# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ІЗ САМОСТІЙНОЇ ПОЗААУДИТОРНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ТЕМИ «ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

# МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

# ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ІЗ САМОСТІЙНОЇ ПОЗААУДИТОРНОЇ РОБОТИ СТУДЕНТІВ З ТЕМИ «ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ»

Вінниця
ВНТУ
2018

Рекомендовано до друку Методичною радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 2 від 24 жовтня 2018 р.)

Рецензенти:
**І. В. Хом'юк**, доктор педагогічних наук, професор
**В. А. Стасенко**, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань із самостійної позааудиторної роботи студентів з теми «Функція комплексної змінної» / Уклад. В. А. Петрук, О. П. Прозор. – Вінниця : ВНТУ, 2018. – 29 с.

У даних методичних вказівках наводяться основні рекомендації щодо організації самостійної роботи студентів з дисципліни «Вища математика».

# ЗМІСТ

# ВСТУП

Не останню роль в процесі засвоєння знань і розвитку інтелектуальних здібностей відіграє формування самостійності мислення. Самостійність є рисою характеру, що відіграє істотну роль у структурі особистості сучасного фахівця. Самостійна робота є основою самоосвіти, поштовхом для подальшого підвищення рівня кваліфікованості.

Закон України «Про вищу освіту» визначає як одну з форм організації навчального процесу самостійну позааудиторну роботу студентів. В умовах ринкової економіки важливо забезпечити якісно новий рівень підготовки майбутніх фахівців. Важливу роль при цьому відіграє раціональна організація аудиторних занять, а також керована та контрольована самостійна робота студентів.

Згідно з «Положенням про організацію навчального процесу у вищих навчальних закладах»: самостійна робота студента є основним засобом оволодіння навчальним матеріалом у час, вільний від обов’язкових навчальних занять. Зміст самостійної роботи студента над конкретною дисципліною визначається навчальною програмою дисципліни, методичними матеріалами, завданнями та вказівками викладача. Однією з основних вимог, які висуваються до підготовки кожного спеціаліста, вважається формування його готовності до безперервної самоосвіти, що надзвичайно важливо в сучасних умовах швидкого зростання та оновлення інформації. Тому перед вищою школою стоїть першочергове завдання: навчити студентів вчитись, тобто озброїти їх технікою самостійної пізнавальної діяльності.

## ТЕМА 1. ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ (ФКЗ). ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФКЗ

**Обсяг:**15 годин.

**Мета**: засвоєння основних понять теми; розвиток уміння самостійно використовувати набуті знання, синтезувати набуті знання з різних дисциплін; формування навичок самостійної роботи з науково-технічною та навчальною літературою.

**Питання, які вивчаються самостійно студентами**

1. Похідна функції комплексної змінної.
2. Теорема Коші.
3. Умови Коші-Рімана.
4. Поняття аналітичної функції.

## ТЕМА 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФКЗ. РЯДИ ФКЗ. ЛИШКИ

**Обсяг:** 22 годин.

**Мета:** застосування теоретичних знань для розв’язування задач; розвиток уміння самостійно опрацьовувати інформацію, аналізувати її.

**Питання, які вивчаються самостійно студентами:**

1. Інтегрування функції комплексної змінної.
2. Класифікація ізольованих особливих точок.
3. Основна теорема про лишки. Застосування лишків до обчислення інтегралів.

## ПИТАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ТЕОРЕТИЧНИХ ЗНАНЬ

1. Комплексні числа та дії над ними.
2. Геометрична інтерпретація комплексного числа.
3. Алгебраїчна, тригонометрична, показникова форми комплексного числа.
4. Границя. Властивості границь. Неперервність функції комплексної змінної.
5. Показникова функція комплексної змінної.
6. Логарифмічна функція комплексної змінної.
7. Тригонометричні функції комплексної змінної.
8. Диференційовність функції комплексної змінної. Умови Коші-Рімана.
9. Поняття про конформне відображення. Геометричний зміст модуля та аргументу комплексного числа.
10. Інтегрування функції комплексної змінної. Теореми Коші.
11. Інтегральна формула Коші.
12. Числові ряди з комплексними членами. Ознаки збіжності.
13. Степеневі ряди з комплексними членами.
14. Ряди Тейлора та Лорана.
15. Поняття лишку. Теорема Коші про лишки.
16. Типи особливих точок.
17. Поняття лишку. Формули для обчислення лишків.

## ТЕСТИ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

*1. Формула для обчислення модуля комплексного числа* $z = x + iy$:

1) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$; 3) $|z| = \sqrt{x^2 + (iy)^2}$;

2) $|z| = \sqrt{x + y}$; 4) $|z| = \sqrt{x - y}$.

*2. Яка з перерахованих формул для обчислення аргументу комплексного числа* $z = x + iy$ *є хибною:*

1) $\arg z = arctg\dfrac{y}{x}$ , $x > 0$; 2) $\arg z = \pi + arctg\dfrac{y}{x}$, $x < 0$, $y \ge 0$;

3) $\arg z = arctg\dfrac{y}{x}$ , $x < 0$; 4) $\arg z = -\pi + arctg\dfrac{y}{x}$, $x < 0$, $y < 0$.

*3. Вкажіть правильне твердження «Ділення двох комплексних чисел відбувається шляхом:*

1) множення знаменника на спряжене до чисельника комплексне число;
2) множення чисельника на спряжене до знаменника комплексне число;
3) множення чисельника і знаменника на спряжене до знаменника комплексне число;
4) множення чисельника і знаменника на спряжене до чисельника комплексне число.

*4. Два комплексних числа* $z_1 = x_1 + iy_1$ *і* $z_2 = x_2 + iy_2$ *рівні, якщо:*

1) $x_1 = y_1 = x_2 = y_2$; 3) $x_1 = x_2, y_1 = y_2$;

2) $x_1 = x_2, y_1 \ne y_2$; 4) $x_1 \ne x_2, y_1 = y_2$.

*5. Який із виразів є тригонометричною формою числа* $z = 1 + i$

1) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 3) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$; 4) $z = \sqrt{2}\left(-\cos\dfrac{\pi}{4} - i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

*6. Множина точок, яка складається із області D і її межі, називається…*

1) замкнутою областю і позначається $\bar{D}$;
2) відкритою областю і позначається $\bar{D}$;
3) замкнутою областю і позначається *D*;
4) відкритою областю і позначається *D*.

*7. Корінь n-го степеня з довільного комплексного числа існує і має*

1) рівно $n$ значень; 3) рівно $2n$ значень;

2) рівно $2n+1$ значень; 4) рівно $n+1$ значень.

*8. Околом точки* $z_0$ *є*

1) круг; 2) коло; 3) відрізок; 4) кільце.

*9. Яка крива задається лінією* $|z-1|=2$ *:*

1) пряма, що проходить через точку $(1;2)$;
2) еліпс з центром в точці $(1;2)$;
3) коло з центром в точці $(1;0)$ радіуса $2$;
4) коло з центром в точці $(1;0)$.

*10. Множиною точок даної нерівності* $0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$ *є:*

1) сукупність точок першої чверті; 3) сукупність точок прямої $y=\dfrac{\pi}{2}$;
2) сукупність точок прямої $x=\dfrac{\pi}{2}$; 4) сукупність точок другої чверті.

*11. Формула Ейлера має вигляд:*

1) $e^{iy}=\cos y+i\sin y$; 3) $e^{iy}=\cos y-i\sin y$;
2) $e^{iy}=\cos y+\sin y$; 4) $e^{iy}=\cos y-\sin y$.

*12. Формула Муавра має вигляд:*

1) $z^n=r^n(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$; 3) $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$;
2) $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin n\dfrac{\varphi}{n}\right)$; 4) $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$.

*13. Яка з формул виражає логарифмічну функцію комплексної змінної?*

1) $Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$; 3) $Lnz=\ln|z|+i(\arg z-2\pi k)$;
2) $Lnz=\ln|z|-i(\arg z-2\pi k)$; 4) $Lnz=\ln|z|-i(\arg z+2\pi k)$.

*14. Які із рівностей є умовами Коші-Рімана?*

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}$; 3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$;
2) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$; 4) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

*15. Множиною точок даної нерівності* $1<\operatorname{Re} z<2$ *є:*

1) сукупність точок першої чверті;
2) сукупність точок площини між двома лініями $x=1$ і $x=2$;

3) сукупність точок площини між двома лініями $y=1$ і $y=2$;

4) сукупність точок четвертої чверті.

*16. Задання* $\cos z$ *через експоненту має вигляд:*

1) $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; 3) $\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;

2) $\dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$; 4) $\dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$.

*17. Будь-яка аналітична в кільці* $0 \le r < R \le \infty$, *функція* $f(z)$ *комплексного аргументу може бути єдиним чином розкладена в ряд Лорана:*

1) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$; 3) $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)$;

2) $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)$; 4) $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

*18. Яка з формул є формулою Коші для аналітичних функцій в замкненій області?*

1) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$; 3) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z-z_0}dz$;

2) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z+z_0}dz$; 4) $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi}\oint\limits_L \dfrac{f(z)}{z+z_0}dz$.

*19. Головна частина ряду Лорана має вигляд*

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{1} c_n (z-z_0)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

*20. Вкажіть область збіжності головної частини ряду Лорана* $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$

1) круг $r<|z-z_0|<R$; 3) кільце $r<|z-z_0|<R$;

2) круг $|z-z_0|<R$; 4) круг $|z-z_0|>r$.

*21. Яке з тверджень є хибним для* $f\left(z_0\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f\left(z\right)}{z-z_0}dz$ *?*

1) якщо точка $z_0$ лежить всередині $L$, то інтеграл Коші дорівнює $f(z_0)$;

2) якщо точка $z_0$ лежить поза контуром $L$, то $\frac{f(z)}{z-z_0}$ аналітична в $L\subset D$;

3) якщо точка $z_0$ лежить поза контуром $L$, то інтеграл Коші дорівнює 0;

4) якщо точка $z_0$ лежить всередині $L$, то інтеграл Коші дорівнює 0.

*22. Правильна частина ряду Лорана має вигляд*

1) $\sum\limits_{n=-\infty}^{1} c_n\left(z-z_0\right)^n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\left(z-z_0\right)^n}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$.

*23. Вкажіть істинне твердження:*

1) навколо ізольованої особливої точки можна описати круг, який міститиме декілька особливих точок;

2) в околі ізольованої точки $z_0$ функція $f(z)$ аналітична всюди, крім самої точки $z_0$;

3) в околі ізольованої точки $z_0$ функція $f(z)$ неаналітична;

4) в околі ізольованої точки $z_0$ функція $f(z)$ всюди аналітична.

*24. Особливими називаються точки комплексної площини в яких функція*

1) неаналітична; 2) аналітична; 3) однозначна; 4) багатозначна.

*25. Точка* $z_0$ *називається нулем функції* $f(z)$ *порядку* $m$, *якщо виконуються умови:*

1) $f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,...,\quad f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)=0$;

2) $f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,...,\quad f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$;

3) $f(z_0)\neq 0,\quad f'(z_0)\neq 0,...,\quad f^{(m-1)}(z_0)\neq 0,\quad f^{(m)}(z_0)=0$;

4) $f(z_0)\neq 0,\quad f'(z_0)\neq 0,...,\quad f^{(m-1)}(z_0)\neq 0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

*26. Вкажіть істинне твердження:*

1) ізольована особлива точка $z=z_0$ є усувною, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f\left(z\right)=\infty$;

2) розклад в ряд Лорана в околі усувної особливої точки не містить правильної частини;

3) ізольована особлива точка $z = z_0$ є усувною, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$;

4) розклад в ряд Лорана в околі усувної особливої точки містить скінченне число членів з від'ємними показниками.

*27. Точки комплексної площини називаються правильними, якщо*

1) однозначна функція в них неаналітична;
2) однозначна функція в них аналітична;
3) функція в них однозначна;
4) функція в них багатозначна.

*28. Для того, щоб точка $z_0$ була полюсом порядку $m$ функції $f(z)$, необхідно виконання умови*

1) функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{m-1}}$, де функція $\phi(z)$ аналітична в точці $z_0$ і $\varphi(z_0) \neq 0$;

2) функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{m}}$, де функція $\phi(z)$ аналітична в точці $z_0$ і $\varphi(z_0) = 0$;

3) функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{m}}$, де функція $\phi(z)$ аналітична в точці $z_0$ і $\varphi(z_0) \neq 0$;

4) функцію $f(z)$ можна було подати у вигляді $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z - z_0)^{m-1}}$, де функція $\phi(z)$ аналітична в точці $z_0$ і $\varphi(z_0) = 0$.

*29. Нулем функції називається довільна точка $z_0$, в якій виконується рівність*

1) $f(z_0) = 0$;
3) $f(z_0) = \infty$;
2) $f(z_0) = const$;
4) $f(z_0) \neq 0$.

*30. Точка $z_0$ називається істотно особливою точкою функції $f(z)$, якщо в околі цієї точки*

1) розклад в ряд Лорана в своїй головній частині містить скінченне число членів з від'ємними показниками;

2) розклад в ряд Лорана в своїй головній частині містить нескінченне число членів з від'ємними показниками;

3) розклад в ряд Лорана в своїй головній частині не містить членів з від’ємними показниками;

4) розклад в ряд Лорана в своїй правильній частині містить нескінченне число членів з від’ємними показниками.

*31. Якщо точка $z_0$ є полюсом, то розклад в околі цієї точки в ряд Лорана*

1) в своїй головній частині містить скінченне число членів з від’ємними показниками;

2) в своїй головній частині містить нескінченне число членів з від’ємними показниками;

3) в своїй головній частині не містить членів з від’ємними показниками;

4) в своїй правильній частині містить нескінченне число членів з від’ємними показниками.

*32. Лишком аналітичної функції $w = f(z)$ в ізольованій особливій точці $z_0$ називається комплексне число, яке дорівнює значенню інтеграла*

1) $\frac{n!i}{2\pi}\oint\limits_L f(z)dz$;   3) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$;

3) $\frac{i}{2\pi}\oint\limits_L f(z)dz$;   4) $\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_L f(z)dz$.

*33. Лишок функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці $z_0$ дорівнює*

1) $res\, f(z_0) = c_{-n}$;   3) $res\, f(z_0) = c_1$;

3) $res\, f(z_0) = c_n$;   4) $res\, f(z_0) = c_{-1}$.

*34. В усувній особливій точці $z_0$*

1) $resf(z_0) = 0$;   3) $resf(z_0) = z_0$;

2) $resf(z_0) = n!$;   4) $resf(z_0) = \infty$.

*35. Лишок в точці $z_0$, яка є простим полюсом дорівнює*

1) $res\, f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$;

2) $resf(z_0) = 0$;

3) $res\; f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cdot [f(z) \cdot (z - z_0)^n]$;

4) $res\, f(z_0) = -c_{-1}$.

## ПРИКЛАДИ РОЗВ`ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Виконати вказані операції та для пункту а) записати дійсну та уявну частини результату: а) $\dfrac{2i^2-i}{1-3i}$; б) $\sqrt[3]{1-i}$.

*Розв'язання:*

а) $\dfrac{2i^2-i}{1-3i}=\dfrac{-2-i}{1-3i}=\dfrac{(-2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\dfrac{-2-6i-i-3i^2}{1^2-9i^2}=\dfrac{-2-7i+3}{1+9}=\dfrac{1-7i}{10}=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}i$.

$z=\dfrac{1}{10}-\dfrac{7}{10}i$; $\operatorname{Re} z=\dfrac{1}{10}$; $\operatorname{Im} z=-\dfrac{7}{10}$.

б) $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{1-i}$

Знайдемо модуль і аргумент даного числа $z$:

$|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$; $\arg z=arctg\dfrac{-1}{1}=-\dfrac{\pi}{4}$.

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\arg z+2\pi k}{3}\right),\ k=0,\pm1,\pm2,...$$

$$\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)$$

$$k=0\quad z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$k=1\quad z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

$$k=2\quad z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12}+i\sin\frac{15\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{12}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{3\pi}{12}\right)\right)=\sqrt[6]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Знайти та побудувати множину точок на комплексній площині, які визначаються умовами: $|z-2+i|<1$.

*Розв'язання:*

Маємо точки площини, що знаходяться всередині кола з центром в точці $z_0=2-i$, тобто $z_0(2,-1)$ і радіусом $r=1$, не включаючи лінію кола.

3. Обчислити $w=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{2i}$.

*Розв'язання:*

За формулою, маємо: $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2i}=e^{2i\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{2}\right)}$.

Знайдемо модуль і аргумент $\frac{1+i}{2}$:

$\left|\frac{1+i}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\arg\left(\frac{1+i}{2}\right)=arctg\left(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}\right)=arctg1=\frac{\pi}{4}$.

Тоді: $\mathrm{Ln}\left(\frac{1+i}{2}\right)=\ln\sqrt{\frac{1}{2}}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),\quad k\in Z$.

Маємо: $\left(\frac{1+i}{2}\right)^{2i}=e^{2i\left(\ln\sqrt{\frac{1}{2}}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)}=e^{2i\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-2\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}-4k\pi+i\ln\frac{1}{2}},\ k\in Z$.

4. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $w=z^2$ в точці $z_0=1+i$.

*Розв'язання:*

$w'(z)=2z$, $\quad w'(1+i)=2(1+i)=2+2i$, $\quad |z|=|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,

$\varphi=\arg(2+2i)=arctg\frac{2}{2}=\frac{\pi}{4}$.

Коефіцієнт розтягу: $r=2\sqrt{2}$. Кут повороту: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

5. Відновити аналітичну функцію $w=u+iv$ за дійсною частиною $u=x^3-3xy^2+5$.

*Розв'язання:*

Скористаємося умовами Коші-Рімана: $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^3-3xy^2+5\right)'=3x^2-3y^2=\frac{\partial v}{\partial y}$.

Інтегруючи по $y$ одержимо: $v=\int\frac{\partial v}{\partial y}dy=\int\left(3x^2-3y^2\right)dy=3x^2y-\frac{3y^3}{3}+\varphi(x)$.

Для визначення $\varphi(x)$ скористаємося другою умовою: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^3-3xy^2+5\right)'=-6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\left(3x^2y-y^3+\varphi(x)\right)'=6xy+\varphi'(x)$.

Маємо: $-6xy=-(6xy+\varphi'(x))\ \Rightarrow\ \varphi'(x)=0\ \Rightarrow\ \varphi(x)=C$, де $C=const$.

Тому, $v = 3x^2y - y^3 + C$, а $w = x^3 - 3xy^2 + 5 + i\left(3x^2y - y^3 + C\right)$.

6. Розглянути різні розкладання в ряд Лорана функції $f(z) = \cos\dfrac{z}{z-1}$ за степенями $z_0 = 1$. Знайти радіус збіжності ряду.

*Розв'язання:*

$$\cos\left(\frac{z}{z-1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1 \cos\frac{1}{z-1} + \sin 1 \sin\frac{1}{z-1} = \cos 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2\mathrm{k})!}\frac{1}{(z-1)^{2k}} +$$

$$+\sin 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}\frac{1}{(z-1)^{2k+1}}.$$

Функція диференційовна всюди на комплексній площині, окрім точки $z_0 = 1$. Ряд збігається всюди і радіус $R = +\infty$.

7. Визначити характер особливої точки $z_0 = 0$ функції $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

*Розв'язання:*

Розкладемо функцію в околі точки $z_0 = 0$ в ряд Лорана: $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^n}$.

Ряд містить нескінченне число членів з від'ємними показниками, отже, точка $z_0 = 0$ − істотно особлива точка.

8. Обчислити лишок функції $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ в особливій точці $z_0 = 1$.

*Розв'язання:*

Знайдемо границю функції в точці $z_0 = 1$: $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z}{(z-1)^2} = \dfrac{1}{0} = \infty$.

Маємо полюс другого порядку. Знайдемо лишок функції:

$$res\ f(1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{z}{(z-1)^2}(z-1)^2\right)' = \lim_{z\to 1} 1 = 1.$$

9. Обчислити наступні інтеграли:

а) обчислити безпосередньо $\int\limits_L (z + \overline{z})dz$, $L$ − пряма $y = x$, що з'єднує точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$.

*Розв'язання:*

Знайдемо диференціал по $y$: $dy = dx$ та межі інтеграла по $x$: $0 \le x \le 1$.

$$\int_L (z+\bar{z})dz = \int_L (x+iy+x-iy)(dx+idy) = 2\int_0^1 x(1+i)dx = 2\frac{x^2}{2}(1+i)\Bigg|_0^1 = 1+i.$$

б) обчислити інтеграл за формулою Коші $\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2-3z+2}$.

*Розв'язання:*

Контур інтегрування − коло радіуса 3 з центром в точці $z=0$. В цьому колі існує дві точки в яких знаменник дорівнює нулю: $z_1=1$ і $z_2=2$. Безпосередньо формулу Коші застосувати не можна.

*1-й спосіб*. За допомогою метода невизначених коефіцієнтів розкладемо підінтегральну функцію на суму елементарних дробів.

$$\frac{1}{z^2-3z+2}e^z = \left(\frac{A}{z-2}+\frac{B}{z-1}\right)e^z = \frac{A(z-1)+B(z-2)}{z^2-3z+2}e^z;$$

$1 = A(z-1)+B(z-2)$; $\quad z=1 \;\Rightarrow\; B=-1$; $\quad z=2 \;\Rightarrow\; A=1$.

Функція $f(z)=e^z$ − аналітична всередині контуру інтегрування. Отже:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2-3z+2} = \oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z-2} - \oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z-1} = 2\pi\left(e^2-e\right)i.$$

*2-й спосіб*. Оточимо точки $z_1=1$ і $z_2=2$ колами $l_1$ і $l_2$ достатньо малого радіуса, щоб вони не перетинались і лежали всередині кола $|z|=3$. В тризв'язній області, обмеженій колами $|z|=3$, $l_1$ і $l_2$ підінтегральна функція всюди аналітична. Тоді:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2-3z+2} = \oint\limits_{l_1} \frac{e^z dz}{(z-2)(z-1)} + \oint\limits_{l_2} \frac{e^z dz}{(z-2)(z-1)}.$$

Застосуємо до першого із інтегралів формулу Коші, враховуючи, що $z_0=1$ і $f(z)=\frac{e^z}{z-2}$, для другого − $z_0=2$ і $f(z)=\frac{e^z}{z-1}$. Одержимо:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{e^z dz}{z^2-3z+2} = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z-2}\Bigg|_{z=1} + \frac{e^z}{z-2}\Bigg|_{z=1}\right) = 2\pi i\left(e^2-e\right).$$

в) обчислити за теоремою Коші про лишки $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin z}{\left(z^2-1\right)^2}dz$.

*Розв'язання:*

Контур інтегрування − коло радіуса 1 з центром в точці $z=1$. Точка $z_0=-1$ лежить поза контуром. Тому функція $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^2}$ аналітична в цьому колі.

Знайдемо характер особливої точки $z_0=1$ та лишок функції в цій точці.

$\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\sin z}{\left(z^2-1\right)^2}=\dfrac{\sin 1}{0}=\infty$ – полюс 2-го порядку.

$$resf(1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left(\frac{\sin z}{(z+1)^2}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{(z+1)^2\cos z-2(z+1)\sin z}{(z+1)^4}=\frac{\cos 1-\sin 1}{4}$$

Отже, маємо: $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin z}{\left(z^2-1\right)^2}dz=2\pi i\cdot resf(1)=\frac{\pi i(\cos 1-\sin 1)}{2}$.

## ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

### 1 Комплексні числа

1.1 Виконати вказані операції. Для пункту а) записати дійсну та уявну частини результату.

1. а) $\dfrac{1-2i}{(2+i)^2}$; б) $\sqrt[4]{-i}$.
2. а) $\dfrac{2+3i}{3-i}$; б) $\sqrt{i}$.
3. а) $\dfrac{(1-i)^3}{(1+i)^3}$; б) $\sqrt[3]{i}$.
4. а) $\dfrac{2i-i^2}{1-3i}$; б) $\sqrt[3]{-1+i}$.
5. а) $\dfrac{2-i}{1+i}$; б) $\sqrt{2+2\sqrt{3}i}$.
6. а) $\dfrac{1}{4-i}$; б) $\sqrt[4]{-81i}$.
7. а) $\dfrac{-1}{4-i}$; б) $\sqrt[4]{i}$.
8. а) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{3-i}$; б) $\sqrt[3]{-9}$.
9. а) $\dfrac{(1-i)(3-i)}{3+i}$; б) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$.
10. а) $\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$.
11. а) $\dfrac{i^4-1}{2-i}$; б) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.
12. а) $\dfrac{2+i}{i+1}$; б) $\sqrt[5]{-1-i}$.
13. а) $\dfrac{i^3-2}{i-2}$; б) $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.
14. а) $\dfrac{2-i}{3+5i}$; б) $\sqrt{1+i}$.
15. а) $\dfrac{-8+5i}{2+3i}$; б) $\sqrt[3]{-i}$.
16. а) $\dfrac{2+i}{1+5i}$; б) $\sqrt[3]{27i}$.
17. а) $\dfrac{1-i}{1+i}$; б) $\sqrt{2\sqrt{3}-2i}$.
18. а) $\dfrac{2}{1-3i}$; б) $\sqrt{-2\sqrt{3}+2i}$.
19. а) $\dfrac{-1+2i}{2-3i}$; б) $\sqrt[3]{-8i}$.
20. а) $-\dfrac{2-7i}{1+3i}$; б) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$.
21. а) $\dfrac{5-i}{2+4i}$; б) $\sqrt{\sqrt{3}-i}$.
22. а) $\dfrac{i-1}{7+3i}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{3}+i}$.
23. а) $\dfrac{-1+5i}{2-3i}$; б) $\sqrt{-2+2i}$.
24. а) $\dfrac{3i+2}{5-i}$; б) $\sqrt[3]{2-2i}$.
25. а) $\dfrac{2+4i}{7-3i}$; б) $\sqrt[4]{3+3i}$.
26. а) $\dfrac{3-2i}{i-4}$; б) $\sqrt[3]{-2-2\sqrt{3}i}$.
27. а) $\dfrac{4i-1}{2i+5}$; б) $\sqrt[4]{4+4i}$.
28. а) $\dfrac{3i+1}{2i-7}$; б) $\sqrt{-3\sqrt{3}+3i}$.
29. а) $\dfrac{i}{i-2}$; б) $\sqrt[4]{16i}$.
30. а) $\dfrac{6-5i}{3+2i}$; б) $\sqrt{3\sqrt{3}-3i}$.

1.2 Знайти та побудувати множину точок комплексної площини, які визначаються умовами:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $\lvert z-3i\rvert=8$. | 2. | $\lvert z-2-i\rvert\le 4$. | 3. | $1<\lvert z-i\rvert<2$. |
| 4. | $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{3}$. | 5. | $3<\lvert z+1\rvert\le 4$. | 6. | $0\le \operatorname{Im} z\le 1$. |
| 7. | $1<\operatorname{Re} z<2$. | 8. | $1\le\lvert z+2+i\rvert\le 2$. | 9. | $\lvert z-5+3i\rvert>2$. |
| 10. | $\lvert z+1-4i\rvert\ge 3$. | 11. | $2\le\lvert z+i\rvert<4$. | 12. | $\lvert z-2-i\rvert<3$. |
| 13. | $-1<\operatorname{Im} z\le 3$. | 14. | $\lvert z+1-i\rvert>\frac{3}{2}$. | 15. | $\lvert z+2-2i\rvert=5$. |
| 16. | $0\le\operatorname{Re} z<25$. | 17. | $\lvert z-3-5i\rvert<2$. | 18. | $0<\lvert z+i\rvert\le 4$. |
| 19. | $0\le\arg z\le\frac{\pi}{2}$. | 20. | $-3\le\operatorname{Im} z\le 1$. | 21. | $\lvert z-3i\rvert\ge 1$. |
| 22. | $0<\lvert z+3-2i\rvert\le 2$. | 23. | $\frac{1}{2}\le\lvert z-i-1\rvert<2$. | 24. | $1\le\lvert z+5i-1\rvert<2$. |
| 25. | $\frac{\pi}{3}<\arg z<\pi$. | 26. | $1<\operatorname{Re} z\le 3$. | 27. | $1<\lvert z+5\rvert\le 3$. |
| 28. | $\lvert z+2i\rvert>4$. | 29. | $\lvert z+1+6i\rvert\le 2$. | 30. | $0<\arg z\le\frac{3\pi}{2}$. |

## 2 Елементарні функції комплексної змінної

2.1 Обчислити

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | $2^{i}$. | 2. | $(-1)^{i}$. | 3. | $\cos(1+i)$. |
| 4. | $\operatorname{Ln} i$. | 5. | $(1+i)^{i}$. | 6. | $\operatorname{Ln}(-1)$. |
| 7. | $(-1)^{\sqrt{2}}$. | 8. | $(3-4i)^{1+i}$. | 9. | $i^{i}$. |
| 10. | $\operatorname{ch}(-1+i)$. | 11. | $\sin 2i$. | 12. | $\operatorname{Ln}(2-3i)$. |
| 13. | $(-3-4i)^{i}$. | 14. | $\operatorname{Ln}\left(1-\sqrt{3}i\right)$. | 15. | $i^{\frac{1}{i}}$. |
| 16. | $1^{i}$. | 17. | $\operatorname{Ln}(-2-2i)$. | 18. | $(1+2i)^{-1}$. |
| 19. | $(-3+4i)^{i}$. | 20. | $\operatorname{sh}(-2+i)$. | 21. | $\operatorname{Ln}\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. |
| 22. | $\operatorname{ch} i$. | 23. | $\operatorname{ch}\left(\sqrt{3}-i\right)$. | 24. | $\operatorname{Ln}(3-2i)$. |
| 25. | $\cos(2-i)$. | 26. | $(2+i)^{-i}$. | 27. | $\operatorname{Ln}\left(-1+\sqrt{3}i\right)$. |

28. $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}}\right)^{i}$. 29. $\mathrm{Ln}\left(-1-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$. 30. $(-1-2i)^{i}$.

2.2 Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту

1. $w=z^2,\quad z_0=\sqrt{2}(1+i)$.
2. $w=-z^3,\quad z_0=i$.
3. $w=z^2+i,\quad z_0=1-i$.
4. $w=z^2+2z,\quad z_0=i$.
5. $w=e^{z-1},\quad z_0=i$.
6. $w=z^2-iz,\quad z_0=i$.
7. $w=z^3,\quad z_0=1-i$.
8. $w=\frac{1}{z},\quad z_0=6-4i$.
9. $w=\frac{\mathrm{Im}\,z}{z},\quad z_0=2-i$.
10. $w=(z-i)^2,\quad z_0=\frac{1+i}{2}$.
11. $w=\frac{1}{z^2},\quad z_0=3-2i$.
12. $w=z^3+1,\quad z_0=\sqrt{2}(1+i)$.
13. $w=\mathrm{Ln}(z+1),\quad z_0=1$.
14. $w=\sin z,\quad z_0=i$.
15. $w=2ie^{2z},\quad z_0=2\pi i$.
16. $w=(z+1)^3,\quad z_0=2-2i$.
17. $w=(z-i)^2,\quad z_0=1+i$.
18. $w=z^2+z-i,\quad z_0=-i$.
19. $w=ie^{3z},\quad z_0=3\pi i$.
20. $w=e^{z},\quad z_0=-1-i\frac{\pi}{2}$.
21. $w=z^3,\quad z_0=1+i\frac{\pi}{2}$.
22. $w=e^{z},\quad z_0=\mathrm{Ln}\left(2+i\frac{\pi}{4}\right)$.
23. $w=\sin z,\quad z_0=0$.
24. $w=z^3,\quad z_0=2-i$.
25. $w=\frac{1}{z},\quad z_0=1+i$.
26. $w=\frac{1}{z^3},\quad z_0=2-i$.
27. $w=\mathrm{Ln}(z-1),\quad z_0=i$.
28. $w=ie^{z+1},\quad z_0=2i$.
29. $w=0{,}5z^2+i,\quad z_0=-1-i$.
30. $w=(z+2)^2,\quad z_0=3-i$.

2.3 Відновити аналітичну функцію $w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо:

1. $v(x,y)=\frac{1}{2}\left(x^2-y^2\right)+\frac{1}{3}$.
2. $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)+7$.
3. $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$.
4. $u(x,y)=e^{2x}\sin 2y$.
5. $v(x,y)=x+y-3$.
6. $v(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)-4$.

7. $u(x,y)=3x^2y-y^3$. 8. $v(x,y)=2xy-x-5y+2$.

9. $v(x,y)=3x^2y-y^3+4$. 10. $u(x,y)=e^{4x}\cos 4y$.

11. $u(x,y)=3y^2x-x^3+24$. 12. $v(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2$.

13. $u(x,y)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+2x+3$. 14. $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

15. $v(x,y)=y-5x-y^2+x^2-7$. 16. $v(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$.

17. $v(x,y)=2e^x\cos y+1$. 18. $v(x,y)=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

19. $v(x,y)=e^{6x}\sin 6y$. 20. $u(x,y)=x^2-y^2+2x$.

21. $v(x,y)=3x+2xy$. 22. $u(x,y)=x^2-y^2-3x+5$.

23. $u(x,y)=-xy^2+\dfrac{x^3}{3}+5$. 24. $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

25. $u(x,y)=x^2-y^2+x$. 26. $v(x,y)=2xy-y$.

27. $v(x,y)=-x^2y+x^2-1+x$. 28. $v(x,y)=3xy^2-x^3$.

29. $u(x,y)=e^{3x}\cos 3y+1$. 30. $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y-1$.

2.4 Розглянути різні розкладання в ряд Лорана функції $f(z)$ за степенями $z-z_0$.

1. $f(z)=\dfrac{1}{z^3-3z^2-4z}$, $z_0=0$. 2. $f(z)=(z+i)\sin\dfrac{1}{z+i}$, $z_0=-i$.

3. $f(z)=\dfrac{z}{(z+3)(z+2)^2}$, $z_0=0$. 4. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$, $z_0=0$.

5. $f(z)=\cos(z-i)$, $z_0=i$. 6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-3)}$, $z_0=0$.

7. $f(z)=e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$. 8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)z}$, $z_0=0$.

9. $f(z)=\dfrac{1}{(z-3)^2}$, $z_0=0$. 10. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)}$, $z_0=0$.

11. $f(z)=e^{\frac{1}{2z-1}}$, $z_0=\dfrac{1}{2}$. 12. $f(z)=\sin\left(\dfrac{1}{z-i}\right)$, $z_0=i$.

13. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+4)}, \quad z_0=0.$

14. $f(z)=\cos\dfrac{1}{(z-i)^2}, \quad z_0=i.$

15. $f(z)=z^2e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0=0.$

16. $f(z)=\left(1+z^3\right)\sin\dfrac{1}{z^2}, \quad z_0=0.$

17. $f(z)=ze^{\frac{1}{z^2}}, \quad z_0=0.$

18. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}, \quad z_0=0.$

19. $f(z)=\dfrac{1}{z(z-3)}, \quad z_0=0.$

20. $f(z)=\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}, \quad z_0=0.$

21. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}, \quad z_0=0.$

22. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}, \quad z_0=0.$

23. $f(z)=ze^{\frac{1}{z+i}}, \quad z_0=-i.$

24. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad z_0=0.$

25. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad z_0=0.$

26. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}, \quad z_0=0.$

27. $f(z)=\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}, \quad z_0=0.$

28. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}, \quad z_0=0.$

29. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}, \quad z_0=0.$

30. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0=0.$

## 3 Лишки. Інтеграли

3.1 Визначити характер особливої точки $z_0$ функції $f(z)$.

1. $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}, \quad z_0=0.$

2. $f(z)=z\,\mathrm{sh}\dfrac{1}{z}, \quad z_0=0.$

3. $f(z)=\dfrac{z^2+3z+2}{z^2-2z+1}, \quad z_0=1.$

4. $f(z)=e^{-\frac{1}{z^2}}, \quad z_0=0.$

5. $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}, \quad z_0=-1.$

6. $f(z)=\dfrac{\sin z}{e^{-z}+z-1}, \quad z_0=0.$

7. $f(z)=\dfrac{1-\sin z}{\cos z}, \quad z_0=\dfrac{\pi}{2}.$

8. $f(z)=\dfrac{z-\pi}{\sin^2 z}, \quad z_0=\pi.$

9. $f(z)=\cos\dfrac{1}{2}+\sin\dfrac{2-\pi z}{2z}, \quad z_0=0.$

10. $f(z)=\dfrac{\ln\left(1+z^3\right)}{z^2}, \quad z_0=0.$

11. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}, \quad z_0=-1.$

12. $f(z)=\sin\dfrac{\pi}{z+1}, \quad z_0=-1.$

13. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$, $z_0=0$.

14. $f(z)=\dfrac{z}{z^5+2z^4+z^3}$, $z_0=0$.

15. $f(z)=e^{\frac{1}{z+2}}$, $z_0=-2$.

16. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z+\pi}$, $z_0=-\pi$.

17. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.

18. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, $z_0=0$.

19. $f(z)=\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

20. $f(z)=\dfrac{\sin^2 z}{z}$, $z_0=0$.

21. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$, $z_0=0$.

22. $f(z)=e^{\frac{z}{1-z}}$, $z_0=1$.

23. $f(z)=\dfrac{2z+3}{\left(z^2-1\right)\left(z^2+5z+4\right)^2}$, $z_0=-1$.

24. $f(z)=\dfrac{1}{z^3\left(z^2+4\right)^2}$, $z_0=2i$.

25. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z-1}$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}$.

26. $f(z)=\dfrac{1}{z(z+2)^2}$, $z_0=-2$.

27. $f(z)=\dfrac{1}{z^2-5z+4}$, $z_0=4$.

28. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1}$, $z_0=0$.

29. $f(z)=\dfrac{\cos z}{\left(z+\frac{\pi}{2}\right)\left(z^2-4\right)^2}$, $z_0=2$.

30. $f(z)=\dfrac{2z^3+1}{z^4\left(z^2+9\right)^3}$, $z_0=3i$.

3.2 Обчислити лишок функції $f(z)$ в особливій точці $z_0$.

1. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$, $z_0=0$.

2. $f(z)=z^3\cos\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

3. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z+\frac{1}{2}}$, $z_0=0$.

4. $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{(z-\pi)\left(z-\frac{\pi}{6}\right)}$, $z_0=\pi$.

5. $f(z)=\dfrac{1}{z^2\left(z^2+4\right)}$, $z_0=2i$.

6. $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z+3)}$, $z_0=1$.

7. $f(z)=\dfrac{1}{(z+3)(z-1)^2}$, $z_0=1$.

8. $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2+2z+1}$, $z_0=-1$.

9. $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$, $z_0=0$.

10. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-2)^2}$, $z_0=-1$.

11. $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z-\pi)^2\left(z-\dfrac{\pi}{3}\right)}$, $z_0=\dfrac{\pi}{3}$.

12. $f(z)=\dfrac{z^2}{\sin z}$, $z_0=\pi$.

13. $f(z)=\dfrac{1}{z^2\left(z^2+1\right)}$, $z_0=0$.

14. $f(z)=\dfrac{2z-5}{z^2-2z+1}$, $z_0=1$.

15. $f(z)=z^2\sin\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

16. $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$, $z_0=0$.

17. $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^3(z-3)}$, $z_0=3$.

18. $f(z)=\dfrac{1}{\cos z+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, $z_0=\dfrac{3\pi}{4}$.

19. $f(z)=\dfrac{z}{\sin^2 z}$, $z_0=0$.

20. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-\pi)(z-1)^2}$, $z_0=\pi$.

21. $f(z)=\dfrac{1}{\sin z+\dfrac{1}{2}}$, $z_0=-\dfrac{\pi}{6}$.

22. $f(z)=\dfrac{1}{z^3+9z}$, $z_0=3i$.

23. $f(z)=\dfrac{1}{\left(z^2+9\right)(z-1)^3}$, $z_0=3i$.

24. $f(z)=e^{\frac{1}{z-1}}$, $z_0=1$.

25. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z^2}$, $z_0=0$.

26. $f(z)=\mathrm{ctg}2z$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}$.

27. $f(z)=\dfrac{2z}{z^4-4z^2+4}$, $z_0=\sqrt{2}$.

28. $f(z)=(1-z)\sin\dfrac{1}{z^2}$, $z_0=0$.

29. $f(z)=\sin\dfrac{1}{z}$, $z_0=0$.

30. $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$, $z_0=0$.

3.3 Обчислити: а) безпосередньо; б), в) за формулою Коші та використовуючи теорему Коші про лишки.

1. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\cdot\bar{z}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z-3|=6}\frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{sh}\pi zdz}{\left(z^2+4\right)^2(z-1)}$.

2. а) $\displaystyle\int\limits_{|z|=3}|z|dz,\ 0\le\arg z\le\pi$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin izdz}{z^2-4z+3}$; в) $\displaystyle\int\limits_{|z+2i|=\frac{1}{3}}\frac{\mathrm{sh}\pi zdz}{\left(z^2+4\right)^2(z-1)}$.

3. а) $\int\limits_{|z|=1} z\,\mathrm{Re}\,z dz$ ;б) $\int\limits_{|z-2|=3} \frac{\mathrm{ch} e^{i\pi z} dz}{z^3-4z^2}$; в) $\int\limits_{|z|=6} \frac{e^{-z}dz}{z+\pi i}$.

4. а) $\int\limits_{|z|=2} |z|dz$; б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos(z+\pi i)dz}{z(e^z+2)}$; в) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2+2z}$.

5. а) $\int\limits_1^i \frac{1+tgz}{\cos^2 z}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}$; в) $\int\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z+4)^2(z-2)}$.

6. а) $\int\limits_{|z|=2} (z^2-3z+2)dz,\ -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$; б) $\int\limits_{|z+2i|=\frac{1}{2}} \frac{e^{-z}dz}{z+\pi i}$; в) $\int\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{sh\pi z dz}{(z^2+4)(z-1)}$.

7. а) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$; б) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{z}{4}dz}{(z-1)^2(z-3)}$; в) $\int\limits_{|z|=4} \frac{z^3+1}{z^2+4}dz$.

8. а) $\int\limits_L e^{-z}dz,\ L$ − пряма $z_1=0,\ z_2=2-i$; б) $\int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$; в) $\int\limits_{|z-2i|=1} \frac{z^3+1}{z^2+4}dz$.

9. а) $\int\limits_1^{-i} ze^z dz$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{z\mathrm{sh}zdz}{(z^2-1)^2}$; в) $\int\limits_{\left|z+\frac{\pi i}{2}\right|=1} \frac{\mathrm{ch}zdz}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)(z-\pi i)}$.

10. а) $\int\limits_L |z|dz,\ L$ − пряма $z_1=0,\ z_2=2+i$; б) $\int\limits_{|z-1|=3} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}dz}{z^2+2z-3}$;
в) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch}zdz}{\left(z+\frac{\pi i}{2}\right)(z-\pi i)^2}$.

11. а) $\int\limits_0^{1+i} \sin z\cos z dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh}z^2 dz}{z^3}$; в) $\int\limits_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z dz}{z^2+3z+2}$.

12. а) $\int\limits_L e^{-z}dz,\ L$ − ламана з вершинами $z_1=0,\ z_2=2,\ z_3=2-i$;

б) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}dz}{z^2+1}$; в) $\int\limits_{|z+2|=\frac{1}{2}} \frac{\cos 2z dz}{z^2+3z+2}$.

13. а) $\int\limits_0^i (z-i)e^{-z}dz$; б) $\int\limits_{|z-3|=1} \frac{\sin 4z dz}{(z-1)(z-3)}$; в) $\int\limits_{|z+2i|=1} \frac{z+1}{z^2+4}dz$.

14. а) $\int\limits_0^i ze^{2z}dz$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{z^2-1}$; в) $\int\limits_{|z+\pi i|=1} \frac{\mathrm{ch} z dz}{(z+\pi i)^2 z}$.

15. а) $\int\limits_L (z+2\overline{z})dz$, $L$ – пряма $z_1=0$, $z_2=1-i$; б) $\int\limits_{|z|=2} e^{\frac{1}{z+1}}dz$;

в) $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^3-1}dz$.

16. а) $\int\limits_{|z|=2} (z+2\overline{z})dz, -\frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$; б) $\int\limits_{|z-2i|=2} \frac{dz}{z(z^2+4)^2}$; в) $\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{(z^2+1)^2}$.

17. а) $\int\limits_{|z-1|=2} (z+2\overline{z})dz$; б) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 \sin\frac{1}{z}dz$; в) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{e^{2z}dz}{z^3-1}$.

18. а) $\int\limits_L z^3 dz, L: y=x^2, z_1=0, z_2=1+i$; б) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1)e^{\frac{1}{z}}dz$; в) $\int\limits_{|z-i|=3} \frac{(e^z-1)dz}{z^3-iz^2}$.

19. а) $\int\limits_1^i \frac{\ln z}{z}dz$; б) $\int\limits_{|z|=3} \frac{zdz}{(z-1)(z+2)}$; в) $\int\limits_{|z+1|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{ch} 2z dz}{z^2(z-1)(z+2)}$.

20. а) $\int\limits_L (1+i-2\overline{z})dz$, $L$ – пряма $z_1=0$, $z_2=1+i$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{zdz}{z^2-1}$; в) $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}$.

21. а) $\int\limits_L (1+\overline{z})dz, L: y=x^2, z_1=0, z_2=1+i$; б) $\int\limits_{|z|=2} \frac{\sin \pi z dz}{z^2-1}$; в) $\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z(z+1)}$.

22. а) $\int\limits_{1}^{i} z\sin z dz$; б) $\oint\limits_{|z+2|=1} \frac{\mathrm{tg} z dz}{z+2}$; в) $\oint\limits_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}} dz$.

23. а) $\int\limits_{1-i}^{2+i} \left(z^2+3z\right)dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{zdz}{\sin z}$; в) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^2}$.

24. а) $\int\limits_{1+i}^{2i} ze^{\frac{z^2}{2}} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{ch} 2z dz}{z^2(z-2)}$; в) $\oint\limits_{|z-2i|=3} \frac{z^2 dz}{z^2+4}$.

25. а) $\int\limits_{0}^{i} (z-i)e^{-z} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\cos z dz}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^2}$; в) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$.

26. а) $\int\limits_{0}^{1+i} \cos^2 z\sin z dz$; б) $\oint\limits_{|z-3|=2} \frac{e^z dz}{z^2-9}$; в) $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\mathrm{sh}\frac{\pi z}{4} dz}{z^2+1}$.

27. а) $\int\limits_{1+i}^{-1-i} (z+1)dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{sh} 2z dz}{z^2-2z}$; в) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z(z-2)^2}$.

28. а) $\int\limits_{0}^{1+i} z^2 dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z dz}{z^3}$; в) $\oint\limits_{|z|=6} \frac{e^z dz}{z+\pi i}$.

29. а) $\int\limits_{1}^{i} \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$; б) $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^2(z-4)}$; в) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{\mathrm{sh}\pi z dz}{\left(z^2+4\right)(z-1)}$.

30. а) $\int\limits_{-i}^{i} ze^{z^2} dz$; б) $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{\left(z^2+9\right)(z+9)}$; в) $\oint\limits_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{\mathrm{sh}\pi z dz}{\left(z^2+1\right)(z-1)}$.

# СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Босовський М. В., Демченко О. Г. Елементи комплексного аналізу (навчально-методичний посібник). Черкаси : ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. 124 с.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 2 : Учебное пособие для студентов втузов. М. : Высшая школа, 1980. 365 с.
3. Кашканова Г. Г., Петрук В. А. Збірник завдань з вищої математики. Частина 3. Вінниця ВДТУ, 2002. 127 с.
4. Краснов М. Л., Кисилев А. И., Макаренко Г. И. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 4. М. : Эдиториал УРСС, 2001. 352 с.
5. Кручкович Г. И., Мордасов Г. М. и др. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. М. : Высшая школа, 1970. 512 с.
6. Тичинська Л. М., Ковальчук М. Б., Черноволик Г. О. Теорія функції комплексної змінної. Навчальний посібник. Вінниця : ВДТУ, 2007. 98 с.