

УДК 681.325.5.068

В.П. КОЖЕМ'ЯКО, Н.В. САЧАНЮК-КАВЕЦЬКА, Л.О. ВОЛОНТИР

ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЇ ІНТЕГРУВАННЯ ЛОГІКО-ЧАСОВОЇ ФУНКЦІЇ НАПІВТОНОВИХ ЗОБРАЖЕНЬ

*Вінницький національний технічний університет,
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021, Україна,
тел.:(+380) (432) 511631, факс: (+380) (432) 433375
E-mail: kvp@vstu.vinnica.ua*

Анотація: В статті розглядаються питання визначення операції інтегрування та знаходження первісної логіко-часових функцій k - значної логіки, властивості інтегрування напівтонових зображень для підвищення ефективності око-процесорної обробки зображень та можливості перетворення аналогового сигналу в дискретний кількісний вираз.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы определения операции интегрирования и определения первообразной логико-часовой функции k - значной логики, свойства интегрирования ЛЧФ полутоновых изображений с целью повышения эффективности глаз - процессорной обработки изображений та возможности преобразования аналогового сигнала в дискретный.

Ключові слова: око-процесор, логіко-часова функція (ЛЧФ), первісна, інтеграл, напівтонове зображення, проміжок існування.

ВСТУП

Найбільш досконалим природним прототипом технічного зору є око людини. Дія людського ока базується на мозковій діяльності. Тому при аналізі такого підходу до обробки оптичної інформації з'являється проблема інтуїтивних рішень. Найбільш цікавою задачею є створення теоретичного обґрунтування нетрадиційних методів обробки інформації, які зможуть виконувати обробку інформації не за звичайними принципами, а наближаючись до форми обробки людським мозком. Найбільш цікавою задачею цієї проблеми є ідентифікування зображень. Тобто ставиться мета розробки оптимальної системи технічного зору.

Науковою школою Кожем'яко В.П. дано визначення око-процесора як інформаційної інтелектуальної системи, що моделює образне відображення світу на основі сприйняття візуальної інформації довільної природи, виділяє певні властивості та ознаки середовища, оброблює та приймає відповідні рішення автоматично або з участю оператора [5, 6]. Особливістю такого око-процесора є можливість інтелектуального прийняття рішень в процесі оброблення і аналізу зображень і розпізнавання образів.

Серед основних функцій око-процесора як інтелектуальної системи присутні такі:

- розпізнавання деякого об'єкта у заданому класі зображень за еталонним об'єктом або при його відсутності за апіорними ознаками, що виділяються в процесі аналізу зображень;
- автоматичне відстеження параметрів визначеного об'єкта зображень за умов його еволюції, тобто зміни положення, розмірів, яскравості, моментних ознак тощо [1-4].

Крім, того око-процесор виконує ряд допоміжних функцій, які пов'язані з нормуванням зображень, а саме, зсув, затримку, попередню фільтрацію, виконання деяких логічних та математичних операцій [1-6, 8].

Математичні операції над логіко-часовими функціями дозволяють вдосконалити формальний апарат аналізу математичних моделей [7, 8].

Визначення. Первісна ЛЧФ k - значної логіки – це k - значна логіко-часова функція $F(t, t_1, \dots, t_m, T_1, \dots, T_m, a_1, \dots, a_m)$, для якої виконується рівність:

$$F'(t, t_1, \dots, t_m, T_1, \dots, T_m, a_1, \dots, a_m) = f(t, t_1, \dots, t_m, T_1, \dots, T_m, a_1, \dots, a_m) \quad (1)$$

Арифметичне логіко-часове додавання двох ЛЧФ k - значної логіки визначається так:

$$f(t, t_1, T_1, a_1) + f(t, t_2, T_2, a_2) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t < t_2 \\ (t - t_2)(a_1 + a_2), & \text{якщо } t_2 \leq t \leq \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \\ (t - (t_2 + T_2))a_1, & \text{якщо } \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) < t \leq \\ & \leq \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2) \\ (t - (t_1 + T_1))a_2 & \text{якщо } \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) < t \leq \\ & \leq \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1) \\ 0, & \text{якщо } t_1 \geq t > \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \end{cases}$$

Теорема 1. Первісна нерівнозначного віднімання ($|k|$) ЛЧФ k - значної логіки дорівнює нерівнозначному відніманню ($|k|$) первісних цих функцій.

Доведення. Доведемо дану теорему методом повної математичної індукції.

1. Нехай $T_1 = T_2 = \Delta_i$. Тоді ЛЧФ f_1 та f_2 матимуть вигляд:

$$f_i(t, t_i, \Delta_i, a_i) = \begin{cases} (t - t_i)a_i, & \text{якщо } t_i < t \leq t_i + \Delta_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_i) \wedge (t > t_i + \Delta_i) \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю f_1 та f_2 виду (2.2.2.2) за модулем k , отримаємо:

$$f_1(t, t_1, \Delta_i, a_1) |k| f_2(t, t_2, \Delta_i, a_2) = \begin{cases} (t - (t_p + \Delta_i)) |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), \text{ якщо } \min(t_1, t_2) \leq t \leq \\ & \leq \max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_i, t_1, \Delta_i), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_i, t_2, \Delta_i)) \\ 0, & \text{якщо } t < \min(t_1, t_2) \vee \\ & \vee \max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_i, t_1, \Delta_i), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_i, t_2, \Delta_i)) > t \end{cases} \quad (3)$$

Збільшимо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta'_i = \Delta_i/2$. Кількість таких інтервалів буде $n' = 2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ (3):

$$\int f_1(t, t_1, \Delta_i, a_1) |k| f_2(t, t_2, \Delta_i, a_2) dt = \begin{cases} [t - (t_p + k\Delta'_i)] |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), t_p + 2k\Delta'_i < t \leq t_p + (2k+1)\Delta'_i, k - \text{порядковий номер} \\ & \Delta - \text{інтервалу}, \quad k = 0, \frac{\max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_i, t_1, \Delta_i), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_i, t_2, \Delta_i)) - t_p}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_p \wedge t > t_p + \max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_i, t_1, \Delta_i), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_i, t_2, \Delta_i)) \wedge t_p + (2k+1)\Delta'_i \leq t < t_p + (2k+2)\Delta'_i \end{cases} \quad (4)$$

Обчислимо первісні функцій f_1 та f_2 виду (2.2.2.2):

$$F_i(t, t_i, \Delta_i, a_i) = \begin{cases} (t - t_i)a_i, & t_i < t \leq t_i + \Delta_i \\ 0, & t \leq t_i \wedge t > t_i + \Delta_i \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (5)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю по модулю k первісних виду (5):

$$F_1(t, t_1, \Delta_1, a_1) |k| F_2(t, t_2, \Delta_2, a_2) = \begin{cases} [t - (t_p + k\Delta_i)] |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), t_p + 2k\Delta_i < t \leq t_p + (2k+1)\Delta_i, k - \text{порядковий номер} \\ \Delta - \text{інтервалу}, & k = 0, \frac{\max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_1, t_1, \Delta_1), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_2, t_2, \Delta_2)) - t_p}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_p \wedge t > t_p + \max(t_1 + f_1(t_1 + \Delta_1, t_1, \Delta_1), t_2 + f_2(t_2 + \Delta_2, t_2, \Delta_2)) \wedge t_p + (2k+1)\Delta_i \leq t < t_p + (2k+2)\Delta_i \end{cases} \quad (6)$$

Праві частини рівностей (2.2.2.4) та (2.2.2.6) рівні між собою, а отже рівні і ліві частини, тобто:

$$\int f_1(t, t_1, \Delta_1, a_1) |k| f_2(t, t_2, \Delta_2, a_2) dt = \int f_1(t, t_1, \Delta_1, a_1) dt |k| \int f_2(t, t_2, \Delta_2, a_2) dt \quad (7)$$

Розглянемо граничний випадок, для якого відрізки існування ЛЧФ f_1 та f_2 різні та відмінні від Δ -інтервалу, тобто $T_1 \neq T_2 \neq \Delta_i$; часові координати функцій не співпадають.

$$f_i(t, t_i, T_i, a_i) = \begin{cases} (t - t_i)a_i, & \text{якщо } t_i < t \leq t_i + T_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_i) \wedge (t > t_i + T_i) \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю по модулю k ЛЧФ виду (8)

$$f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_2(t, t_2, T_2, a_2) = \begin{cases} (t - (t_p + \Delta_i)) |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), \text{ якщо } \min(t_1, t_2) \leq t \leq \\ & \leq \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) \\ 0, & \text{якщо } t < \min(t_1, t_2) \vee \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) > t \end{cases} \quad (9)$$

Та первісну ЛЧФ (9)

$$\int f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt = \begin{cases} [t - (t_p + k\Delta_i)] |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), t_p + 2k\Delta_i < t \leq t_p + (2k+1)\Delta_i, k - \text{порядковий номер} \\ \Delta - \text{інтервалу}, & k = 0, \frac{\max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) - t_p}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_p \wedge t > t_p + \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) \wedge t_p + (2k+1)\Delta_i \leq t < t_p + (2k+2)\Delta_i \end{cases} \quad (10)$$

Визначимо первісні функцій f_1 та f_2 виду (8) як

$$F(t, t_i, T_i, a_i) = \begin{cases} (t - (t_i + p \cdot \Delta_i)) a_i, & t_i + 2p\Delta_i < t \leq t_i + (2p+1)\Delta_i, p - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу}, \\ & p = 0, \frac{T_i}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_i \wedge t > t_i + T_i \wedge t_i + (2p+1)\Delta_i \leq t < t_i + (2p+2)\Delta_i \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

Та нерівнозначну різницю по модулю k ЛЧФ виду (11):

$$F(t, t_1, T_1, a_1) |k| F_2(t, t_2, T_2, a_2) = \begin{cases} [t - (t_p + k\Delta'_i)] |a_1 - a_2|, & t_p = \min(t_1, t_2), t_p + 2k\Delta'_i < t \leq t_p + (2k+1)\Delta'_i, k - \text{порядковий номер} \\ \Delta - \text{інтервалу}, k = 0, & \frac{\max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) - t_p}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_p \wedge t > t_p + \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2)) \wedge t_p + (2k+1)\Delta'_i \leq t < t_p + (2k+2)\Delta'_i \end{cases} \quad (12)$$

Для даного граничного випадку, враховуючи рівності (10) та (12), теорема має місце.

Базис індукції доведений.

Припустимо, що теорема справедлива для випадку n ЛЧФ, тобто:

$$\int f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_2(t, t_2, T_2, a_2) |k| \dots |k| f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt |k| \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt |k| \dots |k| \int f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt \quad (13)$$

Доведемо, що теорема має місце для випадку $n+1$ ЛЧФ. Скористаємося для цього рівністю (7) та припущенням (13), тобто:

$$\begin{aligned} & \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_2(t, t_2, T_2, a_2) |k| \dots |k| f_n(t, t_n, T_n, a_n) |k| f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1}) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt |k| \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt |k| \dots |k| \int f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt |k| \int f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1}) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt |k| \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt |k| \dots |k| \int f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt |k| \int f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1}) dt \end{aligned}$$

Тобто теорема справедлива для будь-якої кількості ЛЧФ, що складаються з одного відрізка існування.

Доведемо тепер, що теорема має місце і у випадку n відрізків існування. Нехай $f(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2)$ та $f(t, t_3, t_4, T_3, T_4, a_3, a_4)$ - дані ЛЧФ. Оскільки, згідно із властивістю операції нерівнозначної різниці по k [8] маємо:

$$\begin{aligned} f_1(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2) &= f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_1(t, t_2, T_2, a_2) \\ f_2(t, t_3, t_4, T_3, T_4, a_3, a_4) &= f_2(t, t_3, T_3, a_3) |k| f_2(t, t_4, T_4, a_4) \end{aligned}$$

та враховуючи попереднє доведення отримуємо:

$$\begin{aligned} & \int f_1(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2) |k| f_2(t, t_3, t_4, T_3, T_4, a_3, a_4) dt = \int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_1(t, t_2, T_2, a_2)) |k| \\ & |k| (f_2(t, t_3, T_3, a_3) |k| f_2(t, t_4, T_4, a_4)) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) |k| f_1(t, t_2, T_2, a_2) dt |k| \int f_2(t, t_3, T_3, a_3) |k| f_2(t, t_4, T_4, a_4) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2) dt |k| \int f_2(t, t_3, t_4, T_3, T_4, a_3, a_4) dt \end{aligned} \quad (14)$$

Припустимо, що рівність (14) справедлива для випадку n проміжків існування, тобто:

$$\begin{aligned} & \int f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, T_1, T_2, \dots, T_n, a_1, a_2, \dots, a_n) |k| f_2(t, t'_1, t'_2, \dots, t'_n, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, T_1, T_2, \dots, T_n, a_1, a_2, \dots, a_n) dt |k| \int f_2(t, t'_1, t'_2, \dots, t'_n, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n) dt \end{aligned} \quad (15)$$

Скориставшись висновками (14) та (15), доведемо справедливості теореми для випадку $n+1$

відрізку існування:

$$\begin{aligned} & \int f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) |k| f_2(t', t'_1, t'_2, \dots, t'_n, t'_{n+1}, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, T'_{n+1}, a'_1, a'_2, \dots, a'_n, a'_{n+1}) dt = \\ & = \int (f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, T_1, T_2, \dots, T_n, a_1, a_2, \dots, a_n) |k| f_1(t, t_n, T_n, a_n)) dt |k| (f_2(t', t'_1, t'_2, \dots, t'_n, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n) |k| f_2(t', t'_n, T'_n, a'_n)) dt = \\ & \int (f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, T_1, T_2, \dots, T_n, a_1, a_2, \dots, a_n) |k| f_1(t, t_n, T_n, a_n)) dt |k| \int (f_2(t', t'_1, t'_2, \dots, t'_n, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, a'_1, a'_2, \dots, a'_n) |k| f_2(t', t'_n, T'_n, a'_n)) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, T_1, T_2, \dots, T_n, T_{n+1}, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) dt |k| \int f_2(t', t'_1, t'_2, \dots, t'_n, t'_{n+1}, T'_1, T'_2, \dots, T'_n, T'_{n+1}, a'_1, a'_2, \dots, a'_n, a'_{n+1}) dt \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Первісна арифметичної суми ЛЧФ k - значної логіки дорівнює арифметичній сумі первісних цих функцій.

Доведення. Існує три можливі класи ЛЧФ k - значної логіки [8]. Функції другого та третього класу можна представити як суперпозицію функцій першого класу завдяки властивості 4 операції нерівнозначного віднімання ($|k|$).

Так будь-яка ЛЧФ

$$f(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 \leq t \leq t_1 + T_1 \\ (t - t_2)a_2, & \text{якщо } t_2 \leq t \leq t_2 + T_2 \\ 0, & \text{якщо } (t < t_1) \wedge (t_1 + T_1 < t < t_2) \wedge (t > t_2 + T_2) \end{cases}$$

може бути подана як нерівнозначна різниця ЛЧФ з одним проміжком існування:

$$f(t, t_1, t_2, T_1, T_2, a_1, a_2) = f(t, t_1, T_1, a_1) |k| f(t, t_2, T_2, a_2)$$

$$\text{де } f_i(t, t_i, T_i, a_i) = \begin{cases} (t - t_i)a_i, & \text{якщо } t_i < t \leq t_i + \Delta_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_i) \wedge (t > t_i + \Delta_i) \end{cases}$$

Достатньо довести цю теорему для функцій першого класу. Знайдемо первісну арифметичної суми ЛЧФ k - значної логіки:

Первісна кожної ЛЧФ визначається так

$$\int f_i(t, t_i, T_i, a_i) dt = \begin{cases} (t - (t_i + p \cdot \Delta_i))a_i, & t_i + 2p\Delta_i < t \leq t_i + (2p + 1)\Delta_i, \quad p - \text{порядковий номер} \\ & \Delta - \text{інтервалу}, \quad p = 0, \frac{T_i}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_i \wedge t > t_i + T_i \wedge t_i + (2p + 1)\Delta_i \leq t < t_i + (2p + 2)\Delta_i \end{cases}$$

$$\int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2)) dt =$$

$$= \begin{cases} (t - (t_1 + p_1 \Delta'_i)) a_1, & \text{якщо } t_1 + 2p_1 \Delta'_i < t < t_1 + (2p_1 + 1) \Delta'_i, \\ & p_1 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу, } p_1 = 0, \frac{t_2 - t_1}{\Delta_i} - 1 \\ (t - (t_2 + p_2 \Delta'_i)) (a_1 + a_2), & \text{якщо } t_2 + 2p_2 \Delta'_i < t < t_2 + (2p_2 + 1) \Delta'_i, p_2 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & p_2 = 0, \frac{\min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) - t_2}{\Delta_i} - 1 \\ (t - (t_2 + T_2 + p_3 \Delta'_i)) a_1, & \text{якщо } (t_2 + T_2) + 2p_3 \Delta'_i < t < (t_2 + T_2) + (2p_3 + 1) \Delta'_i, p_3 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2) \\ (t - (t_1 + T_1 + p_4 \Delta'_i)) a_2, & \text{якщо } t_1 + 2p_4 \Delta'_i < t < t_1 + (2p_4 + 1) \Delta'_i, p_4 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1) \\ 0, & \text{якщо } t_1 > t \wedge t > \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \wedge \\ & \wedge t_1 + (2p_1 + 1) \Delta'_i \leq t < t_1 + (2p_1 + 2) \Delta'_i \wedge t_2 + (2p_2 + 1) \Delta'_i \leq t < t_2 + (2p_2 + 2) \Delta'_i \wedge \\ & \wedge (t_2 + T_2) + (2p_3 + 1) \Delta'_i \leq t < (t_2 + T_2) + (2p_3 + 2) \Delta'_i \wedge (t_1 + T_1) + (2p_4 + 1) \Delta'_i \leq t < (t_1 + T_1) + (2p_4 + 2) \Delta'_i \end{cases} \quad (16)$$

Знайдемо арифметичну суму первісних двох функцій ($i=1,2$). Згідно визначення арифметичної суми двох ЛЧФ к- значної логіки маємо:

$$\int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2)) dt =$$

$$= \begin{cases} (t - (t_1 + p_1 \Delta'_i)) a_1, & \text{якщо } t_1 + 2p_1 \Delta'_i < t < t_1 + (2p_1 + 1) \Delta'_i, \\ & p_1 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу, } p_1 = 0, \frac{t_2 - t_1}{\Delta_i} - 1 \\ (t - (t_2 + p_2 \Delta'_i)) (a_1 + a_2), & \text{якщо } t_2 + 2p_2 \Delta'_i < t < t_2 + (2p_2 + 1) \Delta'_i, p_2 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & p_2 = 0, \frac{\min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) - t_2}{\Delta_i} - 1 \\ (t - (t_2 + T_2 + p_3 \Delta'_i)) a_1, & \text{якщо } (t_2 + T_2) + 2p_3 \Delta'_i < t < (t_2 + T_2) + (2p_3 + 1) \Delta'_i, p_3 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2) \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2) \\ (t - (t_1 + T_1 + p_4 \Delta'_i)) a_2, & \text{якщо } t_1 + 2p_4 \Delta'_i < t < t_1 + (2p_4 + 1) \Delta'_i, p_4 - \text{порядковий номер } \Delta - \text{інтервалу,} \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1) \wedge \\ & \wedge \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) = t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1) \\ 0, & \text{якщо } t_1 > t \wedge t > \max(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1, a_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2, a_2)) \wedge \\ & \wedge t_1 + (2p_1 + 1) \Delta'_i \leq t < t_1 + (2p_1 + 2) \Delta'_i \wedge t_2 + (2p_2 + 1) \Delta'_i \leq t < t_2 + (2p_2 + 2) \Delta'_i \wedge \\ & \wedge (t_2 + T_2) + (2p_3 + 1) \Delta'_i \leq t < (t_2 + T_2) + (2p_3 + 2) \Delta'_i \wedge (t_1 + T_1) + (2p_4 + 1) \Delta'_i \leq t < (t_1 + T_1) + (2p_4 + 2) \Delta'_i \end{cases} \quad (17)$$

Та як рівні праві частини (16) та (17), то і ліві частини будуть рівними, а саме:

$$\int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2)) dt = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt + \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt, \quad (18)$$

Базис індукції доведений.

Припустимо, що теорема має місце для n функцій, тобто

$$\int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2) + \dots + f_n(t, t_n, T_n, a_n)) dt = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt + \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt + \dots + \int f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt \quad (19)$$

Доведемо її для кількості ЛЧФ $n+1$. Скористаємося для цього рівністю (18) та припущенням (19):

$$\begin{aligned} & \int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2) + \dots + f_n(t, t_n, T_n, a_n) \oplus f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1})) dt = \\ & = \int (f_1(t, t_1, T_1, a_1) + f_2(t, t_2, T_2, a_2) + \dots + f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt) + \int f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1}) dt = \\ & = \int f_1(t, t_1, T_1, a_1) dt + \int f_2(t, t_2, T_2, a_2) dt + \dots + \int f_n(t, t_n, T_n, a_n) dt + \int f_{n+1}(t, t_{n+1}, T_{n+1}, a_{n+1}) dt \end{aligned}$$

Тобто теорема справедлива для будь-якої кількості ЛЧФ, що складаються з одного відрізка існування.

Таким чином, теорему доведено.

Теорема 3. Нерівнозначна різниця первісної ЛЧФ k - значної логіки та первісної ЛЧФ з затримкою на один $\Delta/2$ інтервал дорівнює самій ЛЧФ

Доведення. Існує три класи ЛЧФ k - значної логіки [8, С.46], то достатньо довести цю теорему для кожного з цих класів.

Перший клас - клас ЛЧФ, що між двома нулями приймають сталі значення. Позначимо такі функції $f(t, t_1, T_1, a_1)$. Тут t - поточне значення часу, t_1 - часова координата, T_1 - тривалість відрізка існування, a_1 - амплітуда ($a_1 = \overline{0, k-1}$, $T_1 \neq t_{k+1} - t_k$).

Доведемо справедливості теорему для двох можливих випадків.

1) Розглянемо випадок, коли $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + \Delta_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + \Delta_i) \end{cases} \quad (19)$$

Збільшимо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta'_i = \Delta_i/2$. кількість таких інтервалів буде $n'=2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ функції (3.1). За означенням маємо:

$$F(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & t_1 < t \leq t_1 + \Delta'_i \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + \Delta'_i \end{cases} \quad (20)$$

Первісна цієї функції, але з затримкою на Δ'_i , що дорівнює $\Delta_i/2$ - інтервалу має вигляд:

$$F(t, t_1 + \Delta'_i, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - (t_1 + \Delta'_i))a_1, & t_1 + \Delta'_i < t \leq t_1 + 2\Delta'_i \\ 0, & t \leq t_1 + \Delta'_i \wedge t > t_1 + 2\Delta'_i \end{cases} \quad (21)$$

Знайдемо нерівнозначну різницю функцій (3.2) та (3.3). В результаті отримаємо:

$$F(t, t_1, \Delta_i, a_1) \setminus k | F(t, t_1 + \Delta'_i, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & t_1 < t \leq t_1 + 2\Delta'_i \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + 2\Delta'_i \end{cases} \quad (22)$$

Згідно проведеної дискретизації $2\Delta'_i = \Delta_i$, тому праві частини виразів (22) та (19) рівні між собою, а отже будуть рівні і ліві частини. Тобто:

$$F(t, t_1, \Delta_i, a_1) \setminus k | F(t, t_1 + \Delta'_i, \Delta_i, a_1) = f(t, t_1, \Delta_i, a_1).$$

2) Розглянемо випадок, коли $T_1 \neq \Delta_i$.

$$f_1(t, t_1, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + T_1 \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + T_1) \end{cases} \quad (23)$$

Її первісна:

$$F(t, t_1, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - (t_1 + p \cdot \Delta_i))a_1, & t_1 + 2p\Delta_i < t \leq t_1 + (2p+1)\Delta_i, \quad p - \text{порядковий номер} \\ \text{номер } \Delta\text{-інтервалу}, & p = 0, \frac{T_1}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + T_1 \wedge t_1 + (2p+1)\Delta_i \leq t < t_1 + (2p+2)\Delta_i \end{cases} \quad (24)$$

та первісна з затримкою на $\Delta_i/2$ інтервал:

$$F(t, t_1 + \Delta_i, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - (t_1 + p \cdot \Delta_i + \Delta_i))a_1, & t_1 + (2p+1)\Delta_i < t \leq t_1 + (2p+2)\Delta_i, \quad p - \text{порядковий} \\ \text{номер } \Delta\text{-інтервалу}, & p = 0, \frac{T_1}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_1 + \Delta_i \wedge t > t_1 + \Delta_i + T_1 \wedge t_1 + 2(p+1)\Delta_i \leq t < t_1 + 2(p+1)\Delta_i \end{cases} \quad (25)$$

Виконавши приведення подібних доданків і враховуючи, що $2\Delta_i = \Delta_i$,

Нерівнозначна різниця функцій (24) та (25) така:

$$F(t, t_1, T_1, a_1) \setminus k | F(t, t_1 + \Delta_i, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + T_1 \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + T_1) \end{cases} \quad (26)$$

Таким чином, і в цьому випадку теорема має місце, оскільки праві частини рівностей (23) та (25) рівні між собою, то рівні і ліві частини, тобто

$$F(t, t_1, T_1, a_1) \setminus k | F(t, t_1 + \Delta_i, T_1, a_1) = f(t, t_1, T_1, a_1) \quad (27)$$

Згідно властивості 4 [8, С.36] операції нерівнозначного віднімання, будь-яку ЛЧФ можна розглядати як нерівнозначну різницю ЛЧФ з одним відрізком існування. Тому теорема має місце для всіх класів ЛЧФ к - значної логіки.

Теорема доведена.

Теорема 4. Кількість відрізків існування первісної ЛЧФ к - значної логіки дорівнює кількості Δ інтервалів, на яких ЛЧФ має імпульс з амплітудою a_i .

Доведення. Перевіримо, чи справедлива дана теорема у випадку логіко-часової функції, область визначення якої складається лише з одного відрізка існування. Для ЛЧФ другого та третього класів при цьому теорема також буде мати місце, оскільки згідно з властивістю 4 [8, С. 36] будь-яку ЛЧФ, що має m відрізків існування можна представити як нерівнозначну різницю m ЛЧФ з одним відрізком існування. Дану теорему доведемо за допомогою методу математичної індукції.

Базис індукції. Розглянемо випадок, коли $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + \Delta_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + \Delta_i) \end{cases} \quad (28)$$

де t - поточне значення параметра; t_1 - початок відрізка існування; T_1 - тривалість відрізка існування, $n = \frac{T_1}{\Delta_i}$. Проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розб'ємо на два. Отримаємо

інтервал $\Delta'_i = \Delta_i/2$. кількість таких інтервалів буде $n'=2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ функції (4.1). За означенням маємо:

$$F(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & t_1 < t \leq t_1 + \Delta_i \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + \Delta_i \end{cases} \quad (29)$$

Таким чином, первісна має один відрізок існування. Базис індукції доведений. Графічне підтвердження доведення даного випадку зображено нарис. 1

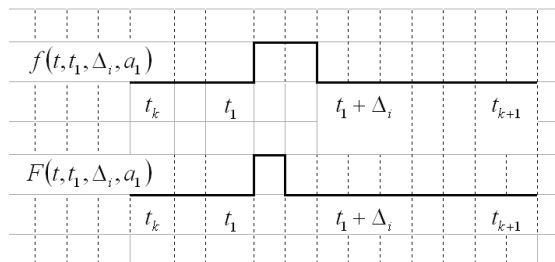


Рис. 1. Знаходження первісної ЛЧФ у випадку $T_1 = \Delta_i$.

Припустимо, що теорема має місце, коли $T_1 \neq \Delta_i$ та $T_1 = n\Delta_i$, тобто якщо ЛЧФ має імпульс з амплітудою a_i на проміжку, що дорівнює n Δ_i інтервалам, то її первісна буде мати n відрізків існування.

Доведемо, що твердження теореми справедливе і для випадку ЛЧФ, відрізок існування якої містить $n+1$ Δ_i інтервал. Маємо:

$$f_1(t, t_1, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + T_1 \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + T_1) \end{cases} \quad (30)$$

$T_1 = (n+1)\Delta_i$ її первісна:

$$F(t, t_1, T_1, a_1) = \begin{cases} (t - (t_1 + p \cdot \Delta_i))a_1, & t_1 + 2p\Delta_i < t \leq t_1 + (2p+1)\Delta_i, \quad p - \text{порядковий номер} \\ & \Delta - \text{інтервалу}, \quad p = 0, \frac{T_1}{\Delta_i} - 1 \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + T_1 \wedge t_1 + (2p+1)\Delta_i \leq t < t_1 + (2p+2)\Delta_i \end{cases} \quad (31)$$

$p = \frac{T_1}{\Delta_i} - 1 = \frac{(n+1)\Delta_i}{\Delta_i} - 1 = n + 1 - 1 = n$. Звідки, кількість відрізків існування буде становити $n+1$.

Таким чином, і в цьому випадку теорема має місце (рис. 2).

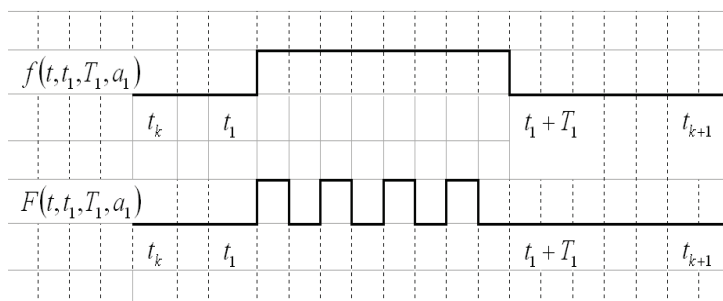


Рис. 2. Можливий варіант знаходження первісної ЛЧФ, коли $T_1 \neq \Delta_i$

Отже, згідно принципу математичної індукції первісна ЛЧФ k - значної логіки буде мати стільки відрізків існування, скільки Δ_i інтервалів вкладається в відрізок існування ЛЧФ з амплітудою a_i (для кожного відрізка існування ЛЧФ окремо). Теорема доведена.

Теорема 5. Кожна наступна первісна ЛЧФ k -значної логіки має таку саму кількість відрізків існування, що і підінтегральна ЛЧФ.

Доведення. Розглянемо логіко-часову функцію k -значної логіки, область визначення якої складається лише з одного відрізка існування.

Випадок $T_1 = \Delta_i$.

$$f_1(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & \text{якщо } t_1 < t \leq t_1 + \Delta_i \\ 0, & \text{якщо } (t \leq t_1) \wedge (t > t_1 + \Delta_i) \end{cases} \quad (32)$$

де t - поточне значення параметра; t_1 - початок відрізка існування; T_1 - тривалість відрізка існування, $n = \frac{T_1}{\Delta_i}$. Проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ_i розіб'ємо на два. Отримаємо

інтервал $\Delta'_i = \Delta_i/2$, кількість таких інтервалів буде $n' = 2n$.

Знайдемо первісну ЛЧФ функції (32). За означенням маємо:

$$F(t, t_1, \Delta_i, a_1) = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & t_1 < t \leq t_1 + \Delta'_i \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + \Delta'_i \end{cases} \quad (33)$$

Таким чином, первісна має один відрізок існування. Знайдемо первісну ЛЧФ $F(t, t_1, \Delta_i, a_1)$. Ще раз проведемо дискретизацію Δ інтервалів: кожен інтервал Δ'_i розіб'ємо на два. Отримаємо інтервал $\Delta''_i = \frac{\Delta'_i}{2}$,

кількість таких інтервалів буде $n^2 = 2n' = 4n$.

За означенням маємо:

$$\int F(t, t_1, \Delta_i, a_1) dt = \begin{cases} (t - t_1)a_1, & t_1 < t \leq t_1 + \Delta''_i \\ 0, & t \leq t_1 \wedge t > t_1 + \Delta''_i \end{cases} \quad (34)$$

Таким чином, друга первісна має один відрізок існування. Відрізок існування дорівнює Δ_i інтервалу, тому згідно з теоремою 4 кожна наступна первісна буде мати один відрізок існування.

Базис індукції доведений. Графічне підтвердження доведення даного випадку зображено на рис.3

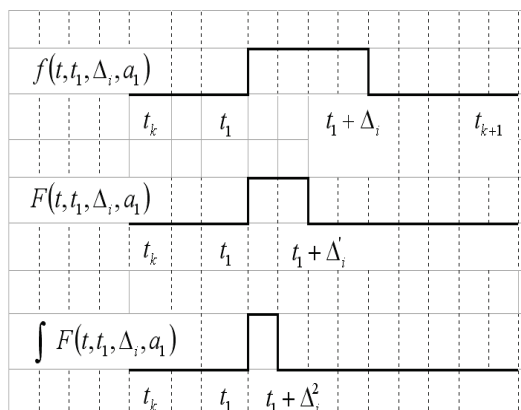


Рис.3. Знаходження первісних ЛЧФ k -значної логіки у випадку $T_1 = \Delta_i$

Розглянемо випадок, коли $T_1 \neq \Delta_i$ та $T_1 = n\Delta_i$. Первісна цієї функції буде мати n відрізків існування, кожен з яких має розмір Δ - інтервалу. Таким чином кожен відрізок існування можна

розглядати як окрему ЛЧФ k – значної логіки, для якої кожна наступна первісна буде мати один відрізок існування розміром вдвічі меншим за попередній. Це означає, що кількість відрізків існування для первісної ЛЧФ, не змінюється і дорівнює кількості Δ -інтервалів, які вміщуються у відрізок існування початкової ЛЧФ k – значної логіки.

Згідно властивості 4 [8, С.36] операції нерівнозначного віднімання, будь-яку ЛЧФ можна розглядати як нерівнозначну різницю ЛЧФ з одним відрізком існування. Тому, теорема має місце для всіх класів ЛЧФ k - значної логіки. Теорема доведена.

Операція зсуву визначається як:

$$f(t-k, t_1, T_1) = \begin{cases} t-k-t_1, & \text{якщо } t_1 < t-k \leq t_1+T_1, \\ 0, & \text{якщо } t_1 \geq t-k > t_1+T_1 \end{cases} \quad (35)$$

Інтеграл від операції зсуву дорівнює за визначенням:

$$\int f(t-k, t_1, T_1) dt = T_1$$

Таким чином, операція зсуву не змінює значення інтегралу.

Операція затримки визначається як:

$$f(t, t_1 + \tau, T_1) = \begin{cases} t-(t_1 + \tau), & \text{якщо } t_1 + \tau < t \leq t_1 + \tau + T_1 \\ 0, & \text{якщо } t_1 + \tau \geq t > t_1 + \tau + T_1 \end{cases} \quad (36)$$

Інтеграл від операції затримки дорівнює за визначенням:

$$\int f(t, t_1 + \tau, T_1) dt = T_1$$

Таким чином, операція затримки не змінює значення інтегралу.

ВИСНОВКИ

1. Визначено аналітичний вигляд інтегральної ЛЧФ k -значної логіки.
2. Використавши поняття Δ - розбиття інтегральна ЛЧФ k -значної логіки дала можливість здійснити перетворення аналогового сигналу в кількісний дискретний вираз.
3. Розглянуті властивості інтегрування напівтонових зображень розширюють базу знань теорії ЛЧФ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сачанюк-Ковецька Н.В. Елементи око-процесорної обробки зображень логіко-часовому середовищі. Монографія / Сачанюк-Ковецька Н.В., Кожем'яко В.П. – Вінниця: УНІВЕРСУМ – Вінниця. – 2004. – 135с.
2. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики / Под общей редакцией С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974. – 312с.
3. Кожемяко В. П. Оптоэлектронный параллелизм в образной обработке информации с выделением признаков / Кожемяко В. П., Сторожук Ю. А., Кутаев Ю. Ф. // Материалы 2-й Всесоюз. научно-технич. конф. по функциональной оптоэлектронике „Оптоэлектронные методы и средства обработки изображений”. – Винница–Тбилиси. – 1987. – С.6–29.
4. Кожемяко В. П. Принципы организации оптоэлектронных релевантных структур / Кожемяко В. П., Натрошвили О. Г. Прангишвили А. И. // Материалы Всесоюз. конф. "Функциональная оптоэлектроника в вычислительной технике и устройствах управления". – Тбилиси, 1986. – С. 313-324.
5. Кожем'яко В. П. До питання про створення оптоелектронних око-процесорів / Кожем'яко В. П., Головань О.В. // Праці Першої Всеукраїнської конф. УкрОБРАЗ'92. – Київ. – 1992. – С. 205–206.
6. Кожем'яко В.П. Метод якісного розпізнавання образів на базі функційно-інтегральних синтезаторів визначників та ознак як функцій логіко-часового типу/ Кожем'яко В.П., Понура О.І., Кожем'яко О.В. // Вісник ВПІ. – 1998. – №2. – С.68-72

7. Кожем'яко В.П. Паралельно ієрархічні мережі як структурно–функціональний базис для побудови спеціальних моделей образного комп'ютера. Монографія / Кожем'яко В.П., Тимченко Л.І., Яровий А.А. –Вінниця : Універсум – Вінниця, 2005.–161 с.
8. Кожем'яко В.П. Наукова концепція образного відео - комп'ютера око-процесорного типу в контексті сучасної методології штучного інтелекту / Кожем'яко В.П., Яровий А.А. // Оптико - електронні інформаційно - енергетичні технології. - 2001. - №2. – С. 84-89.
9. Кожем'яко В. П. Інтегрування логіко-часової функції в процесі обробки зображень / Кожем'яко В.П., Сачанюк Н.В., Волонтир Л.О. // Комп'ютеринг.– 2008.– том 7, Випуск 1.– С.135-145.

Надійшла до редакції 07.01.2009р.

КОЖЕМ'ЯКО В. П. – академік АІНУ, д.т.н., професор, завідуючий кафедрою лазерної і оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.

ВОЛОНТИР Л.О. – пошукач кафедри лазерної і оптоелектронної техніки, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна.