УДК 512.534.5

В.Д. Дереч

ПОВНА КЛАСИФІКАЦІЯ СКІНЧЕННИХ НАПІВГРУП, ДЛЯ ЯКИХ ІНВЕРСНИЙ МОНОЇД ЛОКАЛЬНИХ АВТОМОРФІЗМІВ Є ДЕЛЬТА-НАПІВГРУПОЮ

Вінницький національний технічний університет

Abstract

A local automorphism of a semigroup S is defined as an isomorphism between two of its subsemigroups. The set of all local automorphisms of a semigroup S with respect to an ordinary operation of composition forms an inverse monoid, which is denoted by $LAut(S)$. In this conference article, we formulate (without proof) the classification theorem, which was published online on January 7, 2021 in the journal "Semigroup Forum".

Keywords: Inverse semigroup, inverse monoid of local automorphisms, congruence-permutable semigroup, delta-semigroup.

Анотація

Локальним автоморфізмом напівгрупи S називають ізоморфізм між двома її піднапівгрупами. Множина усіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції утворює інверсний моноїд, який позначається через $LAut(S)$. В даній конференц-статті ми формулюємо (без доведень) класифікаційну теорему, яка була опублікована online 7 січня 2021 р. в журналі "Semigroup Forum".

Ключові слова: Інверсна напівгрупа, інверсний моноїд локальних автоморфізмів, конгруенц-переставна напівгрупа, дельта-напівгрупа.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента a існує єдиний елемент a^{-1} такий, що $aa^{-1}a = a$ і $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$. Напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і два її довільні ідемпотенти комутують (див.[1]). Як відомо, основним джерелом груп є групи автоморфізмів (групи симетрій) тих чи інших математичних структур. Вивчення взаємозв'язків між властивостями математичної структури і її групою автоморфізмів є класичною і актуальною задачею. Аналогічно, цілком актуальною є тематика щодо вивчення взаємозв'язків між властивостями математичної структури C і властивостями інверсного моноїда локальних автоморфізмів структури C (тут під локальним автоморфізмом математичної структури C розуміємо ізоморфізм між двома її підструктурами). Напівгрупа називається моноїдом, якщо вона містить одиницю. Через $LAut(S)$ позначимо інверсний моноїд усіх локальних автоморфізмів (локальних симетрій) напівгрупи S відносно звичайної операції композиції. Далі, напівгрупа S називається конгруенц-переставною (або просто - переставною), якщо будь-які дві її конгруенції комутують відносно операції композиції бінарних відношень. Напівгрупа S називається Δ-напівгрупою, якщо решітка її конгруенцій є лінійною. Вивчення Δ-напівгруп розпочато в 1969 році незалежно Шайном Б. (Schein B.) в [2] і [3] і Тамурою Т. (Tamura T.) в [4]. В цих статтях з'ясовано структуру довільної комутативної Δ-напівгрупи. В більшості наступних робіт вивчалася структура Δ-напівгруп, які є тим чи іншим узагальненням комутативних напівгруп (див. [5] і відповідну бібліографію). В статті [6] класифіковано скінченні комутативні напівгрупи, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою. В пропонованій доповіді ми репрезентуємо повну класифікацію скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою. Цей результат опубліковано в статті [8]. Зрозуміло, що кожна Δ-напівгрупа є конгруенц-переставною напівгрупою. До того ж в нашому розпорядженні є повна класифікація скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставним моноїдом [7]. Враховуючи все вищесказане, в статті [8] ми діяли наступним чином: проглядаючи класи (їх 14) скінченних напівгруп S, для яких інверсний моноїд $LAut(S)$ є конгруенц-переставним, ми залишали тільки ті напівгрупи T, для яких моноїд $LAut(T)$ є Δ-напівгрупою.

1 Означення. Термінологія. Формулювання потрібних результатів

Напівгрупа називається конгруенц-переставною (або просто - переставною), якщо для будь-яких двох її конгруенцій ρ і σ виконується рівність $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, де $\circ$ — позначення композиції бінарних відношень.

Напівгрупа S називається Δ-напівгрупою, якщо її конгруенції лінійно впорядковані відносно включення. Очевидно, що будь-яка Δ-напівгрупа є переставною.

Комутативну напівгрупу, кожний елемент якої є ідемпотентом називають напіврешіткою.

Нехай P — впорядкована множина з найменшим елементом 0. Через $\prec$ будемо позначати відношення покриття. Якщо $0 \prec a$, то елемент a називають атомом впорядкованої множини P. Якщо E — нетривіальна напіврешітка скінченної довжини, то, очевидно, вона містить атоми. Якщо $a \in P$, то через $a \downarrow$ будемо позначати множину $\{x \in P \colon x \leq a\}$.

Нетривіальну напіврешітку називають примітивною, якщо кожний її ненульовий елемент є атомом.

Нехай S — довільна напівгрупа. Ізоморфізм між піднапівгрупами напівгрупи S називають *локальним автоморфізмом* напівгрупи S. Множина усіх локальних автоморфізмів напівгрупи S відносно звичайної операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який ми позначимо через $LAut(S)$. Якщо $\xi \in LAut(S)$, то через $dom(\xi)$ і $im(\xi)$ будемо позначати відповідно область визначення і множину значень локального автоморфізму ξ.

Нехай S — скінченна напівгрупа. Якщо $f \in LAut(S)$, то (за означенням) $rank(f) = h(im(f))$, де $h(im(f))$ — висота піднапівгрупи $im(f)$ в решітці $Sub(S)$.

Нехай S — інверсна напівгрупа перетворень скінченної довжини з нулем 0. Припустимо, що ідеали напівгрупи S утворюють ланцюг відносно включення. В цьому випадку кожний ідеал має форму $I_k = \{\alpha \in S \colon rank(\alpha) \leq k\}$. Якщо Θ — конгруенція на S, то очевидно, що множина $I^\Theta = \{\alpha \in S \colon (\alpha, 0) \in \Theta\}$ є ідеалом напівгрупи S і, отже, існує невід'ємне ціле число m таке, що $I^\Theta = I_m$. Це число ми позначимо через $ind(\Theta)$ і назвемо індексом конгруенції Θ.

Цілком 0-проста інверсна напівгрупа називається напівгрупою Брандта. Нехай G — група, I — довільна непорожня множина. Нехай, крім того, $B = B(G, I) = (I\times G\times I)\cup \{0\}$, де $0 \notin I\times G\times I$. Визначимо операцію множення на множині B таким чином: $(i, g, j)\cdot(j, h, l) = (i, gh, l)$, а всі інші добутки дорівнюють 0. Тоді $B(G, I)$ є напівгрупою Брандта і будь-яку напівгрупу Брандта можна зобразити в такій формі. Групу G називають базисною групою напівгрупи Брандта $B(G, I)$.

Нехай σ — довільна конгруенція на групі G. На напівгрупі Брандта $B(G, I)$ визначимо бінарне відношення Σ наступним чином: $((i, g, j),(k, h, l)) \in \Sigma$ тоді і тільки тоді, коли $i = k, j = l$ і $(g, h) \in \sigma$. Відношення Σ є конгруенцією на напівгрупі Брандта. Кожна конгруенція відмінна від універсальної на $B(G, I)$ має такий вид.

Нехай S — довільна напівгрупа. Решітку всіх її піднапівгруп будемо позначати через $Sub(S)$. Якщо напівгрупа S містить найменшу непорожню піднапівгрупу (наприклад, одинична підгрупа в групі), то найменшим елементом $Sub(S)$ вважається саме ця піднапівгрупа. Якщо ж найменшої непорожньої піднапівгрупи в S не існує, то найменшим елементом $Sub(S)$ будемо вважати порожню множину $\emptyset$ і в цьому випадку порожнє перетворення є нулем інверсного моноїда $LAut(S)$. Якщо $A \in Sub(S)$, то через ι_A позначимо відношення рівності на піднапівгрупі A. Зрозуміло, що ι_A є ідемпотентом моноїда $LAut(S)$. Кожний ідемпотент напівгрупи $LAut(S)$ має таку форму. Якщо $A \in Sub(S)$, то через $h(A)$ будемо позначати висоту піднапівгрупи A в решітці $Sub(S)$.

Група G називається елементарною абелевою $p-$групою (p — просте число), якщо будь-який її відмінний від одиниці елемент має порядок p. Відомо (див.[**?**]), що група автоморфізмів елементарної абелевої p-групи $G = \underbrace{F \times F \times \cdots \times F}_{n}$ ізоморфна повній лінійній групі $GL_n(F_p)$, де F_p — поле, адитивна група якого є група F простого порядку p.

Для простого числа p через F_p позначимо відповідне поле. Множина усіх верхніх трикутних матриць вигляду $\left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, де a, b, c — довільні елементи з поля F_p, відносно звичайної операції множення матриць утворює групу, яку називають групою Гайзенберга над полем F_p і позначають через $Heis(F_p)$.

Нехай I— ідеал напівгрупи S. Конгруенцію $\rho_I = I \times I \cup \Delta$, де Δ — відношення рівності на S, називають конгруенцією Ріса (Rees).

Тепер перелічимо класи скінченних нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставним (див. [7]). Особливу роль серед таких напівгруп відіграють дві конкретні нільнапівгрупи, які задані таблицями Келі 1 і 2 і позначено відповідно через K_1 і K_2.

$\star$	**0**	**a**	**x**	**y**
0	0	0	0	0
a	0	0	0	0
x	0	0	0	a
y	0	0	0	0

Таблиця 1

$\star$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a
y	0	0	0	b	0

Таблиця 2

Ми також окремо виділяємо ще дві нільнапівгрупи, які задані таблицями 3 і 4 і позначені відповідно через B_1 і B_2. А саме:

$\star$	**0**	**a**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0
x	0	0	0	a	0
y	0	0	0	0	a
z	0	0	a	0	0

Таблиця 3

$\star$	**0**	**a**	**b**	**x**	**y**	**z**
0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0
x	0	0	0	0	a	b
y	0	0	0	b	0	a
z	0	0	0	a	b	0

Таблиця 4

Наведемо ще три конструкції для створення нільнапівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставним.

КОНСТРУКЦІЯ 0

Зафіксуємо двохелементну множину $\{0, a\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a\} \cap X = \emptyset$ і $|X| \geq 2$. Визначимо бінарну операцію $*$ на множині $\{0, a\} \cup X$:

- $0 * y = y * 0 = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;
- $a * y = y * a = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;
- якщо $x_k, x_m \in X$ і $x_k \neq x_m$, то $x_k * x_m = a$;

- $z^2 = 0$ для довільного $z \in \{0, a\} \cup X$.

КОНСТРУКЦІЯ 1

Зафіксуємо двохелементну множину $\{0, a\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a\} \cap X = \emptyset$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію $*$ на множині $\{0, a\} \cup X$:

- $0 * y = y * 0 = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;
- $a * y = y * a = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a\} \cup X$;
- якщо $x_k, x_m \in X$ і $x_k < x_m$, то $x_k * x_m = 0$ і $x_m * x_k = a$;
- $z^2 = 0$ для довільного $z \in \{0, a\} \cup X$.

КОНСТРУКЦІЯ 2

Зафіксуємо трьохелементну множину $\{0, a, b\}$. Нехай скінченна множина X така, що $\{0, a, b\} \cap X = \emptyset$ і $|X| \geq 3$. На X задаємо строгий лінійний порядок $<$. Визначимо бінарну операцію $*$ на множині $\{0, a, b\} \cup X$:

- $0 * y = y * 0 = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
- $a * y = y * a = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
- $b * y = y * b = 0$ для будь-якого $y \in \{0, a, b\} \cup X$;
- якщо $x_k, x_m \in X$ і $x_k < x_m$, то $x_k * x_m = a$ і $x_m * x_k = b$;
- $z^2 = 0$ для довільного $z \in \{0, a, b\} \cup X$.

В даній роботі ми будемо суттєво використовувати основні результати статтей [6] і [7]. Сформулюємо їх.

Твердження 1 (див. [6], основна теорема)**.** *Нехай S— скінченна комутативна напівгрупа. Її інверсний моноїд локальних автоморфізмів є Δ-напівгрупою тоді і лише тоді, коли S:*

(1) *або лінійно впорядкована напіврешітка;*

(2) *або примітивна напіврешітка;*

(3) *або група простого порядку p, причому $p - 1 = 2^k$ для деякого невід'ємного цілого числа k;*

(4) *або елементарна абелева 2-група порядку 2^n, де $n \geq 2$;*

(5) *або напівгрупа з нульовим множенням;*

(6) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в конструкції* 0.

Твердження 2 (див. [7], теорема 2)**.** *Нехай S — скінченна напівгрупа. Інверсний моноїд $LAut(S)$ є конгруенц-переставним тоді і лише тоді, коли S:*

(1) *або елементарна абелева p-група, де p — довільне просте число;*

(2) *або група Гайзенберга над скінченним полем $\mathbb{Z}_p$, де p — довільне непарне просте число;*

(3) *або лінійно впорядкована напіврешітка;*

(4) *або примітивна напіврешітка;*

(5) *або напівгрупа правих нулів;*

(6) *або напівгрупа лівих нулів;*

(7) *або нільнапівгрупа* K_1 *(див. таблицю 1);*

(8) *або нільнапівгрупа* K_2 *(див. таблицю 2);*

(9) *або нільнапівгрупа* B_1 *(див. таблицю 3);*

(10) *або нільнапівгрупа* B_2 *(див. таблицю 4);*

(11) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 0;*

(12) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 1;*

(13) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 2;*

(14) *або нільнапівгрупа з нульовим множенням.*

2 Основна теорема

Теорема (див. [8]). *Нехай* S *— скінченна напівгрупа. Інверсний моноїд* $LAut(S)$ *є* Δ-*напівгрупою тоді і лише тоді, коли* S*:*

(1) *або група простого порядку* p*, причому* $p - 1 = 2^k$ *для деякого невід'ємного цілого числа* k*;*

(2) *або елементарна абелева* 2*-група порядку* 2^n*, де* $n \geq 2$*;*

(3) *або лінійно впорядкована напіврешітка;*

(4) *або примітивна напіврешітка;*

(5) *або напівгрупа правих нулів;*

(6) *або напівгрупа лівих нулів;*

(7) *або нільнапівгрупа* K_1 *(див. таблицю 1);*

(8) *або нільнапівгрупа* K_2 *(див. таблицю 2);*

(9) *або нільнапівгрупа* B_1 *(див. таблицю 3);*

(10) *або нільнапівгрупа* B_2 *(див. таблицю 4);*

(11) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 0;*

(12) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 1;*

(13) *або нільнапівгрупа, структуру якої описано в КОНСТРУКЦІЇ 2;*

(14) *або нільнапівгрупа з нульовим множенням.*

Література

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Мир, 1972.– Т.1. – 286 с. – Т.2. – 422 с.

[2] Schein B.M. Commutative semigroups where congruences form a chain // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron.et phys. – 1969. – **17**. – P. 523 – 527.

[3] Schein B.M. Corrigenda to "Commutative semigroups where congruences form a chain"// Ibid. – 1975. – **12**. – P. 1247.

[4] Tamura T. Commutative semigroups whose lattice of congruences is a chain // Bull. Soc. Math. France. – 1969. – **97**. – P. 369 – 380.

[5] Nagy A. Special Classes of Semigroups. Springer-Science+Business Media, B.V.

[6] Derech V. D. Classification of Finite Commutative Semigroups for Which the Inverse Monoid of Local Automorphisms is a Δ-Semigroup // Ukr. Mat. Zh. - 2015. - 67, № 7. - pp. 867-873.

[7] Derech V. D. Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a permutable semigroup // Ukr. Mat. Zh. - 2016. - 68, № 11. - pp. 1571-1578.

[8] Derech V. D. Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a Δ-semigroup // Semigroup Forum. https://doi.org/10.1007/s00233-020-10159-6

Volodymyr Derech – PhD in mathematics, associate professor, Department of Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, email: derech@vntu.edu.ua

Володимир Дереч – кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, email: derech@vntu.edu.ua