= \lim_{t \rightarrow 0} t(-\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{4}) = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin \frac{\pi t}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

*Необхідні знання про другу важливу границю*

*Другою важливою границею називають границю*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Зазначимо, що ця формула справедлива як при  $x \rightarrow +\infty$ , так і при  $x \rightarrow -\infty$ . Графік функції  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  зображено на рис. 3.

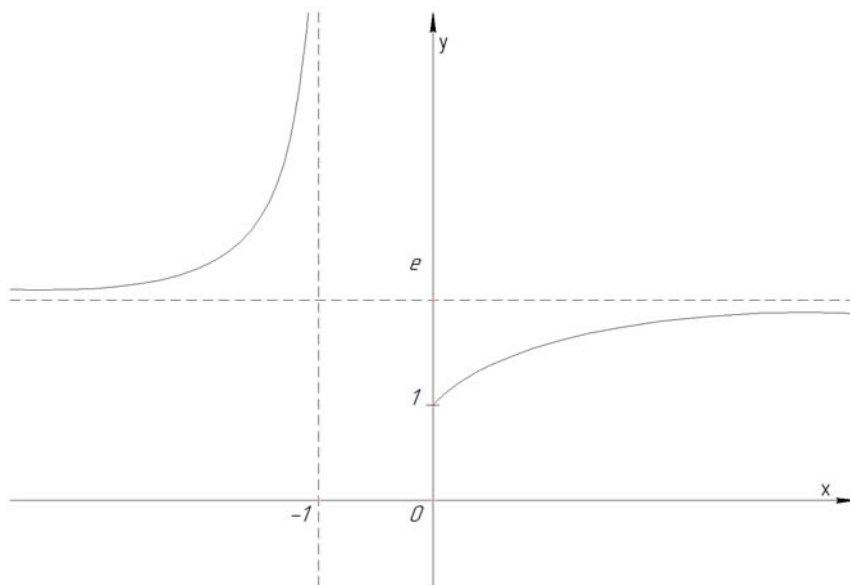


Рисунок 3



Виконавши у формулі (\*\*) заміну  $\frac{1}{x} = t$ , дістанемо формулу

$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ , яку також називають *другою важливою границею*.

Число  $e$  – трансцендентне число, його найближче значення з точністю до  $10^{-15}$  дорівнює 2,718281828459045.

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю  $1^\infty$  (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу  $u(x)^{v(x)}$ , де  $u(x) \rightarrow 1$ ,  $v(x) \rightarrow \infty$ , якщо  $x \rightarrow x_0$ ).

Наслідки з другої чудової границі:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^k = e^k$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = \log_a e;$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+k}{x}\right)^k = k;$$

При  $a = e$  формули 2) і 3) набувають вигляду:

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1+x^2)$

*Розв'язання.* Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_{\cos x} (1+x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln \cos 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-2\sin^2 x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot x^2}{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x} \cdot (-2\sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2\sin^2 x} = -\frac{1}{2}$$

Відповідь:  $-\frac{1}{2}$ .

Перейдімо до безпосереднього обчислення границь, розглянувши основні типи невизначеності, що зустрічаються при їх розв'язанні.

#### 4 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ФУНКЦІЙ

Перейдемо до безпосереднього обчислення границь функцій. При обчисленні границь можна зустрітися з різними випадками, які ми детально розглянемо у цьому розділі.

##### 4.1 Обчислення границь, що не містять невизначеності.

Для обчислення границі функції, за умови, коли змінна прямує до константи, необхідно у вираз, що міститься під знаком границі, підставити значення константи:

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + x - 4)$ .

*Розв'язання*

Використаємо властивості границь функцій (1), (2), (3), отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 = 5 \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 2} 4 = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 + x - 4) = 40 + 2 - 4 = 38.$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3}$

Використаємо властивість (5).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 3} = \frac{3}{4}.$$

**4.2 Розкриття невизначеностей типу  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ , (якщо під знаком границі стоїть дробово-раціональна функція  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ , де  $P_m(x)$  і  $Q_n(x)$  – многочлени)**

$$P_m(x) = p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_1 x + p_0,$$

$$Q_n(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_1 x + q_0, \text{ (якщо } x \rightarrow \infty \text{)}.$$

Необхідно кожен доданок чисельника і знаменника поділити на змінну в найбільшому показнику степеня.

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4}$

*Розв'язання*

Поділимо чисельник і знаменник дробу на  $x^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 - 7}{9x^3 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 4 \frac{x^2}{x^3} - \frac{7}{x^3}}{9 \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{x^3}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - 4 \frac{1}{x} - \frac{7}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (9 - \frac{4}{x^3})} \left\{ \begin{array}{l} \text{враховуючи, що} \\ \frac{k}{x^n} \rightarrow 0 \\ \text{при } x \rightarrow \infty \end{array} \right\} = \frac{1 - 4 \cdot 0 - 0}{9 - 0} = \frac{1}{9}$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+9}{7x^2-14}$

*Розв'язання*

Поділимо чисельник і знаменник дробу на  $x^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+9}{7x^2-14} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{9}{x^2}}{7 \frac{x^2}{x^2} - \frac{14}{x^2}} = \frac{0}{7} = 0.$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x+10}{x^2+9}$

*Розв'язання*

Поділимо чисельник і знаменник дробу на  $x^3$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x+10}{x^2+9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{9}{x^3}} = \frac{1}{0} = \infty$$

При обчисленні границь дробово-раціональних виразів  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  може бути декілька випадків:

а) якщо  $m > n$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \infty$ ;

б) якщо  $m < n$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = 0$ ;

в) якщо  $m = n$ , то  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = \frac{p_m}{q_m}$ , беремо коефіцієнти при

невідомих з однаковими показниками степеня.

Розкриття невизначеностей вказаного типу можна проводити застосувавши заміну многочлена на еквівалентний, тобто

$$p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m,$$

(1)

$$q_m x^m + \dots + q_1 x + q_0 \sim q_m x^m$$

(2)

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4}$ .

*Розв'язання.*

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x^2 - 7}{3x^3 - 4} = \left| \begin{array}{l} x^3 - 5x^2 - 7 \sim x^3, \\ 3x^3 - 4 \sim 3x^3, \quad x \rightarrow \infty \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x^3} = \frac{1}{3}.$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 4x + 1}{16x^2 + 7x + 3}}$ .

Застосуємо формули (1) і (2) до чисельника і знаменника дробу:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2 + 4x + 1}{16x^2 + 7x + 3}} = \left| \frac{9x^2 - x + 1 \approx 9x^2}{16x^2 + 7x + 3 \approx 16x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9x^2}{16x^2}} = \frac{3}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m x^m}{q_m x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_m}{q_m} = \frac{p_m}{q_m}.$$

### 4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$

а) Якщо вираз, що знаходиться під знаком границі, має вигляд

$$P_m(x) - Q_n(x)$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x - 15}{x - 4} - 2x \right).$

*Розв'язання.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2 + 3x - 15}{x - 4} - 2x \right).$$

Тут ми маємо невизначеність типу  $\{\infty - \infty\}$ . Для того, щоб перейти до невизначеності  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ , зведемо до спільного знаменника вирази, що знаходяться під знаком границі. Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 15 - 2x^2 + 8x}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x - 15}{2x - 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \left| \frac{11x - 15 \sim 11x, x \rightarrow \infty}{2x - 3 \sim 2x, x \rightarrow \infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x}{2x} = \frac{11}{2}.$$

### 4.3 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$

б) З ірраціональними виразами під знаком границі ( $x \rightarrow \infty$ )

Для розкриття таких невизначеностей потрібно помножити чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз.

**Приклад**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7} \right).$

*Розв'язання.* Помножимо чисельник і знаменник виразу, що знаходиться під знаком границі, на спряжений вираз. Будемо вважати, що знаменник одиниця.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7} \right) = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 7})(\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7})}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 3x + 8) - (x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 7}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \left| \begin{array}{l} \text{застосуємо формули (1) і (2)} \\ \text{до чисельника і знаменника} \\ \text{підграничного виразу} \end{array} \right| = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 1})$ .

*Розв'язання.* У цьому випадку отримаємо суму двох нескінченностей  $\{\infty + \infty\}$ , а тому невизначеності не буде.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty + \infty = \infty.$$

**4.4 Розкриття невизначеностей типу  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  при  $x \rightarrow a$ , під знаком границі знаходиться дробово-раціональний вираз  $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ .**

Щоб розкрити невизначеність  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  потрібно у чисельнику та знаменнику дроби, що знаходиться під знаком границі, виділити множник  $(x - a)$ .

Найчастіше для виділення множника  $(x - a)$  чисельник і знаменник дроби ділять кутом на множник  $(x - a)$ .

За теоремою Безу, якщо при підстановці у многочлен константи  $a$ , многочлен перетворюється в нуль, то цей многочлен розкладається на множники, серед яких обов'язково буде присутній множник  $(x - a)$ .

Якщо чисельник чи знаменник дробово-раціонального виразу є квадратичним тричленом, то його можна розкласти на множники за формулою:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (3)$$

де  $x_1$  та  $x_2$  – корені квадратного тричлена.

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{9x^2 - 8x - 1}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Оскільки  $x = 1$  є коренем многочленів, що стоять в чисельнику і знаменнику, то за теоремою Безу вони розкладаються на множники, серед яких обов'язково присутній множник  $(x - 1)$ .

У чисельнику виконаємо ділення  $x^3 + x^2 + x - 3$  на  $(x - 1)$  у стовпчик:

$$\begin{array}{r} x^3 + x^2 + x - 3 \quad | \quad x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} \phantom{+ x - 3} \quad | \quad x^2 + 2x + 3 \\ 2x^2 + x - 3 \\ \underline{2x^2 - 2x} \phantom{- 3} \\ 3x - 3 \\ \underline{3x - 3} \\ 0 \end{array} \quad , \text{ тоді } x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x + 3).$$

$9x^2 - 8x - 1$  розкладається на множники за формулою (3):

$$9(x - 1) \left( x + \frac{1}{9} \right) = (x - 1)(9x + 1).$$

Маємо  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)(9x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{9x + 1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

#### 4.5 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під

знаком границі містяться нескінченно малі функції (застосування таблиці еквівалентних функцій).

**Приклад.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin 5x \cdot \arcsin x} = \left. \begin{array}{l} 1 - \cos 4x = 2 \sin^2 2x \sim 2(2x)^2 = 8x^2, x \rightarrow 0 \\ \sin 5x \sim 5x, x \rightarrow 0 \\ \arcsin x \sim x, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{5x \cdot x} = \frac{8}{2} = 4.$$

**Приклад.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 1}{\ln(1 - 10x)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left. \begin{array}{l} 7^x - 1 \sim x \cdot \ln 7, x \rightarrow 0 \\ \ln(1 - 10x) \sim -10x, x \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \ln 7}{-10x} = -\frac{\ln 7}{10}.$$

**Приклад.** Довести, що при  $x \rightarrow 0$  н. м.  $e^{3x} - e^{2x}$  і  $\sin 2x - \sin x$  будуть еквівалентними.

**Розв'язання.** Знайдемо границю відношення цих функцій.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 2x - \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}(e^x - 1)}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \left. \begin{array}{l} \text{при } x \rightarrow 0 \\ e^x - 1 \sim x, \\ \sin \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}, \\ \cos \frac{3x}{2} \rightarrow 0, \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \cdot x}{2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 1} = 1.$$

Отже, за означенням ці величини еквівалентні.

#### 4.6 Розкриття невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під

знаком границі містяться ірраціональні вирази.

Такого типу границі розкривають шляхом домноження чисельника і знаменника дробу на спряжений вираз, до виразу, що містить ірраціональність.



**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ . Для її розкриття потрібно звільнитися від ірраціональності у чисельнику та знаменнику. З цією метою помножимо чисельник і знаменник дробу на вираз  $(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12}}{\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14}} &= \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x+10} - \sqrt{2x+12})(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(\sqrt{4x+8} - \sqrt{x+14})(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} &= \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x+10 - 2x - 12)(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(4x+8 - x - 14)(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} &= \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14})}{(3x-6)(\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12})} &= \\ = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+8} + \sqrt{x+14}}{\sqrt{3x+10} + \sqrt{2x+12}} = \frac{1}{3} \frac{4+4}{4+4} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

#### 4.7 Розкриття невизначеностей типу $\{0 \cdot \infty\}$ при $x \rightarrow a$

Щоб розкрити невизначеність типу  $\{0 \cdot \infty\}$ , її зводять шляхом елементарних перетворень до невизначеностей типу  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  або  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ .

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \{0 \cdot \infty\}$ .

**Розв'язання.** Перетворимо невизначеність  $\{0 \cdot \infty\}$  у невизначеність  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$  за допомогою елементарних перетворень.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-x)} = \\ = \left| \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-x) \sim \frac{\pi}{2} (1-x), 1-x \rightarrow 0 \right| &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\frac{\pi}{2} (1-x)} = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

#### 4.8 Розкриття невизначеностей типу $\{\infty - \infty\}$ при $x \rightarrow a$ , якщо під знаком границі міститься логарифмічна функція

Для розкриття такого роду невизначеностей їх зводять спочатку до невизначеностей типу  $\{0 \cdot \infty\}$  шляхом елементарних перетворень та властивостей логарифмічних функцій, а потім переходять до невизначеностей типу  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$  або  $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ .

Часто при обчисленні границь необхідно буде застосовувати властивості логарифмів. Наведемо основні з них:

Властивості логарифмів

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\log_a 1 = 0$                             | 6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x \quad (p \in R)$          |
| 2. $\log_a a = 1$                             | 7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b > 0, b \neq 1)$ |
| 3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$          | 8. $a^{\log_a b} = b$   |
| 4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ |   |
| 5. $\log_a x^p = p \log_a x \quad (p \in R)$  |   |

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+11) \cdot [\ln(x+4) - \ln(x-2)] = \{\infty - \infty\}$ .

*Розв'язання.* Використаємо властивості логарифмів

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+11) [\ln(x+4) - \ln(x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (x+11) \cdot \ln \frac{(x+4)}{(x-2)} \right] = \{\infty \cdot 0\} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+11) \left[ \ln \left( 1 + \frac{6}{x-2} \right) \right] =$$

$$= \left| \ln \left( 1 + \frac{6}{x-2} \right) \sim \frac{6}{x-2}, x \rightarrow \infty \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} (x+11) \cdot \frac{6}{x-2} = 6 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+11}{x-2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Поділивши чисельник і знаменник підграничного виразу} \\ \text{на } x \text{ отримаємо} \end{array} \right| = 6 \cdot \frac{1}{1} = 6$$

**4.9 Розкриття невизначеності типу  $\{1^\infty\}$  з використанням другої важливої граници**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (*)$$

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \left(1 + \alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e, \quad (**)$$

тут  $\alpha(x)$  довільна н. м. функція

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^x$ .

*Розв'язання. Спосіб I.* Маємо невизначеність  $\{1^\infty\}$ . Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (\*). Додамо і віднімемо 1 в основі виразу, що міститься під знаком граници.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x}{x+2} - 1\right)\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2}\right)^x =$$

показник  
степеня домножимо  
спочатку на  
 $-\frac{x+2}{2}$ , а потім на  
 $\frac{2}{x+2}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left(1 + \frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}} \right]^{\frac{-2}{x+2} \cdot x} .$

Вираз, що знаходиться у квадратних дужках, приведено до виду (\*),

де  $\alpha(x) = \frac{-2}{x+2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , тому  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{x+2}\right)^{\frac{x+2}{-2}} = e$ . Отже,

отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2}{x+2} \cdot x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{x}} = e^{\frac{-2}{1}} = e^{-2}.$$

**Приклад.**  $\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}}.$

*Розв'язання. Спосіб I.* Маємо невизначеність  $\{1^\infty\}$ . Виконаємо тотожні перетворення, які приведуть границю до виду (\*\*).

Зробімо заміну:

$$x-2=t, \text{ при } x \rightarrow 2, t \rightarrow 0,$$

$$x=t+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (5-2(t+2))^{\frac{2(t+2)}{t+2-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1-2t)^{\frac{2t+4}{t}}. \quad \text{Показник степеня}$$

домножимо на  $-2$  і на  $-\frac{1}{2}$   $\lim_{t \rightarrow 0} (1-2t)^{\frac{2t+4}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1-2t)^{\frac{-2 \cdot (2t+4)}{-2t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} (-2(2t+4))} = -8$

*Спосіб II.*

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{\frac{2x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\ln(5-2x) \frac{2x}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{2x}{x-2} \ln(5-2x)} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(1+(4-2x))}{x-2}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (4-2x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 2 \\ \ln(1+(4-2x)) \sim 4-2x \end{array} \right\} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{x-2}} = e^{4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{x-2}} = e^{-8}.$$

## 5 КЛАСИФІКАЦІЯ ОСНОВНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ПРИ РОЗКРИТТІ ГРАНИЦЬ ТА ШЛЯХИ ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Таблиця 2

	<b>Вигляд границі</b>	<b>Метод розв'язання</b>	<b>Приклад</b>
<b>Умова <math>x \rightarrow a</math></b>	$\lim_{x \rightarrow a} P_m(x)$ $P_m(x) =$	<p>Замість змінної в підграничний вираз підставляємо значення, до якого прямує змінна <math>x</math></p> $\lim_{x \rightarrow a} P_m(x) = P(a)$	$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 - 3x + 1 =$ $= 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 =$ $= 8 - 6 + 1 = 3$
	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ <p>Маємо невизначеність <math>\left\{ \frac{0}{0} \right\}</math></p>	<p>У чисельнику і знаменнику дробу виділяємо множник <math>x-a</math>. Для цього можна застосувати одну із формул:</p> $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ <p>де <math>x_1</math> і <math>x_2</math> – корені квадратного рівняння <math>ax^2 + bx + c = 0</math></p> $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ <p>Потім чисельник і знаменник дробу скорочуємо на <math>x-a</math></p> $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_m(x)}{Q_k(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{P_m(x)}{x-a}}{\frac{Q_k(x)}{x-a}} =$ $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{P_{m-1}(x)}{Q_{k-1}(x)}$ <p>Якщо після ділення знову <math>\left\{ \frac{0}{0} \right\}</math>, отримаємо невизначеність то знову виділяємо у чисельнику і знаменнику <math>x-a</math> і здійснюємо ділення на <math>x-a</math></p>	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)} =$ $= 12$ <p>Розклали на елементарні множники і скоротили на <math>x-2</math></p> $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x-6} = \frac{3}{4}$

<b>Умова</b> $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ <p>Відношення нескінченно малих функцій (н. м. ф)</p>	<p>Застосовуємо таблицю еквівалентностей для нескінченно малих функцій</p> $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\operatorname{arcsin} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$ $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ $\log_b(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_b e$ $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ $(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b \cdot \alpha(x)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{5x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ $= \{8^x \approx x \ln 8\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln 8}{5x} = \frac{\ln 8}{5}$
<b>Умова</b> $x \rightarrow a$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - p(x)}{g(x)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$ <p>Відношення нескінченно малих функцій (н. м. ф)</p> <p>Вираз під знаком границі містить різницю (суму) тригонометричних функцій</p>	<p>Застосовуємо одну із формул</p> $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin 4x}{\sin 2x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cos \frac{10x+4x}{2} \sin \frac{10x-4x}{2})}{\sin 2x} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 7x \sin 3x}{\sin 2x} =$ $= \left\{ \begin{array}{l} \text{застосуємо таблицю} \\ \text{еквівалентних функцій} \end{array} \right\} =$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 7x \cdot 3x}{2x} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 2$

<p style="text-align: center;"><b>Умова</b> <math>x \rightarrow \infty</math></p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ <p>Границя відношення многочленів</p> $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$	<p>Чисельник і знаменник дробу ділимо на змінну в найбільшому показнику степеня</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} \text{ якщо } k > m$ $\frac{P_k(x)}{x^k}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} \text{ якщо } m > k$ $\frac{P_k(x)}{x^m}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 4}{7x^3 + x - 2} =$ $= \left\{ \begin{array}{l} \text{чисельникі} \\ \text{знаменник} \\ \text{дробу ділимо} \\ \text{на } x^3 \end{array} \right\} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}}{7 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} =$ $= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3})}{\lim_{x \rightarrow \infty} (7 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})} = \frac{2}{7}$
<p style="text-align: center;"><b>Умова</b> <math>x \rightarrow \infty</math></p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (P_p(x) - Q_n(x))$ <p>маємо невизначеність типу <math>\infty - \infty</math></p>	<p>Зводимо дробу до спільного знаменника.</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ <p>При чому може утворитися невизначеність типу <math>\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}</math></p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right) =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{21x^2 - 2x}{3x} - 7x \right) =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{21x^2 - 2x - 21x^2}{3x} =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{2x}{3x} \right) = -\frac{2}{3}$
<p style="text-align: center;"><b>Умова</b> <math>x \rightarrow \infty</math></p>	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{P_k(x)} - \sqrt{Q_k(x)})$ <p>Маємо невизначеність типу <math>\infty - \infty</math></p>	<p>Домножуємо і ділимо на спряжений вираз</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{P_k(x)} - \sqrt{Q_k(x)})(\sqrt{P_k(x)} + \sqrt{Q_k(x)})}{\sqrt{P_k(x)} + \sqrt{Q_k(x)}}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4}) =$ $= \{\infty - \infty\} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+4})(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2-x-4}{(\sqrt{x-2} + \sqrt{x+4})} = \left\{ \frac{-6}{\infty} \right\} = 0$

<b>Умова</b> $x \rightarrow \infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)}$  Невизначеність типу $\{1^\infty\}$	Застосовуємо правило другої чудової границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2-3}{3x+2}\right)^{x-3} =$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3x+2}\right)^{x-3} =$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{3} \cdot (x-2) \cdot \left(-\frac{3}{3x+2}\right)} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{3x-6}{3x+2}\right)} = e^{-1}$
-------------------------------------	---	--	--



## 6 МОДЕЛЮВАННЯ ПРОФЕСІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ІНЖЕНЕРА

Розглянемо декілька задач інженерного характеру.

**Завдання.** Матеріальна точка коливається по колу біля свого середнього положення за законом  $x = A \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin \omega \cdot t$ , де  $(A, k, \omega > 0)$ . Знайдіть  $\lim_{t \rightarrow \infty} x$ .

*Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю функції  $\lim_{t \rightarrow \infty} A \cdot e^{-k \cdot t} \sin \omega \cdot t$  за допомогою СКМ.*

Відповідь:  $\lim_{t \rightarrow \infty} x = 0$  – коливання згасають.

**Завдання** Розрахунок робочого колеса турбіни приводить до рівняння  $\ln y = -k^2 \cdot x^2 + \ln y_0$ , де  $y$  – товщина колеса на відстані  $x$  від осі обертання,  $y_0$  – значення  $y$  при  $x = 0$ . Знайдіть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0}$ .

*Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Скористайтесь основною логарифмічною тотожністю та властивостями степеня для вираження відношення  $\frac{y}{y_0}$ :*

$$y = e^{-k^2 \cdot x^2 + \ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot e^{\ln y_0} = e^{-k^2 \cdot x^2} \cdot y_0.$$

*Знайдіть границю функції  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-k^2 \cdot x^2}$  за допомогою СКМ.*

Відповідь:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{y_0} = 1$ .

**Завдання.** Висота частини вертикального струменя фонтану наближено виражається формулою  $h = \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$ , де  $H$  – величина напору води в насадках (у метрах водяного стовпа),  $\varphi$  – коефіцієнт, що визначається діаметром  $d$  (мм) вихідного перерізу насадки.

Побудуйте графіки залежності  $h(H)$  при різних значення  $\varphi$ :  $\varphi = 0,023$ ,  $\varphi = 0,009$ ,  $\varphi = 0,004$ ; дослідіть та порівняйте поведінку відповідних функцій.

*Переформулюйте задачу математичною мовою, тобто знайдіть  $\lim_{H \rightarrow \infty} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H}$  за допомогою СКМ.*

Значення цієї границі  $\frac{1}{\varphi}$  вказує на існування горизонтальної асимптоти  $h = \frac{1}{\varphi}$  (при  $\varphi = 0,23$ ,  $h = 43,48$ , тобто необхідно побудувати лінію  $y(x) = 43,48$ ). Для інтерпретації результатів порівняння отриманих залежностей побудуйте за допомогою ППЗ графіки залежностей при різних значеннях  $\varphi$ , з урахуванням того, що за змістом задачі  $h$  обмежено відрізком  $[0; H]$ .

Відповідь: при збільшенні  $\varphi$  висота струменя зменшується, причому зміна величини напору при збільшенні  $\varphi$  майже не впливає на висоту струменя; при зменшенні  $\varphi$   $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{H}{1 + \varphi \cdot H} = H$ , тобто висота струменя прямує до  $H$ .

**Завдання.** Динамічна самоіндукція антени при постійному подовженні хвилі на одиницю довжини виражається формулою

$$L = L_0 \frac{\operatorname{tg}(\pi l / \lambda)}{2\pi l / \lambda}, \text{ де } L - \text{динамічна самоіндукція; } L_0 - \text{статична}$$

самоіндукція;  $l$  – діюча довжина антени;  $\lambda$  – довжина хвилі антени. Знайти  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L$ .

Переформулюйте умову завдання математичною мовою. Знайдіть границю послідовності  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_0 \frac{\operatorname{tg}(\pi \cdot l / \lambda)}{2 \cdot \pi \cdot l / \lambda}$  за допомогою ППЗ.

$$\text{Відповідь: } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L = L_0 \cdot \sqrt{2}.$$

## 7 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО РОЗРАХУНКУ

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{x^3 + 1} - 3x^2 \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Маємо невизначеність} \\ \{\infty - \infty\} \end{array} \right\}$$

Зведемо вирази до спільного знаменника

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{x^3 + 1} - 3x^2 \cdot \frac{x^3 + 1}{x^3 + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{3x^5} + 2x^3 + 1 - \cancel{3x^5} - 3x^2}{x^3 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Поділимо чисельник і} \\ \text{знаменник на } x^3 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \left(\frac{3}{x}\right)^{\nearrow 0} + \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\nearrow 0}}{1 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^{\searrow 0}} = 2.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \left( \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{x^2 + 3x} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{При підстановці } x = -3 \\ \text{отримаємо } \left\{ \frac{0}{0} \right\} \end{array} \right\}$$

Розкладемо чисельник і знаменник на множники.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2(x+1) - 9(x+1)}{x(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+1)(x-3)(\cancel{x+3})}{x(x+3)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos 2x - \cos 9x}{\operatorname{tg}^2 2x} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Скористаємося формулою} \\ \cos \alpha x - \cos \beta x = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} x \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} x \end{array} \right\}$$

$$\cos 2x - \cos 9x = -2 \sin \frac{2x + 9x}{2} \cdot \sin \frac{2x - 9x}{2} = -2 \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \left( -\frac{7x}{2} \right) = 2 \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \frac{7x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{11x}{2} \cdot \sin \frac{7x}{2}}{\operatorname{tg}^2 2x} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{11x}{2} \sim \frac{11x}{2} \\ \sin \frac{7x}{2} \sim \frac{7x}{2} \\ \operatorname{tg}^2 x \sim 2x \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{11x}{2} \cdot \frac{7x}{2}}{(2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{77x^2}{4x^2} = \frac{77}{8}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{17-x} - 4}{x^3 - 1} \left\{ \begin{array}{l} \text{Підставимо } 1 \\ \text{замість змінної у вираз,} \\ \text{що міститься під знаком} \\ \text{границі} \end{array} \right\} = \frac{0}{0}$$

Домножимо чисельник і знаменник виразу, що міститься під знаком границі на  $\sqrt{17-x} + 4$ ; знаменник виразу розкладемо за формулою  $a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$  Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{17-x} - 4)(\sqrt{17-x} + 4)}{(x-1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{17-x} + 4)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{17-x-16}{(x-1)(x^2 + x + 1)(\sqrt{17-x} + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (\sqrt{17-x} + 4)} = -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} (9-4x)^{\frac{x}{x-2}} \{1^\infty\}$ . Невизначеність розкриваємо за правилом другої

чудової границі.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$  або  $\lim_{n \rightarrow 0} (1+n)^{\frac{1}{n}} = e$

Зробимо заміну  $\begin{matrix} x-2=t \\ x=t+2 \end{matrix}$  якщо  $x \rightarrow 2$ , то  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} (9-4(t+2))^{\frac{t+2}{t+2-2}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1-4t)^{\frac{t+2}{t}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Домножимо чисельник і знаменник} \\ \text{показника на } -4 \end{array} \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1-4t)^{\frac{t+2(-4)}{-4t}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} (-4)(t+2)} = e^{-8} \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{e^{3x} - 1} \left\{ \begin{array}{l} \arcsin 5x \sim 5x \\ e^{3x} - 1 \sim 3x \\ \text{застосували таблицю еквівалентності функцій} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-5}{6x} \right)^{3x} = \{1^\infty\} \text{ застосуємо правило другої чудової границі}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6x-5}{6x} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{5}{6x} \right)^{3x \cdot \left( -\frac{6x}{5} \right) \cdot \left( -\frac{5}{6x} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{15x}{6x}} = e^{-\frac{15}{6}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) [\ln x - \ln(7+9x)] \text{ . Маємо невизначеність типу } \{\infty - \infty\}$$

Скористаємося властивостями логарифмів:

$$p \log_a x = \log_a x^p$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{x}{9x+7} \right)^{x+2} = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{9x+7} \right)^{x+2} = \ln \frac{1}{9} = \ln \left( \frac{1}{9} \right)^\infty = \ln \infty = \infty$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Підставимо 0 замість} \\ \text{змінної } \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Застосуємо таблицю еквівалентних функцій

$$\{5^{\sqrt{x}} - 1 \sim \sqrt{x} \ln 5\} \text{ отримаємо: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\sqrt{x}} \ln 5}{\cancel{\sqrt{x}}} = \ln 5$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+11} - \sqrt{x-1})$$

Отримаємо невизначеність  $\{\infty - \infty\}$ . Домножимо і поділимо на спряжений

вираз до виразу, що знаходиться під знаком границі. Тобто на

$$\frac{\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+11} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1})} =$$

У чисельнику застосуємо формулу  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+11 - (x-1)}{\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x} + 11 - \cancel{x} + 1}{\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{\sqrt{x+11} + \sqrt{x-1}} = \frac{12}{\infty} = 0$$

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt[5]{x^5+13}}$  Підкореневий вираз у знаменнику  $x^5+13 \sim x^5$  при  $x \rightarrow \infty$

Отримаємо границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt[5]{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{x} = 1$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{e^{x-1} - 1}$

Заміна для зручності  $\begin{matrix} x-1 = t \\ x \rightarrow 1, t \rightarrow 0 \end{matrix}$ . Отримаємо:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{e^t - 1} \left\{ \begin{matrix} \sin t \sim t \\ e^t - 1 \sim t \end{matrix} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}} = 1$$

13. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+1}{2x^3+1} =$

Розділимо чисельник і знаменник на  $x$  в максимальному степені, тобто на  $x^3$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{2}$$

14)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7} =$

Підставимо у підграничний вираз замість аргумента число, до якого прямує аргумент. Отримаємо невизначеність вигляду  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ . Домножимо чисельник і знаменник цього дробу на вираз, спряжений до чисельника.

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{2+x}+3)(\sqrt{2+x}-3)}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2+x-9}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{2+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{\sqrt{2+x}+3} =
 \end{aligned}$$

Спробуємо знову підставити значення  $x = 7$  у вираз, що міститься під знаком границі. Отримаємо:

$$= \frac{1}{\sqrt{2+7}+3} = \frac{1}{6}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x)}{5x} =$$

Скористаємося однією з форм записів першої чудової границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$$

Для того, щоб аргумент функції і знаменник були однакові, домножимо чисельник і знаменник виразу, що міститься під знаком границі, на 3:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin(3x)}{5 \cdot 3 \cdot x} = \frac{3}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(3x)}{3 \cdot x} = \frac{3}{5}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$$

Знайдемо границю, до якої прямує основа степеня.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right) = \text{(розділимо чисельник і знаменник на } x \text{ в максимальному}$$

степені, тобто на } x \text{ )} = \lim\_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x}} = \frac{2}{2} = 1. \text{ Знайдемо границю, до якої}

наближається показник степеня:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ .

Оскільки основа показника степеня наближається до 1, а показник степеня наближається до нескінченності, то при обчисленні цієї границі застосуємо правило другої чудової границі:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1-1-1}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{2x+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 + \frac{-2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-2}} \right)^{\frac{-2}{2x+1} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{-2}{2x+1}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2x}{2x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{2x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{2 + \frac{1}{x}}} = e^{-1}$$



## 8 ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

### Варіант 1

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2}}{6x + 8}; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 - 4x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{3 \sin^2 x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{3x}{x-1}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\operatorname{tg} 4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{2^x - 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(6x + 5) - \ln x]; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x + 1}{6x}\right)^{2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 5}).$$

### Варіант 2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^6 + 5x^4 + 4}{x^6}; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 3x^2}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 6}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 9x - 1}{5 \sin^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^2 + x^3}; \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 4x)^{\frac{2x}{x-2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 5x)}{3^x - 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(7x + 6) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{2x} - 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x + 1}{8x}\right)^{3x}.$$

### Варіант 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 8x^2 + 7x}{x^3 - x}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 3}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 8x^2} - 1}{2x^2 + x^3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 2x}; \lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{3x}{x-2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 4x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}; \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(5x + 7) - \ln x]; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 7x)}{5^x - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 3}{5x}\right)^{4x}.$$

### Варіант 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + 6x^2} - 5}{5x^2 - x - 1}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6x + 8}{x^3 - 8}; \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln x - \ln(2x + 9)]; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{5}}{x - 3};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\arcsin 2x}; \lim_{x \rightarrow 1} (6x - 5)^{\frac{2x}{x-1}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{e^{5x} - 1}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^3 - 1}{\ln(1 + 3x)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 5}{2x + 1}\right)^{-x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x^2 - 7}).$$

### Варіант 5

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^3 + x - 2}; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^2 - 3x - 4}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8} - \sqrt{x^2 - 3}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 7)^{\frac{6x}{x-2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{e^{2x^2} - 1}; \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+8) - \ln(x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\ln(1+6x)}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-6}{3x+1}\right)^{1-x};$$

### Варіант 6

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 2x^3 + 1}{2x^5 - 3x^2 + 2}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\ln(1-2x)}; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - x}{x-5};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\operatorname{tg} 3x}; \lim_{x \rightarrow 5} (6-x)^{\frac{5x}{x-5}}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{4x}; \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)[\ln(x+2) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{\sin 2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 2} - x).$$

### Варіант 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}; \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-9}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\operatorname{tg} x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-x) - \ln(5-x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (5-4x)^{\frac{x}{2x-2}}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right);$$

### Варіант 8

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2+2}{x-1} - 3x\right); \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}; \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x - 3}); \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{3x-x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin x}{3\operatorname{tg} 2x}; \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x^2)^{\frac{2x-1}{x^2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin 2x}; \lim_{x \rightarrow \infty} (3x-2)[\ln(2x-1) - \ln(2x+1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x - 1}{\sin x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{1-x};$$

## Варіант 9

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 - 2x^4 + 3}}{2x^2 + 3x - 4}; \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x + 21}; \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x + 4}); \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}{\operatorname{tg}^2 x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}; \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 9x^2)^{\frac{2x+1}{3x^2}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sqrt{x}} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)[\ln(2x + 3) - \ln(2x - 4)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 8x)}{\sin 3x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x+1}\right)^{x^2};$$

## Варіант 10

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x^2 - 3}{5x^3 - 3x + 4}; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}; \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 7} - \sqrt{x^2 - 8}); \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{x^2 - 9x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{\arcsin^2 x}; \lim_{x \rightarrow 3} (4 - x)^{\frac{3x}{x-3}}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3x)}{\operatorname{tg} 4x}; \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x)[\ln(1 - x) - \ln(2 - x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin 2x} - 1}{x}; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-8}{3x-5}\right)^{-x};$$

## Варіант 11

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{2x + 1} \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 9x + 5} - x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\cos 2x - \cos 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x + x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{4x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x-3) - \ln(2x+5)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5 - 2x)^{\frac{x}{x-2}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-5}\right)^{3x}$$

## Варіант 12

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 3x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 3} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 10}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x^2 - 3x} \quad \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x)^{\frac{3x}{x+1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) [\ln(1-2x) - \ln(5-x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+9x)}{\operatorname{arctg} 3x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x-5}\right)^{-2x}$$

### Варіант 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt[3]{x^2}}{2x + 5} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 11} - x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} \quad \lim_{x \rightarrow -2} (3 + x)^{\frac{2x}{x+2}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\ln(1 - 7x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(3x + 1) - \ln(3x - 1)] \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 6}{x + 5} \right)^{-2x}$$

### Варіант 14

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 8x - 2}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 10} - \sqrt{x - 2}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\arcsin^2 x} \quad \lim_{x \rightarrow -3} (x + 4)^{\frac{x}{x+3}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 2) [\ln(2 - 3x) - \ln(4 - x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{e^{\operatorname{tg} 3x} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 2}{x - 9} \right)^{3x}$$

### Варіант 15

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x + 11}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{6x} - x}{x - 6} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (3x - 2)^{\frac{6x}{x-1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{5x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) [\ln x - \ln(2x - 4)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x - 2)}{e^{x-2} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x + 8}{x + 3} \right)^{2x}$$

### Варіант 16

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2 + 4}{3x^4 + 5x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 9} - \sqrt{x - 7}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{x^2 - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2x - 1)^{\frac{2x}{x^2 - 1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^x - 1}{\ln(1 + 2x)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) [\ln(1 - x) - \ln(6 - x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - 4}{x - 9} \right)^{3x}$$

### Варіант 17

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{8x^3+7}} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+12}-x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{x-2}}{x^2-16} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1-\cos 3x} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{6x}{x-2}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(3x+5)-\ln x]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\operatorname{tg} 2x} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+7}\right)^{2x}$$

### Варіант 18

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+4x^2+4x}{x^2+x-2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x-\sqrt{x^2+15}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{\arcsin 2x} \quad \lim_{x \rightarrow -2} (2-x)^{\frac{5x}{1-x}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-9x)}{\operatorname{tg} 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x)[\ln(1-x)-\ln(5-x)] \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{e^{x-1}-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-6}\right)^{-2x}$$

### Варіант 19

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^2-1} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+14}-\sqrt{x}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x-1}{x \tan 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{7x-x}}{x^2-7x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\ln(1+9x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x-1}{\sin 3x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x+6)-\ln(x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{2x}{x-1}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x-5}\right)^{3x}$$

### Варіант 20

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x}}{5x^2+3x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2+x-6}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1}-\sqrt{x-7}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{\sin^2 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2}-1}{x \operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2x+1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(4x+3)-\ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^{\sin x}-1}{\ln(1-x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+2}{5x-6}\right)^{-2x}.$$

### Варіант 21

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x - \frac{2+5x^2}{x-4}); \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^2 + x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + 15}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - 1}{x \operatorname{tg} x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\arcsin 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-2x} - 1}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\sin x} - 1}{\ln(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)[\ln(2-x) - \ln(3-4x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{x+1}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x+4}{3x-5})^{1-x}.$$

### Варіант 22

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 4x^2 + 3}{2x^3 + 3x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^2 + 4x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+13} - \sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \sin 3x}{\sin 2x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4-x} - 1}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{10^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x[\ln(1-5x) - \ln(2-x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{8x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2x+3}{2x-7})^{2-x}.$$

### Варіант 23

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-6x+7x^4}{\sqrt{4x^8+3x^2-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 - 9x + 9}{x^2 + x - 12}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+12} - \sqrt{x^2-13}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{e^{3x^2} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{7-6x} - 1}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg}^2 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{x+1}{x}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(5+2x) - \ln x];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 1}{\ln(1-3x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+5}{x-8})^{2x-1}.$$

### Варіант 24

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{6x^2 - 1}{2+3x} - 2x); \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + x^2 - 9x + 9}{x^2 + 2x - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+11} - \sqrt{x^2-2}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+4x^2} - 3}{x^2 - 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (5-4x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{e^{2x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-3x)[\ln(1-x) - \ln(2-3x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{\ln(1+2x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{2x}.$$

### Варіант 25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{2x^2+3}{1+2x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3x-2}{x^2-4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+7x+6} - x); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \cos 2x}{\operatorname{tg} 3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{6x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (6-5x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)[\ln(1-3x) - \ln(2-x)]; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\arcsin 4x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+7}{x-1}\right)^{2x}.$$

### Варіант 26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10}+3x^6+1}}{2x^2+5x-4}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^2+x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-3x+4}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\cos 3x - \cos x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{10-x}-3}{2x-2}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} (7-3x)^{\frac{x}{x-2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{x^6+3x^8}}{e^{4x}-1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-3)[\ln x - \ln(5x+8)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8^{\operatorname{tg} x} - 1}{\ln(1-5x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+6}\right)^{x-1}.$$

### Варіант 27

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-3x^2+4x^3}{1+3x^2+5x^3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-9x+9}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x+16}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{\sqrt{x^2+4}-2};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{\operatorname{tg}^2 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} (3+2x)^{\frac{3x}{x+1}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - 1}{\ln(1+3x)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x[\ln(x-5) - \ln(2x+1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{6^{\operatorname{tg} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{-x}.$$

### Варіант 28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4+3x^2-4}{5x^4-3x^2+6}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2-4}{x^2+4x+4}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+14} - \sqrt{x-1}); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{x^2-4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos 6x-1}{x \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} (9+4x)^{\frac{x}{x+2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x)[\ln(2-5x) - \ln(2-x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{\sin x} - 1}{\ln(1-4x)}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{x+2}.$$

### Варіант 29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2-4}{1+3x} - x\right); \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3-3x-2}{x^2+2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-9}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{8^{\operatorname{tg} x} - 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8x} - \sqrt{8}}{x^2 - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\cos x - \cos 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{2x}{x-1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+3) - \ln(4x-1)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{8^{\operatorname{tg} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5}\right)^{-x}.$$

### Варіант 30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 3x^2 - 1}}{5x^3 - 2x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+8} - \sqrt{x}); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \operatorname{arctg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} (5-x)^{\frac{4x}{x-4}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-3x) - \ln(5-3x)];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+6x)}{e^{\operatorname{tg} x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2-4}\right)^{x^2}.$$



## 9 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

$$2. \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

$$8. \lim_{\substack{x \rightarrow 1+0 \\ x \rightarrow -1-0}} \arccos \frac{1}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} e^{\frac{2x}{1-x^2}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm 0} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$$

$$6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0+0 \\ a > 1}} \frac{\ln(ax)}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0 \pm 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}$$

$$14. \lim_{\substack{x \rightarrow 0-0 \\ x \rightarrow -\infty}} \arcsin(e^x)$$

### Додаткові завдання підвищеної складності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ , скористатись формулою  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{ka}{n^2}\right)$ ,  $a - \text{const}$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ , ( $a > 1$ ).

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ .

18) Побудувати графіки функцій:

а)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n}$  ( $x > 0$ );

б)  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$  ( $x \geq 0$ );

в)  $y = (\cos(x))^{2n}$ .

## 10 ОСНОВНІ ПІДКАЗКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ

$$\left\{ \frac{C}{0} \right\} = \infty; \quad \left\{ \frac{C}{\infty} \right\} = 0; \quad \left\{ \sqrt[n]{\infty} \right\} = \infty.$$

### Таблиця еквівалентних функцій

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{(\alpha(x))^2}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arcsin} \alpha(x) \sim \alpha(x)$$

$$b^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln b$$

$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$\log_b(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \log_b e$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$(1 + \alpha(x))^b - 1 \sim b \cdot \alpha(x)$$

### Алгоритм розкриття найпростіших невизначеностей

1.  $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ ,  $x \rightarrow \infty$ , частка многочленів або ірраціональних виразів  $\Rightarrow$

необхідно і чисельник, і знаменник поділити на  $x$  у старшому степені.

2.  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ ,  $x \rightarrow x_0$ , частка многочленів  $\Rightarrow$  необхідно і в чисельнику, і в

знаменнику виділити множник  $x - x_0$ , використавши формули скороченого множення або діленням і чисельника, і знаменника на  $x - x_0$ .

3.  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ ,  $x \rightarrow x_0$ ,  $\frac{\sqrt{\quad} - P_n(x)}{Q_m(x)}$  або  $\frac{P_n(x)}{\sqrt{\quad} - Q_m(x)}$  або  $\frac{\sqrt{\quad} - P_n(x)}{\sqrt{\quad} - Q_m(x)}$  або

$\frac{\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}}{Q_m(x)}$  або  $\frac{P_n(x)}{\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}}$  або  $\frac{\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad} - \sqrt{\quad}} \Rightarrow$  необхідно і в чисельнику, і в

знаменнику виділити множник  $x - x_0$ , для цього потрібно позбутись коренів, помноживши та поділивши на спряжений вираз.

4.  $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ ,  $x \rightarrow x_0$ , є тригонометричні, показникові, логарифмічні, обернені тригонометричні функції  $\Rightarrow$  необхідно і в чисельнику, і в знаменнику виділити множник  $x - x_0$ , використавши таблицю еквівалентних функцій.

5.  $\{1^\infty\}$ ,  $x \rightarrow x_0 \Rightarrow$  необхідно використати другу важливу границю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e \quad (\text{де } \alpha(x) \text{ – нескінченно мала функція при } x \rightarrow x_0).$$

## 11 ТЕСТИ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

### 1. Наступне означення

число  $b$  називається границею функції  $f(x)$  у точці  $x = a$  (або при  $x \rightarrow a$ ), якщо для будь-якої збіжної до  $a$  послідовності значень аргументу  $x$ , відмінних від  $a$ , відповідна послідовність значень функції збігається до числа  $b$

$$\forall \{x_n\}, x_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$$

є означенням границі функції:

- а) по Гейне;
- б) по Коші;
- в) по Абелю;
- г) геометричне означення границі.

2. Запис  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$ , визначає:

- а) границю функції  $f(x)$  у точці  $x_0$ ;
- б) правосторонню границю функції  $f(x)$ ;
- в) лівосторонню границю функції  $f(x)$ ;
- г) інша власна відповідь.

3. Якщо послідовність  $x_n$  має границю, то її називають:

- а) обмеженою;
- б) зростаючою;
- в) збіжною;
- г) розбіжною.

4. Наступним обчисленням  $\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{1-0-1}} = e^{\frac{1}{-0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

визначено

- а) значення функції в точці  $x=1$ ;
- б) правосторонню границю функції в точці  $x=1$ ;
- в) лівосторонню границю функції в точці  $x=1$ ;
- г) інша власна відповідь.

5. Якщо при  $x \rightarrow a$  виконується рівність:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

Функція  $f(x)$  називається:

- а) нескінченно великою;
- б) нульовою;
- в) нескінченно малою;
- г) невизначеною.

6. Вираз  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  називається:

- а) першою чудовою границею;
- б) другою чудовою границею;
- в) ознакою порівняння границь;
- г) умовною одиницею.

7. Вираз  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  називається

- а) ексцентриситетом;
- б) другою чудовою границею;
- в) правилом переходу;
- г) визначити не можливо.

8. Обчислити  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3}$

а)  $\frac{3}{4}$  б) 1; в)  $1\frac{1}{7}$ ; г) 0.

9. Обчислити границю  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 10}{x^2 + 9}$

а) 1; б) -3; в)  $\infty$ ; г) 0.

10. Вкажіть правильну еквівалентність при  $x \rightarrow \infty$

а)  $p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_m x^m$ ;

б)  $p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim 0$ ;

в)  $p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim 1$ ;

г)  $p_m x^m + \dots + p_1 x + p_0 \sim p_0$ .

11. Вкажіть правильну еквівалентність при  $x \rightarrow \infty$

а)  $9x^3 - 5x^2 - 7 \sim 9x^3$ ;

б)  $9x^3 - 5x^2 - 7 \sim 9$ ;

в)  $9x^3 - 5x^2 - 7 \sim 0$ ;

г)  $9x^3 - 5x^2 - 7 \sim -7$ .

12. Обчислити  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+2} \right)^x$

а)  $e^{-2}$ ; б) 4; в)  $\frac{1}{4}$ ; г)  $e$ .

## *ГЛОСАРІЙ*

*Аргумент* – Independent argument, Predictor; Argument

*Границя* – Limit

*Границя послідовності* – Limit of sequence,

*Границя функції* – Limit of function, Two-sided limit of function

*Границя функції справа* – Limit from above, Right-handed limit

*Границя функції зліва* – Limit from below, Left-handed limit

*Дробово-раціональна функція* – Rational function, Fractional rational function, Quotient of polynomials

*Еквівалентні нескінченно малі* – Equivalent infinitesimal

*Еквівалентні нескінченно малі функції* – Equivalent functions

*Невизначеність* – Ambiguity, Uncertainty

*Нескінченність* – Infinity

*Нескінченно велика функція в точці* – Infinite function at point

*Нескінченно малі еквівалентні* – Equivalent infinitesimal,

*Нескінченно мала функція в точці* – Infinitesimal function at point

*Окіл точки* – Neighborhood of point

*Послідовність* – Sequence

*Послідовність збіжна* – Convergent sequence

*Послідовність розбіжна* – Divergent sequence

*Функція* – Function

*Функція обмежена* – Limited Function

## *ЛІТЕРАТУРА*

1. Вища математика. Основні означення, приклади, задачі / За ред. Г. Л. Кулініча. – К., 1992.
2. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
3. Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.
4. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. У 2 ч. : навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, М. Я. Лященко. – К. : Вища школа, 2003. – Ч. 1.
5. Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф. С. Гудименка. – К. : Вид-во Київ. ун-ту, 1967. – 352 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа / Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1989.
7. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике: типовые расчеты / Кузнецов Л. А. – М. : Высш. шк., 1983.
8. Овчинников П. Ф. Высшая математика. / Овчинников П. Ф., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М. – К. : Вища школа, 1987.
9. Пак В. В. Вища математика / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996.



*Навчальне видання*

**Коломієць Альона Анатоліївна  
Клочко Віталій Іванович  
Красівський Володимир Олександрович**

**Практикум з вищої математики:  
обчислення границь**

Практикум

Рукопис оформила *А. Коломієць*

Редактор *О. Ткачук*

Оригінал-макет виготовлено *О. Ткачуком*

Підписано до друку 19.06.2020.  
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.  
Гарнітура Times New Roman.  
Друк різнографічний. Ум. друк. арк. 3,23.  
Наклад 50 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2020-072.

Видавець та виготовлювач  
Вінницький національний технічний університет,  
інформаційний редакційно-видавничий центр.  
ВНТУ, ГНК, к. 114.  
Хмельницьке шосе, 95,  
м. Вінниця, 21021.  
Тел. (0432) 65-18-06.  
**press.vntu.edu.ua;**  
*E-mail: kivc.vntu@gmail.com.*  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи  
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.