

## ПРОГРАМНИЙ КОМПЛЕКС ПОШУКУ ТА АНАЛІЗУ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИТЕРІАЛЬНОГО МЕТОДУ

Лежнюк П.Д., Бевз С.В.

Вінницький державний технічний університет

Серед методів, які застосовуються для оптимізації технологічних процесів, чільне місце займає критеріальний метод (КМ) [1]. Особливо ефективним він є при оптимізації процесів з неперервним циклом виробництва типу електроенергетичного [2]. Пояснюється це тим, що КМ дозволяє придати оптимальним рішенням узагальнюючий характер. За допомогою КМ крім оптимальних параметрів процесу визначаються критерії подібності, які зв'язують однойменні параметри можливих оптимальних варіантів. Скориставшись цими результатами, можна побудувати критеріальні моделі, які встановлюють аналітичні зв'язки між критерієм оптимальності та параметрами, що оптимізуються, а також між факторами, які впливають на їх значення [1, 2]. Особливості, які притаманні даному методу, дозволяють встановлювати певні закономірності в технологічному процесі та трансформувати їх в закони оптимального керування [1].

Центральним ядром КМ є критеріальне програмування (КП), в основі якого лежать теорія подібності і методи геометричного, лінійного і нелінійного програмування. Пряма задача КП формулюється [2]:

мінімізувати

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} \quad (1)$$

за умов

$$g_k(x) = \sum_{j=m_k+1}^{m_{k+1}} a_j \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ji}} \leq 1, \quad k = \overline{1, p}; \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де  $y(x)$  — деякий узагальнений критерій оптимальності;  $a_i, \alpha_{ji}$  — постійні коефіцієнти;  $x_j$  — змінні параметри.

У виразах (1) і (2) прийнята суцільна індексація складових цільової функції та обмежень.

Існуючі програмні комплекси (ПК) не дозволяють повною мірою з достатньою ефективністю вирішити поставлену задачу оптимізації, оскільки в сучасних динамічних системах досить часто виникає необхідність розв'язування нелінійних оптимізаційних задач, цільова функція яких є знакозмінним поліномом, а кількість змінних сягає сотень, тисяч і має тенденцію до росту.

Спорадично знакозмінні поліноми як функціонально залежні від законів природи і економіки отримуються безпосередньо з них. Разом з тим ця залежність може обернутися й значним наближенням до емпіричних даних у широкому діапазоні вимірювання змінних.

При розв'язанні оптимізаційних задач виникають також труднощі, пов'язані із складністю математичної моделі через нелінійність цільової функції і обмежень. Для їх подолання здійснюється перехід від простору змінних прямої задачі КП до простору двоїстих змінних. При цьому пряма задача замінюється відповідною їй двоїстою, котра при нелінійній цільовій функції має лінійні обмеження [1]:

максимізувати

$$d(\pi) = \prod_{i=1}^m \left( \frac{a_i}{\pi_i} \right)^{\pi_i} \prod_{k=1}^p \lambda_k^{\lambda_k}, \quad (3)$$

за умов

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} \cdot \pi_i = 0, \quad j = \overline{1, n}; \right. \quad (4)$$

$$\left. \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1, \right. \quad (5)$$

де  $\lambda_k = \sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i$ ,  $k = \overline{1, p}$  — нормовані множники Лагранжа;  $\pi_i$  — критерії подібності.

У даній статті репрезентується ПК, призначений для пошуку оптимальних рішень (ПОР), в основу якого покладено наступні принципи та підходи:

- створення єдиного графічно-обчислювального середовища;
- повна автоматизація обчислювального процесу;
- використання засобів критеріального програмування;
- використання методів об'єктно-орієнтованого програмування.

У даному ПК реалізуються нові нетрадиційні методи та удосконалюються деякі стандартні процедури пошуку оптимальних рішень, прогнозування, аналізу результатів розрахунків на чутливість. Що стосується визначення оптимуму, то ПК ПОР зорієнтований на розв'язання поліноміальних задач типу (1)-(2) чи (3)-(5). Така постановка задач інспірує значне розширення області застосувань ПК ПОР порівняно з аналогічними ПК, оскільки дозволяє розв'язувати задачі, в цільову функцію (1) та обмеження (2) яких можуть входити не лише додатні, а й від'ємні члени. Це так звані сигноміальні задачі. Дана уніфікація досягнута завдяки використанню семіотичної системи, яка дозволяє встановити реальний знак мінімуму цільової функції (двоїста задача розв'язується в абсолютних величинах) і може також прислужитися для перевірки знайденого розв'язку.

У програмному комплексі передбачено діалоговий режим вводу даних, можливість імпорту даних із зовнішнього текстового файлу, автоматична корекція вихідної інформації. ПК проводить перевірку правильності введення початкових даних. Причому можливі два режими тестування. У першому при наявності помилок видається їх перелік. Другий режим зорієнтований на визначення елементу таблиці вихідної інформації з помилковими даними.

ПК ПОР уможливує розв'язання задач КП будь-якої міри складності, зокрема, й у випадках, коли кількість критеріїв подібності значно перевищує кількість змінних.

У ПК реалізовано алгоритм пошуку оптимальних рішень для розв'язку задач з невисокою мірою складності, який полягає у виявленні залежності показника ефективності у від двоїстих змінних [3]:

$$y = \sum_{i=1}^m \pi_i \times y_{min} = \sum_{i=1}^m \pi_i \times \prod_{j=1}^m \left( \frac{\pi_j}{a_j} \right)^{\pi_{oj}} \times \prod_{k=1}^p \left( \frac{1}{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \right)^{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{n+1,i}},$$

де  $y_{min}$  — мінімальне значення цільової функції (1);  $\beta_{n+1,i}$  — елементи оберненої матриці показників.

Оптимальні значення параметрів  $x_{oj}$  за необхідністю визначаються безпосередньо з виразу:

$$x_{oj} = \prod_{i=1}^{m-t} \left( \frac{\pi_i}{a_i} \right)^{\beta_{ji}} \times \prod_{k=1}^p \left( \frac{1}{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \pi_i} \right)^{\sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} \beta_{ji}}, \quad j = \overline{1, n}.$$

У такий спосіб [3] в ПК ПОР розв'язуються оптимізаційні задачі без традиційного переходу від прямої задачі КП (1)-(2) до двоїстої (3)-(5) шляхом встановлення зв'язку прямої задачі КП з двоїстими змінними. Запропонований метод не потребує знання теорії двоїстості для оцінки двоїстих змінних, що входять до моделі. Між тим, використання даного підходу значно збільшує інформативність параметрів моделі при розв'язанні перетвореної системи рівнянь. У цьому методі по-іншому визначається обернена матриця показників, всі елементи якої використовуються для знаходження залежності змінних параметрів системи, незалежних критеріїв подібності, мінімуму показника ефективності від вектора залежних критеріїв подібності в порівнянні з ізоморфною оберненою матрицею показників чи матрицею розмірностей в (4). Такі особливості обчислювальної процедури дозволяють ущільнити банк даних при збереженні необхідної інформації ПК.

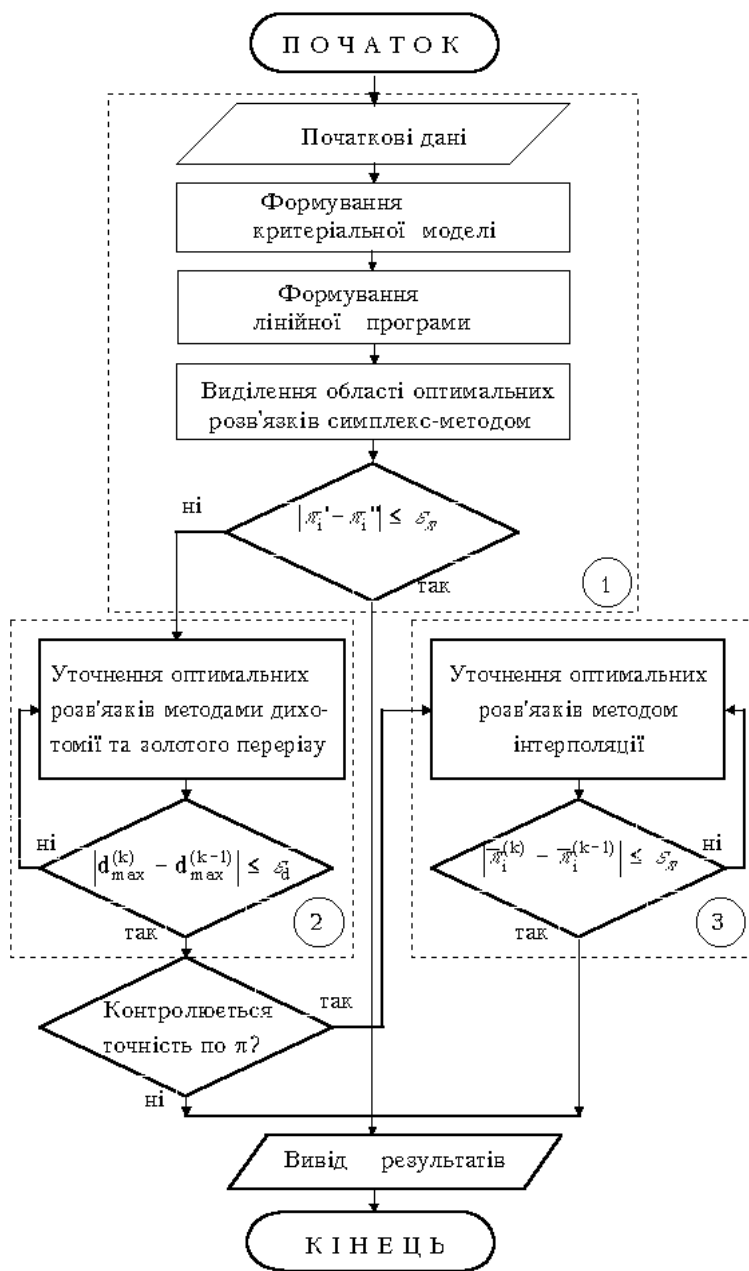


Рис. 1. Алгоритм пошуку оптимального рішення задач з високою мірою складності

оптимальних розв'язків. Це й визначає вибір обчислювальних методів у ПК. Наприклад, градієнтний метод за даних умов має погану збіжність і є неефективним. Крім того, слід враховувати іманентні особливості самих обчислювальних методів. Так, методи золотого перерізу та дихотомії обмежують вибір наступного інтервалу невизначеності відповідно двома і трьома альтернативами. При цьому в правилі, на ґрунті якого здійснюється цей вибір, враховується лише співвідношення між значеннями, а не самі значення. Якщо ж функція гладка, можна отримати, використовуючи її значення, суттєво більш швидкодіючу процедуру мінімізації — квадратичну інтерполяцію. Проте її доцільно використовувати при досить вузькому інтервалі невизначеності, оскільки відомо, що двоїста функція в околі свого екстремуму близь-

кож використовуються для знаходження залежності змінних параметрів системи, незалежних критеріїв подібності, мінімуму показника ефективності від вектора залежних критеріїв подібності в порівнянні з ізоморфною оберненою матрицею показників чи матрицею розмірностей в (4). Такі особливості обчислювальної процедури дозволяють ущільнити банк даних при збереженні необхідної інформації ПК.

Для розв'язання задач з високою мірою складності ПК ПОР використовує алгоритм, складовими частинами якого є [4]:

- перехід від простору змінних прямої задачі КП до простору двоїстих змінних;
- репрезентація програми у вигляді лінійної;
- локалізація оптимального розв'язку засобами лінійного програмування, а саме - симплекс-методом, у досить вузькій області для подальшого ефективного його уточнення;
- визначення у сформованій області оптимального розв'язку відносно простими методами послідовного пошуку екстремуму (дихотомії, золотого перерізу чи квадратичної інтерполяції).

На рис. 1. показана логічна схема розв'язування задач КП великої розмірності. На ній виділено три основні блоки, один з яких є конгломератом трьох перших задач алгоритму, а два інших реалізують його останній пункт за різних висунутих вимог та умов.

Зауважимо, що для більшості технічних та економічних оптимізаційних задач характерною є пологість цільової функції в області

ка до параболи. Виходячи з цієї засади, ефективним виявилось поєднання методів дихотомії та золотого перерізу з квадратичною інтерполяцією.

Таким чином, зважаючи на особливості двоїстої задачі КП і методів послідовного пошуку екстремуму та враховуючи форму цільової функції (3), ПК ПОР передбачає розв'язання даного класу задач регуляризованими методами, в яких поряд з квадратичною інтерполяцією використовуються процедури дихотомії (спосіб п'яти точок) чи золотого перерізу.

Окрім іншого, в ПК для візуального контролю процесу збіжності подано графічну ілюстрацію пошуку екстремуму двоїстої функції за методами квадратичної інтерполяції, дихотомії та золотого перерізу.

Проведенню розрахунків у ПК передують формування математичних моделей поставлених задач, зокрема прямої та двоїстої задачі КП, симплекс-моделі, критеріальної моделі. Остання реалізується в системі відносних одиниць — за базисний приймається оптимальний варіант. У графічному середовищі ПК ПОР передбачено візуальне відображення всіх вищевизначених математичних моделей для забезпечення контролю введення інформації та проведення розрахунку. Такий підхід є особливо зручним у випадку розв'язання задач невеликої розмірності.

У ПК передбачена можливість виконання аналізу чутливості оптимальних рішень. Це, зокрема, розв'язання прямої та оберненої задач чутливості як для прямої, так і для двоїстої задачі КП. Аналіз чутливості в околі оптимального значення досліджуваної функції дозволяє відшукати раціонально необхідну точність, що сприяє підвищенню техніко-економічних характеристик оптимізації, дозволяє виявити параметри і змінні, які суттєво впливають на значення показника ефективності, в результаті чого з'являється можливість ефективного оптимального керування за рахунок вибіркового підходу до потоку інформації.

Як відомо, точне прогнозування стану об'єкта є основою раціонального використання ресурсів, капітальних та експлуатаційних затрат. Тому завжди актуальною є розробка програмного та методологічного забезпечення прогнозування. Виходячи з високих вимог до результатів прогнозу в ПК ПОР реалізована методика прогнозування, яка ґрунтується на нових підході і методології. У ПК критеріальна форма запису використовується як математична модель для визначення параметрів апроксимуючої функції, так і для визначення результатів прогнозу. Апроксимуюча залежність має вигляд полінома, показники степеня якого вираховуються за ретроспективними даними і можуть бути як цілими, так і дробовими, що максимально наближає прогнозний процес до реального, забезпечуючи високу точність. Для знаходження параметрів критеріальної моделі складається система критеріальних рівнянь з використанням ретроспективних даних та з урахуванням умови нормування критеріїв подібності до одиниці (5). Розв'язок системи нелінійних рівнянь отримується за допомогою методу Зейделя. Після визначення параметрів моделі отримується прогноз згідно з критеріальною моделлю. Або ж за необхідністю визначаються параметри вихідної моделі за методом найменших квадратів (МНК), а наступний прогноз проводиться шляхом екстраполяції вихідної моделі. Для критеріального моделювання важливою є задача вибору базисного значення. У ПК ПОР за базис приймаються координати першої точки ретроспективних даних.

Приведення вихідної моделі на основі теорії подібності та моделювання до критеріальної форми запису дозволяє виявити найбільш загальні властивості об'єктів та отримати прогноз при неповноті інформації, а саме за наявності невідомих коефіцієнтів вихідної моделі.

На рис. 2. подано алгоритм розрахунку прогнозних значень ПК ПОР. Виділено три наступні блоки: 1 — введення вихідної інформації (ретроспективних даних), формування прогнозної моделі, розв'язання системи нелінійних рівнянь для знаходження коефіцієнтів останньої моделі  $\pi_j$ ,  $\alpha_j$ ; 2 — прогнозування за умов неповноти вихідної інформації за допомогою критеріальної моделі; 3 — визначення коефіцієнтів  $a_j$ , прогнозування за допомогою вихідної моделі.

ПК ПОР поряд з однофакторними моделями прогнозування передбачає використання багатфакторних, що дає можливість врахувати, окрім фактора часу, багато додаткових факторів, які впливають на динаміку процесу зміни стану об'єкта. У цьому випадку апроксимуючий поліном має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^m a_i \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} .$$

Зазначимо, що число членів полінома може бути довільним і вибирається залежно від вимог до точності очікуваних результатів та наявності ретроспективних даних.

Принагідно відзначимо такі специфікатори багатofакторної моделі ПК як точність прогнозованого результату, гнучкість обчислювального алгоритму, його швидка адаптація до значних коливань процесу. Таким чином, багатofакторна модель є надійною навіть у випадку нестационарного тренду, що зумовлюється особливостями окремих об'єктів. Однак з ростом кількості врахованих факторів дещо збільшується кількість елементів навчаючої вибірки, при цьому ускладнюється розв'язок, який уповільнює швидкодію алгоритму. Проте синкретична єдність іманентних властивостей багатofакторної моделі видається цілком природним явищем. Адаптивність процесу, що розвивається під впливом більшої кількості факторів, повинні визначатися більш складними за формою рівняннями, менш генералізованими, оскільки в них відображено більш індивідуальні властивості процесу. Як видно з вищесказаного, найбільш продуктивно виявляється модель, яка відслідковує найсуттєвіші риси явища, а другорядні деталі при цьому моделлю не відтворюються.

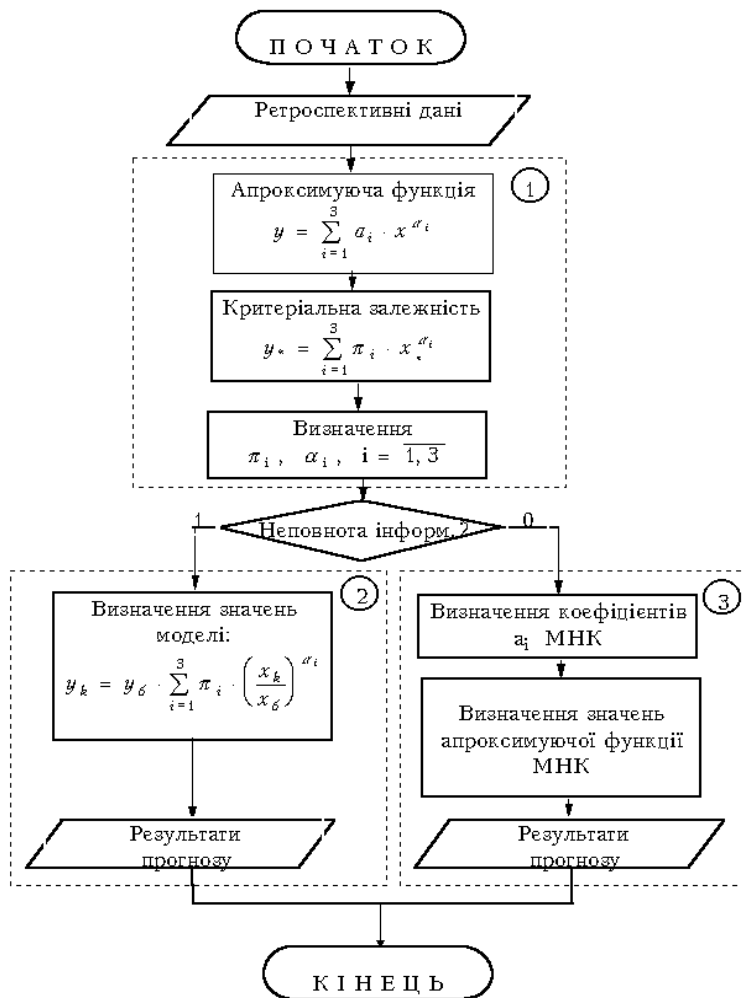


Рис.2. Алгоритм отримання прогнозних результатів в ПК ПОР

ються на графі у вигляді направлених ребер.

Реалізуючи ПК ПОР, використовуємо об'єктно-орієнтовану методологію проектування, завдяки якій отримуємо унітарний комплекс, що уніфікує окремі функціональні модулі на основі концепції заховування інформації як критерія декомпозиції. Дендритичну схему об'єктів ПК ПОР подано на рис. 4. Таким чином, архітектура ПК ПОР детермінується як природний процес нарощування нових об'єктів з можливістю їх подальшої заміни.

Важливо відзначити, що за допомогою ПК ПОР можна отримати прогнозні значення на будь-який інтервал випередження. Як ретроспективні можуть бути використані дані, виміряні через неоднакові проміжки часу, оскільки в моделі враховуються лише відносні відхилення параметрів процесу. Тому для даного ПК не є суттєвою деяка втрата вихідної інформації.

Схема роботи програмного комплексу зображена у вигляді орієнтованого графа на рис.3, де у вершинах графа розташовані модулі ПК ПОР, функціональні зв'язки між якими організуються за допомогою добре визначеного інтерфейса і зображу-

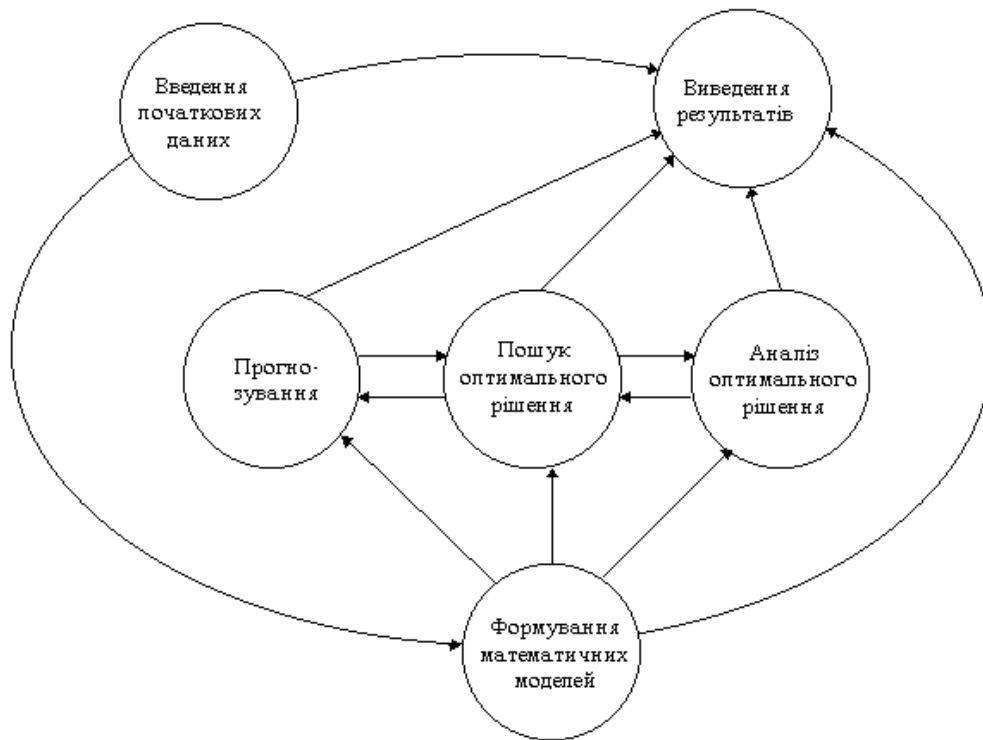


Рис. 3. Орієнтований граф ПК ПОР

## Висновки

1. Таким чином, іманентні властивості програмного комплексу ПК ПОР знаходять свій вияв у його застосуванні для пошуку екстремуму в оптимізаційних задачах великої розмірності. Удалося й експлікувати можливості ПК за рахунок реалізації ефективних алгоритмів розв'язання двоїстої задачі КП і зняття традиційного для такого класу задач обмеження додатності парадигми постійних коефіцієнтів моделі. Окрім іншого, ПК ПОР рекомендується для розв'язання оптимізаційних технічних задач, оптимальний розв'язок яких вимагає техніко-економічного аналізу на чутливість.

2. Встановлено, що об'єктно-орієнтований підхід при програмуванні імплікував створення інклюзивного програмного комплексу, іманентною властивістю якого є можливість субституції об'єктів. Важливо, що цим створюються умови віртуальної модифікації поставлених цілей і задач.

3. У ПК ПОР закладена можливість отримання прогнозних результатів, яка ґрунтується на використанні розробленого альтернативного методу прогнозування, що вирізняється високою точністю та гнучкістю алгоритму, простотою отримання прогнозних значень, не містять громіздких обчислень, що забезпечує ефективне використання машинного часу. Завдяки використанню даного методу в ПК ПОР з'являється можливість отримання прогнозних результатів за умов неповноти вихідної інформації про модель. ПК поряд з однофакторними прогнозними моделями уможливує використання багатфакторних, що дозволяє враховувати багато різних факторів, які впливають на динаміку процесу.

4. В обчислювальному модулі ПК ПОР залежно від характеристик математичної моделі та заданих умов контролю точності результатів вибирається оптимальний шлях отримання розв'язку задачі — реалізується лінійна програма (симплекс-метод), метод дихотомії, золотого перерізу, квадратичної інтерполяції, блок розрахунку безпосереднього знаходження розв'язку без переходу до двоїстої задачі чи блок знаходження оптимуму сигноміальних задач з використанням семіотичних систем. У запропонованому ПК закладені алгоритми, які характеризуються надійністю та економічністю, в них максимально використовуються стандартні процедури.

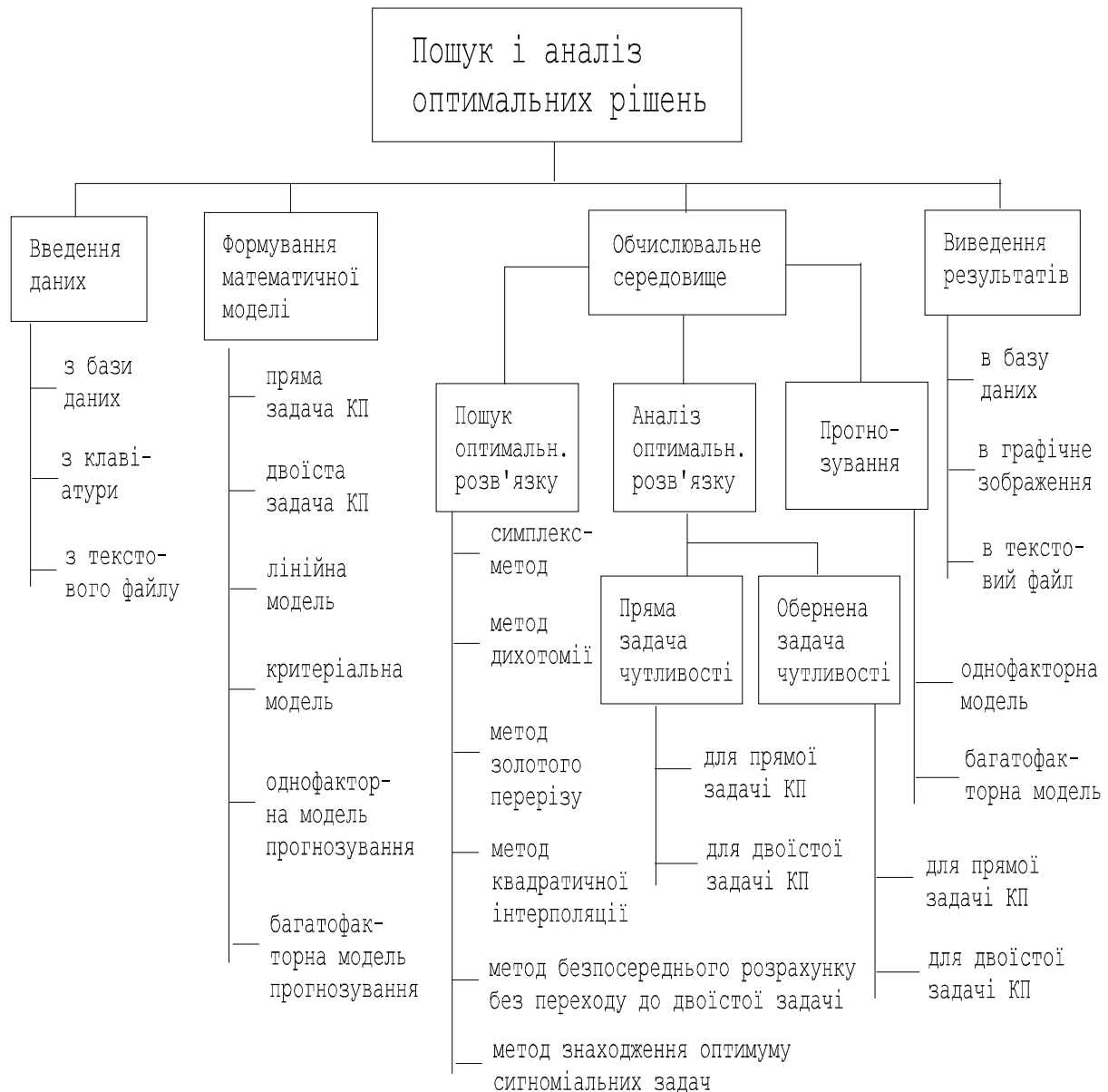


Рис.4. Дендритична схема ПК ПОР

#### Література

1. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования. - М.: Высшая школа, 1984 - 439 с.
2. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. — К.: УМК ВО, 1989. — 137 с.
3. Лежнюк П.Д., Бевз С.В., Вишневський С.Я. Інтерпретація закону керування при встановленні зв'язку між керувальними параметрами та матрицею критеріїв подібності // Книга за матеріалами ІV Міжнар. н.-т. конф. "Контроль і управління в технічних системах" (КУТС-97). — Том 1. Вінниця: Універсум - Вінниця. — 1997. — С. 181-187.
4. Лежнюк П.Д., Гайдамака В.М., Бевз С.В. Критеріальне програмування в задачах великої розмірності // Вісник ВПІ, 1996. — № 2. — С. 20-29.

УДК 681.8.51.

Программный комплекс поиска и анализа оптимальных решений критериальным методом / Лежнюк П.Д., Бевз С.В. // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 1998. — № . — С. — : Ил. 4. Библиогр. 3 назв.

В статье анализируются возможности программного комплекса, ориентированного на решение оптимизационных технических задач большой размерности полиномиального типа, получение прогнозных результатов и проведение анализа чувствительности оптимальных решений. В программном комплексе реализованы эффективные алгоритмы, которые базируются на новых подходах и методах в критериальном моделировании, и характеризуются надежностью, экономичностью, максимальным использованием стандартных процедур.