
СИСТЕМИ ТЕХНІЧНОГО ЗОРУ І ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ З ОБРОБКОЮ ТА РОЗПІЗНАВАННЯМ ЗОБРАЖЕНЬ

УДК 681.325.2

Н.І. ЗАБОЛОТНА, В.В. ШОЛОТА, О.В. ДРОНЕНКО, В.В. ВІТЮК

ПАРАЛЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗА ТЕХНІКОЮ ОПТИЧНИХ ЦИФРОВИХ ОБЧИСЛЕНЬ

*Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе 95, Вінниця, 21010, Україна.
Тел.: +38(097)7228789, E-mail: yvityuk@mail.ru*

Анотація. Запропоновано застосування блочних паралельних алгоритмів та структур на їх основі для розв'язання диференційних рівнянь з частинними похідними за технікою оптичних цифрових обчислень. Диференційне рівняння було зведене до матричного рівняння з блочними матрицями та було зроблено оцінку часу обернення матриці коефіцієнтів на структурі паралельного оптоелектронного спецпроцесора.

Анотация. Предложено применение блочных параллельных алгоритмов и структур на их основе для решения дифференциальных уравнений с частными производными по технике оптических цифровых вычислений. Дифференциальное уравнение было сведено к матричному уравнению с блочными матрицами и было сделано оценку времени обращения матрицы коэффициентов на структуре параллельного оптоэлектронного спецпроцессора.

Abstract. Application of block parallel algorithms and structures on their basis for partial differential equations computing according to the technique of optical digital calculations is offered. The differential equation was reduced to matrix equation with block matrices and the time estimation of coefficient matrix inversion on the structure of parallel specially designed processor was performed.

Ключові слова: блочний алгоритм, диференційне рівняння, частинні похідні, оптоелектронний.

ВСТУП

В задачах автоматизації, оптимізації, прогнозу та прийняття рішень, обробки та розпізнавання динамічних зображень виникає необхідність розв'язання диференційних рівнянь (ДР) у реальному часі. Переваги природного паралелізму цифрових матричних блочних обчислень, описаних у роботі [1] та можливість їх апаратної реалізації на оптико-електронній елементній базі зумовлюють доцільність дискретизації ДР в систему кінцево-різницевого лінійного алгебраїчного рівнянь (ЛАР), яку пропонується розв'язувати в реальному часі на структурі оптичного спеціалізованого матричного паралельного обчислювача.

Блочні методи обернення матриць.

Блочні методи дозволяють підвищити розмірність вхідних матриць даних за рахунок розбиття їх на блоки, які представляють собою матриці з меншими розмірностями. Для обернення таких матриць початкові дані подають в вигляді розширеної матриці $[A|E]$, де A – квадратна неособлива матриця коефіцієнтів розмірністю $MN \times NM$ елементів, E – квадратна одинична матриця розмірністю $MN \times NM$ елементів. В роботі [1] для обернення матриць такого виду застосовується блочний метод модифікованого методу виключення Гауса-Жордана [2]. Для цього розіб'ємо вхідні матриці A та E на квадратні матриці нижчих порядків – блоки, розмірність яких $N \times N$, відповідно кількість блоків, що будуть формувати вхідні матриці A та B – $M \times M$. Тоді матрицю A можна розглядати як складну матрицю, елементами якої є блоки:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1M} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2j} & \cdots & A_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{iM} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$.

Кожен блок має вигляд, аналогічний такому:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

де $p = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, N}$.

А, відповідно, матрицю E :

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \cdots & E_{1j} & \cdots & E_{1M} \\ E_{21} & E_{22} & \cdots & E_{2j} & \cdots & E_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ E_{i1} & E_{i2} & \cdots & E_{ij} & \cdots & E_{iM} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

діагональними блоками якої є одиничні матриці:

$$E_{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

де $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, M}$, $p = \overline{1, N}$, $r = \overline{1, N}$. Всі інші блоки матриці E є нульовими матрицями. Таким чином, вхідними даними та результатом є матриці розмірністю $MN \times MN$.

Час обробки матричного розрядно-зрізового спецпроцесора з плаваючою комою для обернення матриць за блочним методом на основі методу Гауса, структура якого запропонована в роботі [1], становить в однозадачному режимі:

$$T_{ГБ} = 8(2NM-1) \cdot (M_S^2 + M_S P_S + 14M_S + 8P_S + 29) \cdot \tau, \quad (5)$$

де M_S , P_S – розрядність відповідно мантиси та порядку, τ – час затримки розповсюдження сигналу (характеристикам SEED-приладів відповідає $\tau=10-6$ с) [2]. Можливість застосування блочного методу для обернення і множення великорозмірних матриць на вектор відкриває шлях до розв'язання матричного рівняння, яке виникає при дискретизації диференційних рівнянь.

Метод кінцевих різниць.

Оскільки, використовуючи переваги природного паралелізму цифрових матричних обчислень, ми орієтуємось на задачі, в яких інформація представляється паралельно у вигляді картин, доцільно в першу чергу розглядати диференційні рівняння з частинними похідними. Їх частинним випадком можна

розглядати звичайні диференціальні рівняння, які містять одну змінну.

В загальному випадку диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними можна записати в наступному вигляді:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \quad (6)$$

де $u = u(x, y)$ - шукана функція. Коефіцієнти a, b, c, d, e, f та права частина g можуть бути сталими, залежати від змінних x, y та від шуканої функції u . Відповідно до цього рівняння (6) називається диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, лінійним ДР (якщо g лінійно залежить від u , а коефіцієнти залежать лише від x та y), та квазілінійним (якщо коефіцієнти залежать і від u). В подальшому розглядатимемо лінійні ДР та лише коректно поставлені задачі, рішення яких існує, є єдиним в певному класі граничних умов і неперервно залежить від цих умов як і від коефіцієнтів рівняння.

Метод кінцевих різниць полягає у введенні в область обчислень G різницевої сітки з деяким кроком h (рис. 1) та вузлами у точках $x_i = a + i \cdot h$, $y_j = c + j \cdot h$ ($i = 0, 1, \dots, I$; $j = 0, 1, \dots, J$), яка ділить сторони цієї області $a \leq x \leq b$ та $c \leq y \leq d$ на елементарні відрізки. Оскільки ми орієнтуємось на картинну матричну обробку інформації, приймаємо однаковий крок сітки в напрямках x та y , та квадратну область обчислень $I = J$.

Вузли сітки, які лежать на границі Γ області G , називаються граничними. Оскільки граничні умови при постановці задач формулюються на границі області обчислень, то їх можна вважати заданими в граничних вузлах сітки. Всі інші M^2 вузлів сітки називають внутрішніми.

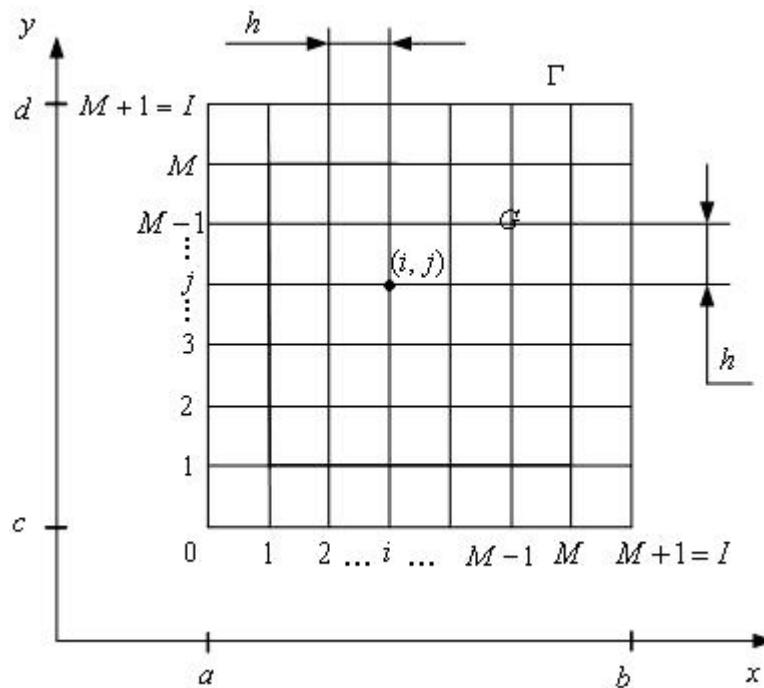


Рис. 1. Кінцево-різницева сітка

Таким чином, значення похідних та граничних умов виражаються через значення функцій у вузлах різницевої сітки, в результаті чого з диференціальної задача перетворюється на систему різницевих ЛАР.

За наявності граничних умов при розв'язанні диференціальної задачі для апроксимації похідної зручно використовувати центральні різниці:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2). \quad (8)$$

Тут $O(h^2)$ - похибка апроксимації. Аналогічні вирази можна записати для диференціювання по y . Апроксимація змішаних частинних похідних записується наступним чином:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{h^2} + O(h^2). \quad (9)$$

Ці різницеві схеми апроксимують диференційні вирази з похибкою другого порядку (приймається, що $h < 1$). Очевидно, що для запису (7), (8) при диференціюванні по кожній із змінних для опису кожного вузла (i, j) використовуються значення шуканої функції у чотирьох сусідніх вузлах за схемою (Рис.2а):

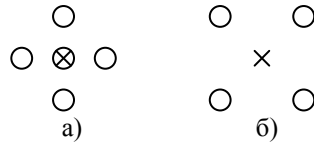


Рис.2. Апроксимація за центральними різницями

Схема ж для змішаних частинних похідних вимагає врахування чотирьох інших вузлів (Рис.2б).

Враховуючи, що $u(x_i, y_j) \approx u_{i,j}$ та рівності (7), (8), (9) і провівши дискретизацію функцій коефіцієнтів та правої частини $g(x_i, y_j) = g_{i,j}$, перепишемо рівняння (6) в систему кінцево-різницевих алгебраїчних рівнянь:

$$a_{i,j} \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} + 2b_{i,j} \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} + c_{i,j} \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2} + \quad (10)$$

$$+ d_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + e_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} + f_{i,j} u_{i,j} = g_{i,j} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, M;$$

$$\begin{aligned} & \left(2(a+b) - h^2 f_{i,j}\right) u_{i,j} - \left(a_{i,j} + \frac{d_{i,j} h}{2}\right) u_{i+1,j} - \left(a_{i,j} - \frac{d_{i,j} h}{2}\right) u_{i-1,j} - \left(c_{i,j} + \frac{e_{i,j} h}{2}\right) u_{i,j+1} - \\ & - \left(c_{i,j} - \frac{e_{i,j} h}{2}\right) u_{i,j-1} - \frac{2b}{4} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}) = h^2 g_{i,j} + O(h^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким чином отримуємо систему з $N = M^2$ рівнянь, кожне з яких записується для певного вузла різницевої сітки (i, j) . Рівняння (11) можна переписати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{i,j} u_{i,j} - \hat{b}_{i,j} u_{i+1,j} - \hat{c}_{i,j} u_{i-1,j} - \hat{d}_{i,j} u_{i,j+1} - \hat{e}_{i,j} u_{i,j-1} - \hat{q}_{i,j} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) = \\ & = -h^2 g_{i,j} + O(h^2), \quad i = 1, 2, \dots, M; \quad j = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (12)$$

де $\hat{a}_{i,j} = 2(a_{i,j} + c_{i,j}) - h^2 f_{i,j}$, $\hat{b}_{i,j} = a_{i,j} + \frac{d_{i,j}h}{2}$, $\hat{c}_{i,j} = a_{i,j} - \frac{d_{i,j}h}{2}$, $\hat{d}_{i,j} = c_{i,j} + \frac{e_{i,j}h}{2}$,
 $\hat{e}_{i,j} = c_{i,j} - \frac{e_{i,j}h}{2}$, $\hat{q}_{i,j} = \frac{2b_{i,j}}{4}$ - нові коефіцієнти рівняння.

В матричному вигляді система кінцево-різницевих ЛАР (12) має такий вигляд:

$$Au = b, \quad (13)$$

де A - матриця коефіцієнтів, b - вектор правих частин, в які також перенесено відомі значення $u(x_i, y_j)$ на границі Γ .

У випадку, коли система лінійних алгебраїчних рівнянь записується в матричному вигляді (13), передбачається існування відповідності між впорядкуванням рівнянь і впорядкуванням невідомих і що впорядкування невідомих вже вибране. Вектор невідомих має наступний вигляд [3]:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Якщо k -тим невідомим у векторі u є $u_{i,j}$, то ми передбачаємо, що k -та стрічка матриці A була отримана з різницевого рівняння (12), яке відповідає точці сітки (x_i, y_j) .

На розподіл елементів матриці A впливає те, як пронумеровані шукані значення функції u у вузлах різницевої сітки, що називається впорядкуванням для розбиття. Розбиття може бути точковим або блочним, наприклад, коли сітка розбивається на лінії точок. Існує кілька відомих методів впорядкування точкового розбиття, зокрема природне та червоно-чорне впорядкування. Перше визначається тим, що $u_{i^*j^*}$ слідує за u_{ij} якщо $j^* > j$ або якщо $j^* = j$ та $i^* > i$. У відповідності з цим впорядкуванням невідомих у векторі u можна єдиним чином визначити елементи матриці A (рис. 3а). Червоно-чорне впорядкування визначається наступним чином: нехай «червоні» невідомі утворюють множину всіх таких u_{ij} , для яких $(i+j)$ є парним і нехай «чорні» невідомі утворюють множину всіх таких u_{ij} , для яких $(i+j)$ є непарним. Тоді червоно-чорним впорядкуванням може бути довільне таке впорядкування, в якому будь-яке чорне невідоме слідує за усіма червоними невідомими (рис. 3б) [3].

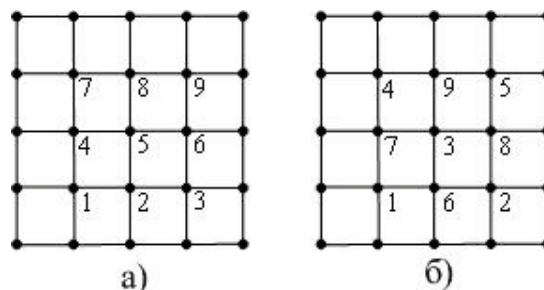


Рис. 3. Впорядкування точок сітки для точкового розбиття:
 а – звичайне впорядкування, б – червоно-чорне впорядкування

При звичайному точковому розбитті матриця коефіцієнтів $A[N \times N]$ є розрідженою. Кожна i -та стрічка матриці A містить коефіцієнти різницевого рівняння, записаного для i -того вузла

($i = 1..M$). Тому, оскільки для визначення кожного вузла за центральними апроксимаціями використовується 8 сусідніх вузлів (рисунок), кожна стрічка матриці повинна містити лише $8+1=9$ ненульових елементів. При формуванні вектора u за звичайним точковим розбиттям (рис. 2б), група ненульових елементів, в яку поряд з нулями входять 9 згаданих елементів, має довжину $2M + 3$. При звичайному точковому розбитті для $N = M^2 = 9$ матриця A є стрічковою і при сталих коефіцієнтах a, b, c, d, e, f має вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} \hat{a} & -\hat{b} & 0 & -\hat{d} & -\hat{e} & & & & \\ -\hat{c} & \hat{a} & -\hat{b} & \hat{q} & -\hat{d} & -\hat{e} & & & \\ 0 & -\hat{c} & \hat{a} & 0 & \hat{q} & -\hat{d} & 0 & & \\ -\hat{e} & \hat{q} & 0 & \hat{a} & -\hat{b} & 0 & -\hat{d} & -\hat{q} & \\ -\hat{q} & -\hat{e} & \hat{q} & -\hat{c} & \hat{a} & -\hat{b} & \hat{q} & -\hat{d} & -\hat{q} \\ & -\hat{q} & -\hat{e} & 0 & -\hat{c} & \hat{a} & 0 & \hat{q} & -\hat{d} \\ & & 0 & -\hat{c} & \hat{q} & 0 & \hat{a} & -\hat{b} & 0 \\ & & & -\hat{q} & -\hat{e} & \hat{q} & -\hat{c} & \hat{a} & -\hat{b} \\ & & & & -\hat{q} & -\hat{e} & 0 & -\hat{c} & \hat{a} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Для забезпечення точності методу крок сітки обирається малим, що веде до високих порядків матриці коефіцієнтів $A(N \times N)$ де $N = M^2 = (I - 1)^2$ - кількість вузлів сітки в області розв'язання, обмежених граничними вузлами. При дискретизації області обчислень сіткою 100×100 , отримуємо 10000 вузлів і матрицю A , розмірністю 10000×10000 . Враховуючи те, що наявні на сьогодні оптичні ПЧМС типу SEED працюють з картинами розмірністю 1000×1000 [2], напряду вирішити таку СЛАР їх засобами не виявляється можливим.

Ситуація покращується при зверненні до блочного розбиття, коли невідомі нумеруються по лініям сітки. Нехай U_j визначає вектор невідомих, які розташовуються на певній лінії сітки, тоді звичайне впорядкування невідомих по лініям визначається тим, що U_{j^*} слідує за U_j , якщо $j^* > j$ (рис. 4).

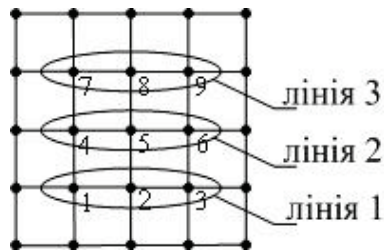


Рис. 4. Впорядкування точок сітки для звичайного розбиття по лініям

При такому розбитті система (12) може бути записана в блочному вигляді:

спецпроцесорів, при структурній реалізації яких у порівнянні зі звичайними методами, продуктивність підвищується у N разів (N характеризує розмірність підматриці $A_{i,j}$).

Час знаходження оберненої до матриці A на запропонованій у роботі [1] структурі на базі ПЧМС на основі квантово-розмірних структур типу SEED згідно з (5) становить 31,177с (при розрядності мантиси та порядку $M_S=48$, $P_S=16$ та часу затримки розповсюдження сигналу $\tau=10^{-6}$ с).

Оскільки запропонований блочний алгоритм прямий і розроблений для неособливої матриці, подальша робота буде направлена на врахування того, що матриця A і всі її підматриці є тридіагональними і на розробку алгоритму та структурної моделі паралельного оптоелектронного розрядно-зрізового спецпроцесора для множення матриці на вектор за блочним методом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Просторово-часова матрична математична модель організації процесу обернення матриць в паралельному оптоелектронному спецпроцесорі / Н.І. Заболотна, О.В. Дроненко // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – №5. – С.72-78.
2. Шолота В.В. Високопродуктивний процесор для паралельного розв'язання систем лінійних рівнянь та обернення матриць / В.В. Шолота // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах (Технологічний університет Поділля, м. Хмельницький). – 1999. – №1. – С.86-91.
3. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг : [пер. с англ.]. – М.: Мир, 1986. – 448с.

Надійшла до редакції 14.02.2009р.

ЗАБОЛОТНА НАТАЛІЯ ІВАНІВНА – к.т.н., доцент кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, декан ФФЕЛТ, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, тел. 8(0432)-598337.

ШОЛОТА ВЛАДИСЛАВ ВАСИЛЬОВИЧ – к.т.н., доцент кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, тел. 8(0432)-598337.

ДРОНЕНКО ОЛЕНА ВАСИЛІВНА –аспірант кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, тел. 8(097)-7494312.

ВІТЮК В'ЯЧЕСЛАВ ВІКТОРОВИЧ –аспірант кафедри лазерної та оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна, тел. 8(0432)-695346.