Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Кафедра системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки

Крижановський Є. М.
Мокін В. Б.
Горячев Г. В.
Варчук І. В.

Методи та засоби комп'ютерних обчислень

Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

Є. М. Крижановський, В. Б. Мокін, Г. В. Горячев, І. В. Варчук

Методи та засоби комп'ютерних обчислень

Електронний навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2016

УДК 004.9+ 303.732
ББК 32.97 : 22.16+26.22
К 74

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол №   від   .   .2016 р.).

Рецензенти:

Петрук В. Г., доктор технічних наук, професор (Вінницький національний технічний університет)
Кулик А. Я., доктор технічних наук, професор (Вінницький національний медичний університет ім. М.І.Пирогова)
Ящолт А. Р., кандидат технічних наук, доцент (Вінницький національний технічний університет)

К 74   Методи та засоби комп'ютерних обчислень. – Електронний навчальний посібник / Є. М. Крижановський, В.Б. Мокін, Г.В. Горячев, І.В. Варчук. – Вінниця : ВНТУ, 2016. –90 с.

У навчальному посібнику викладено основні теоретичні відомості про методи та засоби комп'ютерних обчислень та практичні рекомендації для застосування сучасного програмного забезпечення проведення комп'ютерних обчислень різної складності та сфери застосування. Наведено перелік контрольних запитань для перевірки набутих теоретичних знань та практичних навичок.

Посібник рекомендується для студентів, які навчаються за спеціальностями 122 – «Комп'ютерні науки та інформаційні технології», 124 - «Системний аналіз».

УДК 004.9+ 303.732
ББК 32.97 : 22.16+26.22

ЗМІСТ

Вступ

Комп'ютерні обчислення є чи не найпоширенішим напрямком застосування сучасних технічних засобів в галузі комп'ютеризації, який використовується для аналізу різноманітної інформації.

Завдяки широкому застосуванню комп'ютерних технологій в усіх сферах професійної та громадської діяльності зростає роль методів та засобів комп'ютерних обчислень [1].

Обробка інформації в умовах сучасності неможливі без використання комп'ютерної техніки та сучасних програмних засобів. Сучасні обчислювальні пакети прикладних програм дозволяють здійснювати обробку даних з використанням традиційних та сучасних математичних методів.

Посібник орієнтовано на студентів комп'ютерних, які повинні вміти, використовуючи сучасні програмні середовища для проведення комп'ютерних обчислень різної складності.

Мета даного посібника – ознайомити студентів із основними знаннями та навичками, необхідними для здійснення комп'ютерних обчислень різної складності різної складності та сфери застосування. Для самоаналізу якості засвоєння матеріалу передбачено контрольні запитання.

Матеріал посібника може бути корисним і для слухачів другої вищої освіти комп'ютерних наук чи системного аналізу та студентам інших спеціальностей, які недостатньо володіють основними знаннями та навичками роботи з найбільш поширеними в Україні програмними засобами, які можуть бути використані для проведення комп'ютерних обчислень.

1 АНАЛІЗ ПАКЕТІВ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМ, ПРИЗНАЧЕНИХ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ.

1.1 Загальні відомості

Ринок програмних засобів насичений продуктами, що дозволяють спростити процес дослідження в різних областях науки і техніки. Існують спеціалізовані пакети прикладних програм для роботи у вузькій області науки, але поряд з ними представлені могутні програмні комплекси, спрямовані на розрахунок усього спектра математичних моделей та проведення комп'ютерних обчислень різного ступеня складності. Серед такого роду програмних продуктів варто виділити два основних напрямки:

1) математичні пакети програм, так звані CAE системи (MatLab, Mathcad, Maple, Mathematica);
2) електронні таблиці (Microsoft Excel, OpenOffice Calc та інші).

Родоначальником даної області став математичний пакет Derive. Це була DOS програма з набором функцій, що реалізують чисельні методи і побудову графіків. Вирішувати серйозні задачі за допомогою цього пакета не представлялося можливим. На даному етапі всі сучасні CAE програми мають вбудовані функції символьних обчислень. В даний час розроблювачі цих математичних пакетів прагнуть запропонувати продукт загального призначення. Для цього системи аналітичних обчислень оснащуються розвинутими засобами візуалізації і насичуються ефективними процедурами чисельного рішення, а обчислювальні пакети доукомплектовуються компонентами комп'ютерної алгебри. У результаті MatLab (фірма Math Works Inc.) і Mathcad (фірма MathSoft Inc.) одержали ядро для виконання аналітичних обчислень, розроблене фірмою Maple Software Inc. для пакета Maple.

1.2 Maple

Maple – це система для аналітичного і чисельного рішення математичних задач, що виникають як у математиці, так і в прикладних науках. Розвинута система команд робить можливим застосування пакету Maple для вирішення задач математичного моделювання та задач комп'ютерних обчислень. На даному етапі свого розвитку Maple дозволяє проводити математичні обчислення, відображати графіки, створювати макроси за допомогою вбудованої мови програмування [14].

Пакет Maple розроблений в університеті Ватерлоо (Канада). Його версія була модифікована під ОС Windows. З'явившись в Україні, Maple застосовувався для інженерних розрахунків на виробництві, а також для проведення наукових розрахунків у вищих навчальних закладах. По кожному напрямку наявна велика кількість процедур і функцій, якими можна скористатися, набравши ім'я однієї з них у командному рядку Maple.

Середовище Maple складається з трьох компонентів: ядра, бібліотеки й екранного інтерфейсу. Ядро – це "математичне знаряддя", що виконує усі види обчислень. Воно написано і відкомпільоване мовою програмування *C* и виконує основну частину обчислень.

Бібліотеки включають вбудовані процедури, тобто процедури, написані в середовищі Maple на його власній мові програмування і зберігаються в окремому файлі. Текст команд і програм, написаний у Maple, не компілюється, а інтерпретується, що дозволяє створювати власні процедури інтерактивно в межах середовища.

Вся в цілому, програма Maple не знайшла такого поширення як її ядро. Ядро даної програми було узято за основу при розробці таких програмних продуктів як Mathcad, MatLab.

1.3 Mathcad

Другим представником CAE систем є Mathcad. Mathcad – це свого роду САПР у математиці. Даний програмний продукт дозволяє готувати наукові статті, книги проводити самі складні математичні розрахунки. Також використовується OLE-технологія, що дозволяє здійснювати перенесення об'єктів з різних додатків. Останні версії Matcad реалізують зручне і наочне візуально-орієнтоване програмування найскладніших задач.

Mathcad – це могутнє й у той же час просте універсальне середовище для вирішення задач у різних галузях науки і техніки, фінансів і економіки, фізики й астрономії, будівництва й архітектури, математики і статистики, організації виробництва і керування. Вона має у своєму розпорядженні широкий набір інструментальних, інформаційних і графічних засобів. Відмінні риси Mathcad полягають у наступному [15].

По-перше, у математичних системах Derive, Maple, Mathematica, в основному використовуються цілочисельне представлення і символьна обробка даних, а Matcad переважно орієнтована на роботу з масивами. Mathcad же створювалася для чисельного рішення математичних задач (1988 р.) і тільки в 1994 р. у даний пакет були додані інструменти символьної математики із системи Maple, що поступово перетворило Mathcad в універсальну систему.

По-друге, запис задач у Mathcad найбільш наближений до запису їх без використання комп'ютера, що істотно спрощує застосування системи.

По-третє, система Mathcad більш доступна для масового користувача: вона в кілька разів дешевше своїх аналогів (мова звичайно йде про ліцензійні продукти).

По-четверте, система Mathcad – це, скоріше, універсальна, ніж спеціалізована математична система. Так, для рішення складних задач в аналітичному виді краще застосовувати Maple, а для вирішення складних задач лінійної алгебри – Mathcad.

По-п'яте, Mathcad має вбудовану систему автоматичного перерахування і контролю одиниць вимірювань у процесі обчислень. Система Mathcad автоматично зробить перерахування усіх результатів і видасть результат із заздалегідь встановленою одиницею виміру.

По-шосте, Mathcad має досить функціональну, але просту систему наочного представлення результатів розрахунку у виді різного роду графіків.

По-сьоме, Mathcad може взаємодіяти з іншими додатками. Наприклад, дані програм MS Excel або MatLab можуть безпосередньо включатися в обчислювальний потік системи Mathcad: також допускається керувати кресленнями, виконаними в AutoCAD, використовувати Visual Basic і OLE Automation для створення комерційних додатків і багато чого іншого.

За допомогою Mathcad Professional можна вводити вихідні дані (як у звичайному текстовому редакторі), традиційно описувати рішення задачі й одержувати результати обчислень в аналітичному й у чисельному виді з можливістю використання засобів графічного представлення результатів. Запис математичних виразів здійснюється з застосуванням загальноприйнятих знаків (квадратний корінь, знак ділення у виді горизонтальної риси, знаки інтеграла, диференціала, суми і т.д.).

У Mathcad вбудовані добре організовані текстовий, формульний і графічний редактори. Вони оснащені зручним користувальницьким інтерфейсом і різноманітними математичними можливостями.

В останніх версіях Mathcad допускається імпортувати будь-які графічні зображення (від простих графіків функцій до спеціалізованих креслень системи AutoCAD) і використовувати засоби анімації, звукові і стереофонічні ефекти.

1.4 Mathematica

Четвертим представником CAE-систем можна назвати математичний пакет Mathematica. Mathematica відрізняється охопленням широкого кола задач, тому що її розроблювачі задалися метою об'єднати усі відомі математичні методи, що використовуються для рішення наукових задач, в уніфікованому і погодженому виді, включаючи аналітичні і чисельні розрахунки.

1.5 MatLab

П'ятий представник CAE-систем – це програмний пакет MatLab.

Традиційно програмний пакет MatLab використовувався для викладання курсів теорії матриць, лінійної алгебри і чисельного аналізу. У цей час активно розроблялися пакети прикладних програм по лінійній алгебрі UNPACK і EISPACK мовою FORTRAN, і автори системи MatLab шукали способи використовувати ці пакети, не програмуючи мовою FORTRAN.

Зараз можливості системи значно перевершують можливості первісної версії матричної лабораторії Matrix Laboratory. Сучасні версії програми MatLab підтримують математичні обчислення, візуалізацію наукової графіки і програмування з використанням легко освоюваного операційного середовища, коли задачі і їхніх рішеня можуть бути представлені в синтаксису, близькому до математичного. Найбільш відомі області застосування системи MatLab:

-математика й обчислення;

-розробка алгоритмів;

-обчислювальний експеримент, імітаційне моделювання, макетування;

-аналіз даних, дослідження і візуалізація результатів;

-наукова й інженерна графіка;

-розробка додатків, включаючи графічний інтерфейс користувача.

MatLab – це інтерактивна система, основним об'єктом якої є масив, для якого не потрібно вказувати розмірність явно. Це дозволяє вирішувати багато обчислювальних задач, пов'язаних з векторно-матричними формулюваннями, істотно скорочуючи час, що знадобився б для програмування на скалярних мовах програмування.

Математика є універсальною мовою спілкування між вченими і інженерами. Матриці, диференціальні рівняння, масиви даних, графіки – це загальні об'єкти і конструкції, використовувані як у прикладній математиці, так і в системі MatLab. Система MatLab – це одночасно й операційне середовище і мова програмування. Одна з найбільш сильних сторін системи полягає в тому, що мовою MatLab можуть бути написані програми для багаторазового застосування. Користувач може сам написати спеціалізовані функції і програми, що оформляються у виді М-файлів (дані файли одержали назву від свого розширення *.m). В міру збільшення кількості створених програм виникають проблеми їхньої класифікації і тоді можна спробувати зібрати функції в спеціальні папки. Це приводить до концепції пакетів прикладних програм (ППП), що являють собою колекції М-файлів для рішення визначеної задачі або проблеми.

Операційне середовище системи MatLab – це безліч інтерфейсів, що підтримують зв'язок цієї системи з зовнішнім світом. Це діалог з користувачем через командний рядок або графічний інтерфейс, перегляд робочої області і шляхів доступу, редактор М-файлів, робота з файлами й оболонкою DOS, експорт і імпорт даних, інтерактивний доступ до довідкової інформації, динамічна взаємодія з зовнішніми системами Microsoft Word, Microsoft Excel та ін.

Реалізуються ці інтерфейси через командне вікно, інструментальну панель, системи перегляду робочої області і шляхів доступу, редактор М-файлів, спеціальні меню і т.п.

У даному програмному продукті спостерігається велика візуальність процесу, чим у вищенаведених програмних продуктах. Плюсом даної системи є те, що можна подивитися сигнал у будь-якій точці схеми. Мінусом системи є те, що візуально розділити об'єкти, шо моделюються на одній схемі, малодосвідченому користувачеві досить важко, а так само для роботи в програмі MatLab фахівцеві необхідна значна підготовка по вивченню даної програми.

Розглянуті програми мають специфічні особливості, спрямовані або убік дизайну розроблювальних проектів, або убік ускладнення математичного апарата. Але існують і загальні можливості, якими володіють розглянуті системи: обчислення будь-якого ступеня складності (чисельні, аналітичні); наукова й інженерна графіка; обчислювальний експеримент, імітаційне моделювання, макетування; аналіз даних, дослідження і візуалізація результатів.

1.6 Електронні таблиці

Електронні таблиці (або інакше табличні процесори) є зручним засобом автоматизації рутинних розрахунків на більшості настільних комп'ютерів. За їх допомогою можна здійснювати широкий спектр математичних, економічних, статистичних, технічних розрахунків. Різноманіття функцій електронних таблиць робить їх зручним інструментом насамперед для розрахунків з багатьма вхідними даними, які можуть часто змінюватись. В таких задачах створивши один раз робочу книгу електронної таблиці для зміни даних достатньо їх ввести в певні місця (комірки) і отримати дані розрахунків.

Найбільше поширення отримали табличні процесори MS Excel та OpenOffice.org Calc які входять відповідно до складу офісних пакетів Microsoft Office та OpenOffice.org. Перший програмний продукт набув великої популярності завдяки широкому розповсюдженню операційної системи Windows. На відміну від MS Excel, OpenOffice.org Calc набув популярності перш за все завдяки безкоштовному розповсюдженню[1].

По функціональним можливостям обидва лідери відрізняються не суттєво. Головним чинником використання MS Excel є велика кількість літератури, додаткового програмного забезпечення сторонніх виробників та консерватизм користувачів.

Серед лідерів варто виділити інші табличні процесори:
- StarCalc (пакет StarOffice) – комерційна версія OpenOffice.org (виробник – компанія Sun);
- Word Perfect;
- Gnumeric – ліцензія GPL (для операційних систем UNIX, Linux, FreeBSD).

Електронні таблиці зручні у таких випадках:
1. Багатократне виконання однотипних розрахунків (наприклад аналіз даних, що отримані в декількох циклах одного експерименту);
2. Використання табличних даних (наприклад, якщо із довідникової таблиці для токсичності хімічних сполук ввести в електронну таблицю нормативи, то її не потрібно буде шукати кожен раз у довідниковій літературі);

[1] Програмний продукт OpenOffice.org Calc розповсюджується з відкритим програмним кодом по ліцензії LGPL для Windows та Linux.

3. Створення графіків. Електронні таблиці – це зручний спосіб представлення даних у виді графіків;
4. Аналіз залежностей від параметра (дослідження типу "що буде, якщо ..."). Наприклад, що буде, якщо збільшити споживання вугілля на 2%?
5. Представлення результатів у зручному вигляді.

MS Excel має наступні переваги:

- розрахунки здійснюються у вигляді таблиць;
- доступні графічні засоби;
- можливість програмування на мові VBA;
- можливість доступу до інформації, яка зберігається у базах даних;

Для аналізу даних MS Excel можна використовувати такі інструменти:

- стандартні функції MS Excel (*Вставка*►*Функция…*);
- надбудову «Пакет аналізу» (*Сервис*►*Анализ данных…*);
- VBA (програмування своїх функцій).

Контрольні питання

1) *Які Ви знаєте типи програм, які застосовуються для проведення комп'ютерних обчислень.*
2) *Перерахуйте математичні пакети програм.*
3) *Охарактеризуйте математичний пакет MatLab.*
4) *Охарактеризуйте математичний пакет Mathcad.*
5) *Охарактеризуйте математичний пакет Maple.*
6) *У яких випадках доречно використовувати електронні таблиці?*
7) *Які Ви знаєте найпоширеніші табличні процесори?*
8) *Якими перевагами володіє MS Excel.*

2 МОЖЛИВОСТІ ПАКЕТУ АНАЛІЗУ MS EXCEL ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ

Пакет аналізу – це набір засобів MS Excel, який містить 19 програм, призначений для розв'язку складних статистичних та інженерних задач. Для аналізу даних за допомогою цих інструментів потрібно вказати вхідні дані і вибрати параметри. Аналіз буде виконаний за допомогою підходящої статистичної або інженерної макрофункції, а результат буде поміщений у вихідний діапазон. Інші засоби дозволяють представити результати аналізу в графічному виді [5].

До складу пакету аналізу входять наступні інструменти:

- дисперсійний аналіз;
- кореляційний аналіз;
- коваріаційний аналіз;
- описова статистика;
- експонеційне згладжування;
- ранг і персентиль;
- регресія;
- Т-тест;
- Z-тест.

Виклик пакету аналізу здійснюється з меню Сервис►Анализ данных[2] (рис. 2.1).

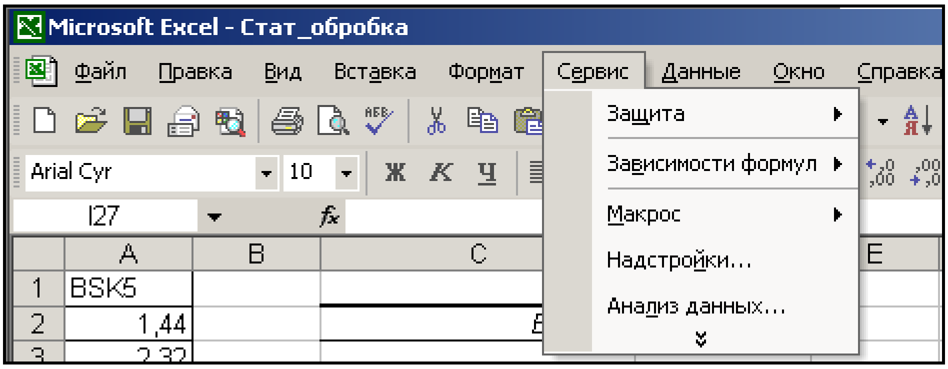


Рис. 2.1 – Виклик пакету

---

[2] По замовчанню пакет *Анализ данных* може бути встановлений разом з іншими компонентами MS Excel, однак його потрібно активувати за допомогою меню *Сервис►Надстройки... (*Рис. 2.1*).*

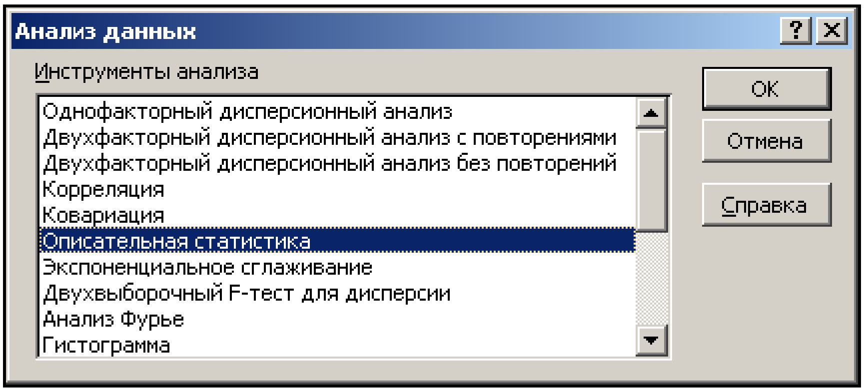


Рис. 2.2 – Діалогове вікно пакету *Анализ данныx*

2.1 Дисперсійний аналіз

Існує кілька видів дисперсійного аналізу. Необхідний варіант вибирається з урахуванням числа факторів і наявних вибірок з генеральної сукупності.

Програми дисперсійного аналізу поділяються на такі:

а) однофакторний дисперсійний аналіз;
б) двофакторний дисперсійний аналіз без повторень;
в) двофакторний дисперсійний аналіз з повторенням.

Дисперсійний аналіз являє собою статистичний метод перевірки гіпотези про схожість середніх значень двох або більше вибірок, що належать одній генеральній сукупності.

Програми дисперсійного аналізу використовуються для перевірки приналежності декількох вибірок даних одній генеральній сукупності. Тобто для визначення того, чи можна їх розглядати як вимірювання однієї величини.

Однофакторний дисперсійний аналіз. Однофакторний дисперсійний аналіз використовується для перевірки гіпотези про подібність середніх значень двох або більше вибірок, що належать одній генеральної сукупності. Цей метод поширюється також на тести для двох середніх (до яких відноситься, наприклад, t-критерій).

Дисперсійний аналіз використовується для перевірки приналежності декількох вибірок даних одній генеральній сукупності. Стосовно даних вимірювань по пунктах спостережень дисперсійний аналіз дає можливість оцінити причину зміни усередненого показника в заданий термін, а саме чи є зміна усередненого значення наслідком зміни стану, чи ця зміна пояснюється статистичною природою вимірювань.

Приклад:

Припустимо, потрібно здійснювати моніторинг деякої місцевості за деякою речовиною. і потрібно впевнитись, що рівень забруднення незмінний.

Оскільки всю територію не можливо охопити вимірами щомісячно (щорічно…), то можна відбирати декілька зразків випадково вибраних ділянок території і аналізувати їх усереднені результати.

Через декілька місяців (років) може виникнути запитання: «Чим викликана зміна щомісячно розрахованих середніх забруднень?»

Чи це викликано зміною екологічного стану регіону, чи це можна пояснити статистичною природою вимірів.

Для відповіді потрібно здійснити дисперсійний аналіз.

Якщо аналіз покаже:

- вибірки належать одній генеральній сукупності – рівень забруднення змінився.
- вибірки належать різним генеральним сукупностям рівень забруднення змінюється.

Приклад:

За допомогою дисперсійного аналізу також здійснюють оцінку адекватності усереднених значень або наближень (першої вибірки даних) реальній множині даних (другій вибірці даних).

Якщо аналіз показує, що наближені значення належать тій же генеральній сукупності, що і самі дані, значить, наближення є адекватним.

В результаті використання надбудови *Анализ данных…►Однофакторний дисперсионний аналіз* (рис. 2.3) визначається ряд статистик (рис. 2.4): сума, середнє, дисперсія, ступені свободи (*df*) і т. ін. Серед них визначальними для аналізу є *F* (випадкова величина нульової гіпотези приналежності вибірок до одної генеральної сукупності, що має *F*-розподіл Фішера), (критичне значення) та *P-Значение* (імовірність помилково відкинути гіпотезу коли вона вірна). Якщо виконується умова *F>Fкритическое,* то вибірки не належать до одної генеральної сукупності (нульова гіпотеза відкидається) [6].

Приклад:

Дані вимірювання БСК$_5$ за 2002 та 2003 рік по 85 створу спостереження р. Південний Буг отримаємо за допомогою запиту до бази даних системи моніторингу поверхневих вод. Частина (19 вимірів із 51) експортованих даних запиту з MS Access у MS Excel представлені на рис. 2.3. Здійснивши однофакторний дисперсійний аналіз (рис. 2.5) отримаємо значення F<Fкритическое, а отже вибірки даних БСК$_5$ за 2002 та 2003 роки відносяться до одної генеральної сукупності з імовірністю помилково відкинути гіпотезу коли вона вірна (P-Значение) 0,885520989.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Num_stvor	Date_stv	BSK5	BSK5		Num_stvor	Date_stv	BSK5
2	85	18.07.2002	3,76	1,44		85	19.05.2003	1,44
3	85	28.07.2002	4,96	2,32		85	24.05.2003	2,32
4	85	01.09.2002	2,16	3,48		85	19.04.2003	3,48
5	85	06.09.2002	6,96	5,408		85	04.05.2003	5,408
6	85	11.09.2002	5,2	3,48		85	09.05.2003	3,48
7	85	16.09.2002	3,44	3,6		85	14.05.2003	3,6
8	85	04.01.2002	1,6	3,16		85	29.05.2003	3,16
9	85	21.10.2002	2,4	2,64		85	02.08.2003	2,64
10	85	21.09.2002	2,64	4,52		85	07.08.2003	4,52
11	85	01.10.2002	4,12	2,96		85	04.01.2003	2,96
12	85	06.10.2002	3,32	3,16		85	09.01.2003	3,16
13	85	11.10.2002	2,72	2,24		85	14.01.2003	2,24
14	85	16.10.2002	2,34	2,96		85	19.01.2003	2,96
15	85	03.07.2002	2,73	2,96		85	24.01.2003	2,96
16	85	08.07.2002	3,36	3,92		85	29.01.2003	3,92
17	85	13.07.2002	4,96	5,24		85	03.02.2003	5,24
18	85	09.01.2002	3,2	4,26		85	08.02.2003	4,26
19	85	15.01.2002	2,44	3,12		85	13.02.2003	3,12
20	85	19.01.2002	1,68	4,6		85	18.02.2003	4,6

Рис. 2.3 – Дані вимірювання БСК$_5$ за 2002 та 2003 рік по 85 створу

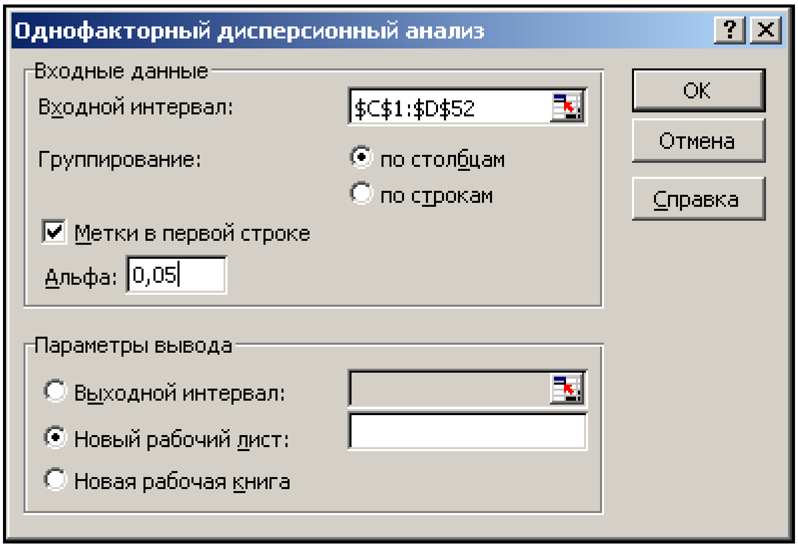
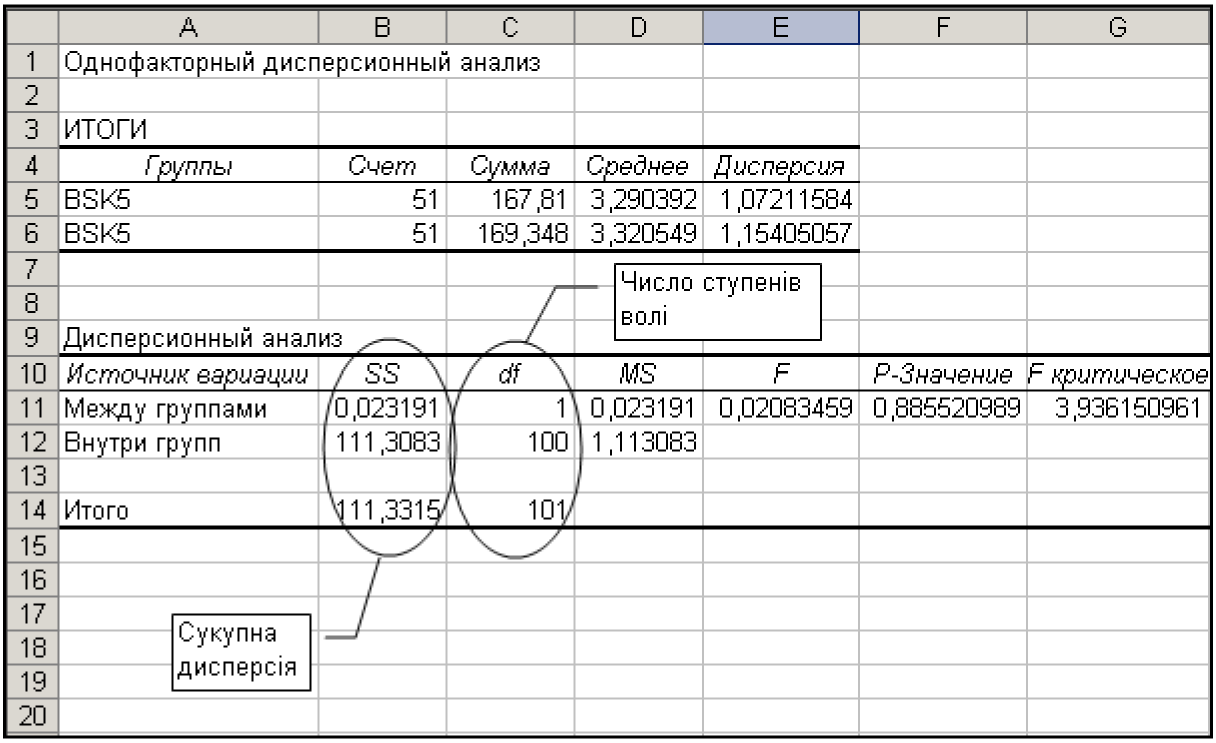


Рис. 2.4 – Діалогове вікно інструменту "Однофакторный дисперсионный анализ"



	A	B	C	D	E	F	G
1	Однофакторный дисперсионный анализ						
2							
3	ИТОГИ						
4	*Группы*	*Счет*	*Сумма*	*Среднее*	*Дисперсия*		
5	BSK5	51	167,81	3,290392	1,07211584		
6	BSK5	51	169,348	3,320549	1,15405057		
7							
8							
9	Дисперсионный анализ						
10	*Источник вариации*	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-Значение*	*F критическое*
11	Между группами	0,023191	1	0,023191	0,02083459	0,885520989	3,936150961
12	Внутри групп	111,3083	100	1,113083			
13							
14	Итого	111,3315	101				

Рис. 2.5 – Результати однофакторного дисперсійного аналізу

Двофакторний дисперсійний аналіз з повтореннями. Являє собою більш складний варіант однофакторного аналізу з декількома вибірками для кожної групи даних.

Двофакторний дисперсійний аналіз без повторення. Являє собою двофакторний аналіз дисперсії, що не включає більше одної вибірки на групу. Використовується для перевірки гіпотези про те, що середні значення двох або декількох вибірок однакові (вибірки належать одній генеральної сукупності). Цей метод поширюється також на тести для двох середніх, такі як t-критерій.

2.2 Коваріаційний аналіз

Коваріація є мірою зв'язку між двома діапазонами даних. Використовується для обчислення середнього добутку відхилень точок даних від відносних середніх по наступній формулі.

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y), \qquad (2.1)$$

де μ_x, μ_y, – середні значення рядів даних X та Y.

Коваріаційний аналіз дає можливість встановити, чи асоційовані набори даних по величині, тобто, великі значення з одного набору даних зв'язані з великими значеннями іншого набору (позитивна коваріація), або, навпаки, малі значення одного набору зв'язані з великими значеннями іншого (негативна коваріація), або дані двох діапазонів ніяк не зв'язані (коваріація близька до нуля).

Приклад:

Здійснимо коваріаційний аналіз даних вимірювання таких показників: бактеріальне забруднення, розчинений кисень, мутність та БСК$_5$, що були отримані по 85 створу спостереження за 2000 рік. Для цього здійснимо вибірку цих показників з бази даних у форматі MS Access та експортування цих значень у Excel. Далі скориставшись інструментом Ковариационный анализ *(рис. 2.6) отримаємо значення коваріації (рис. 2.7), які свідчать про те що, наприклад,*

– великому значенню відповідає мала концентрація розчиненого кисню (коваріація -101458,7628);

– великому значенню БСК$_5$ відповідає велике значення мутності (коваріація 2,852634198).

Аналогічні висновки можна зробити і по іншим показниках.

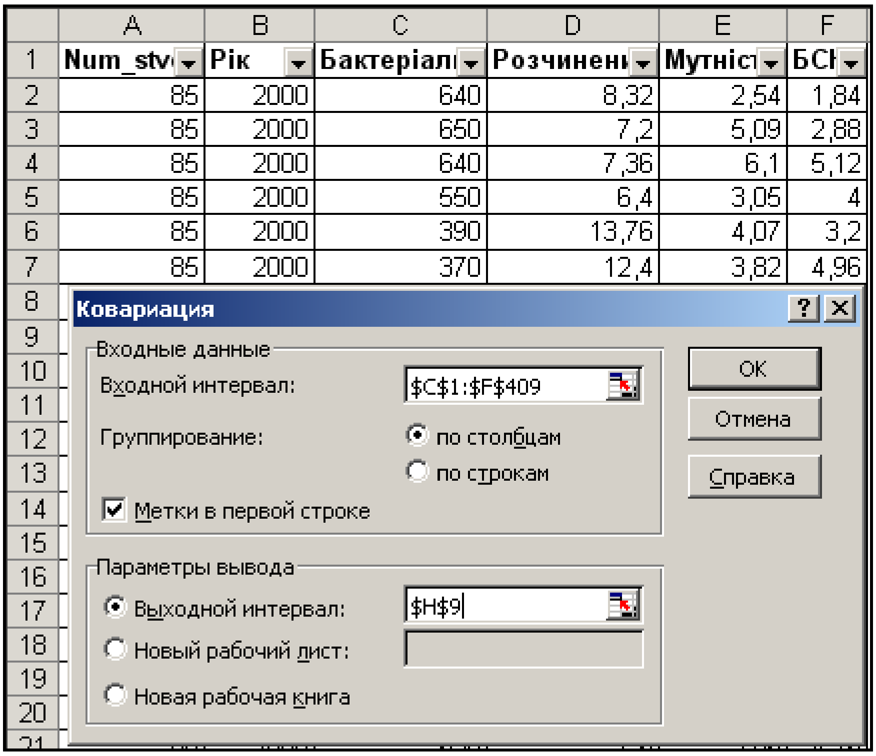


Рис. 2.6 – Коваріаційний аналіз даних спостережень по 85 створу спостережень за 2000 рік

	Бактеріальне забруднення	*Розчинений кисень*	*Мутність*	*БСК5*
Бактеріальне забруднення	3487458368			
Розчинений кисень	-101458,7628	7,562742724		
Мутність	163726,7103	-8,701332694	16,02627389	
БСК5	31037,55115	-1,807872261	2,852634198	1,151

Рис. 2.7 – Результати коваріаційного аналізу

Інструмент *Ковариационный анализ* розширює можливості функції *КОВАР* і дає можливість визначати ступені залежності при кількості змінних більше двох.

2.3 Кореляційний аналіз

Кореляційний аналіз застосовується для кількісної оцінки взаємозв'язку двох наборів даних, представлених у безрозмірному вид [7]і. Коефіцієнт кореляції вибірки представляє відношення коваріації двох наборів даних до добутку їхніх стандартних відхилень і розраховується по наступних формулах.

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}, \tag{2.2}$$

де $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2}$ та $\sigma_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2}$ – стандартні відхилення рядів даних *X* та *Y*.

Кореляційний аналіз дає можливість установити, чи асоційовані набори даних по величині, тобто, великі значення з одного набору даних зв'язані з великими значеннями іншого набору (позитивна кореляція), або, навпаки, малі значення одного набору зв'язані з великими значеннями іншого (негативна кореляція), або дані двох діапазонів ніяк не зв'язана (нульова кореляція). На відміну від коефіцієнту коваріації коефіцієнт кореляції є нормованою величиною від мінус одиниці до одиниці, що є більш зручним для аналізу.

Приклад:

Здійснимо кореляційний аналіз даних вимірювання таких показників: бактеріальне забруднення, розчинений кисень, мутність та БСК$_5$ *, що були отримані по 85 створу спостереження за 2000 рік. Аналогічно попередньому прикладу має місце позитивна, негативна і близька до нульової кореляція, що знаходиться на перетині стовпця і рядка таблиці на рис. 2.9.*

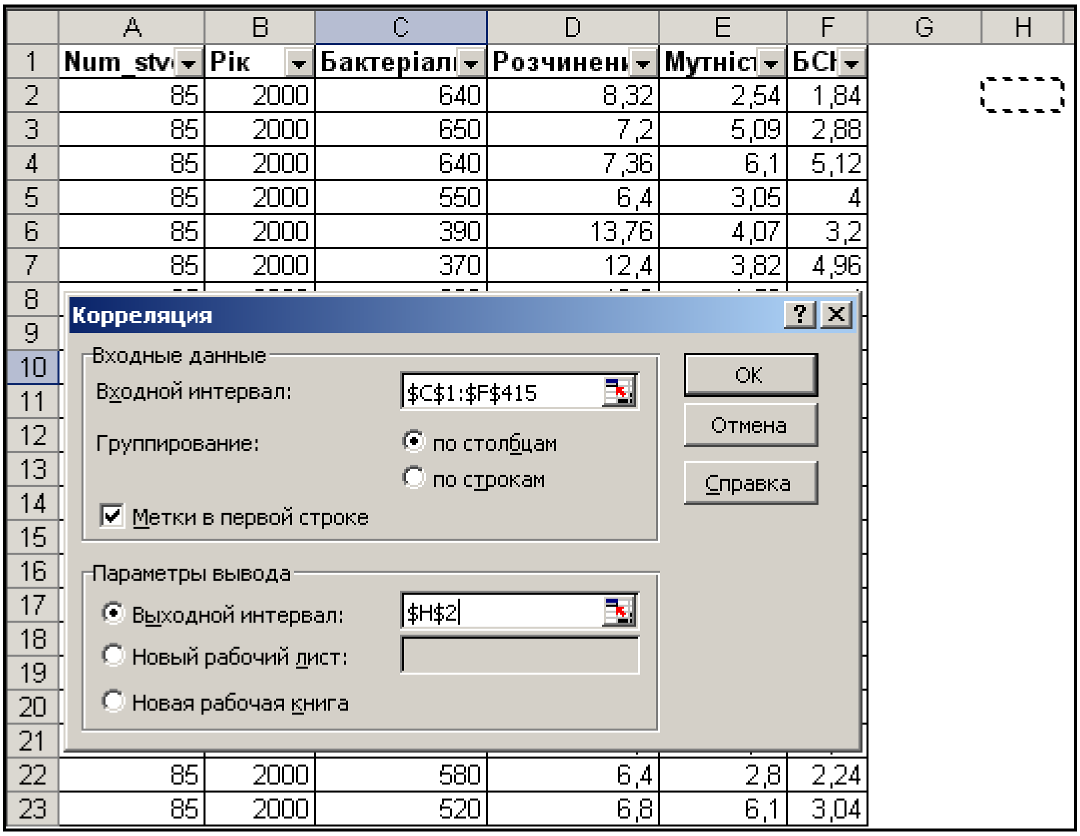


Рис. 2.8 – Кореляційний аналіз даних спостережень по 85 створу спостережень за 2000 рік

	Бактеріальне забруднення	Розчинений кисень	Мутність	БСК5
Бактеріальне забруднення	1			
Розчинений кисень	-0,624734346	1		
Мутність	0,692546182	-0,790368877	1	
БСК5	0,489860226	-0,612727432	0,664154394	1

Рис. 2.9 – Результати кореляційного аналізу

2.4 Описова статистика

Це засіб аналізу служить для створення одномірного статистичного звіту, що містить інформацію про центральну тенденцію і мінливість вхідних даних. Він визначає середнє значення, моду, середнє відхилення, дисперсію та ін. [8].

Найбільш часто вживаними числовими характеристиками випадкової величини є початкові та центральні моменти різного порядку. Для неперервної випадкової величини початкові і центральні моменти порядку *k* визначаються за виразами:

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2.3)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^k f(x) dx \quad (2.4)$$

Найбільш часто вживаним є перший початковий момент, який називається *математичним очікуванням*. Для дискретної випадкової величини

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$ – математичне очікування (центр розподілу). (2.5)

Центральний момент другого порядку (k=2) випадкової величини називається *дисперсією.* Для дискретної випадкової величини

$$D(x) = M[x - M(x)]^2$$ – дисперсія. (2.6)

Середньоквадратичне відхилення визначається за виразом

$$\sigma_x = \sqrt{D(x)} \quad (2.7)$$

Модою дискретної випадкової величини x називають її найбільше імовірне значення (рис. 2.10).

Мода неперервної випадкової величини x називають те її значення, при якому густина розподілу максимальна (рис. 2.10).

Медіана неперервної випадкової величини x називають таке її значення μ , для якого однаково імовірно, чи станеться ситуація, що випадкова величина менша або більша μ. Оскільки площа фігури, яка утворена густиною розподілу випадкової величини дорівнює одиниці, то медіана ділить цю фігуру на дві частини з однаковою площею (рис. 2.10)

$$P(x < \mu) = P(x > \mu) = 0{,}5\,.$$

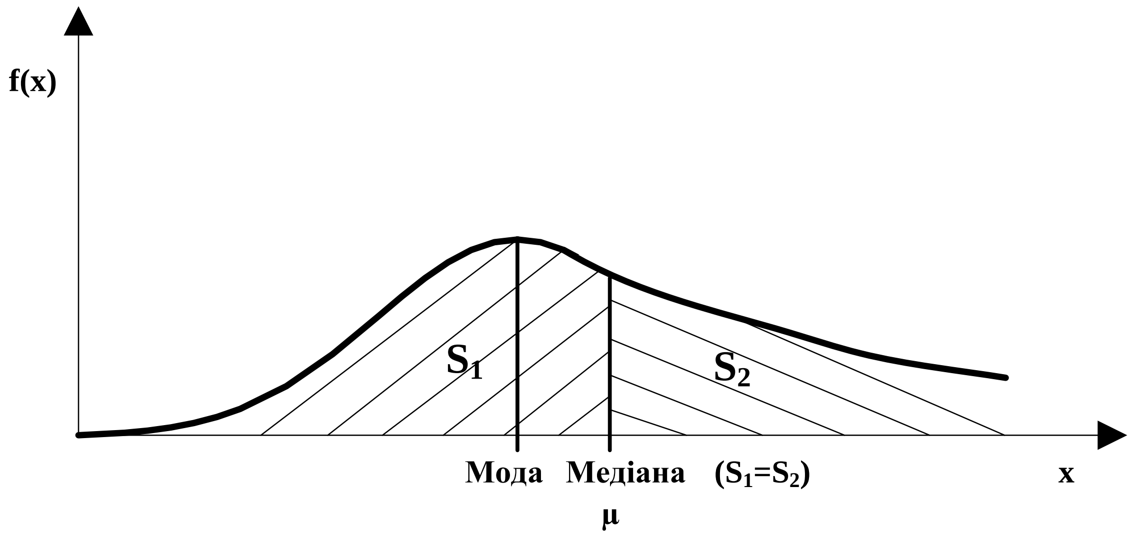


Рис. 2.10 – Мода і медіана випадкової величини

Асиметрія – відношення центрального моменту третього порядку k = 3 до кубу середньоквадратичного відхилення

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3}. \qquad (2.8)$$

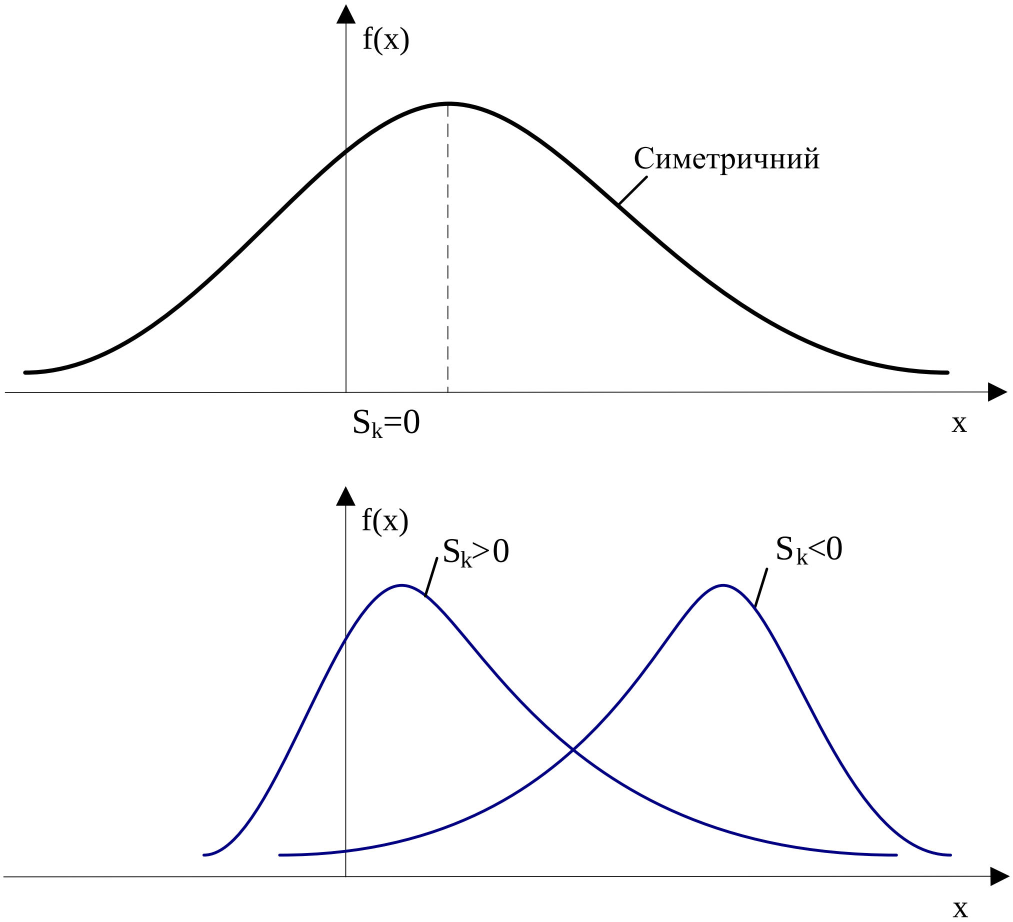


Рис. 2.11 – Поняття асиметрії випадкової величини

Ексцес випадкової величини x називають величина

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 \qquad (2.9)$$

$E_x = 0$ – для нормального закону розподілу.

$E_x > 0$ – для кривих розподілу які більш гостроверхі ніж у нормального закону (кривої Гауса)

$E_x < 0$ – для більш плосковерхих законів ніж у кривої Гауса.

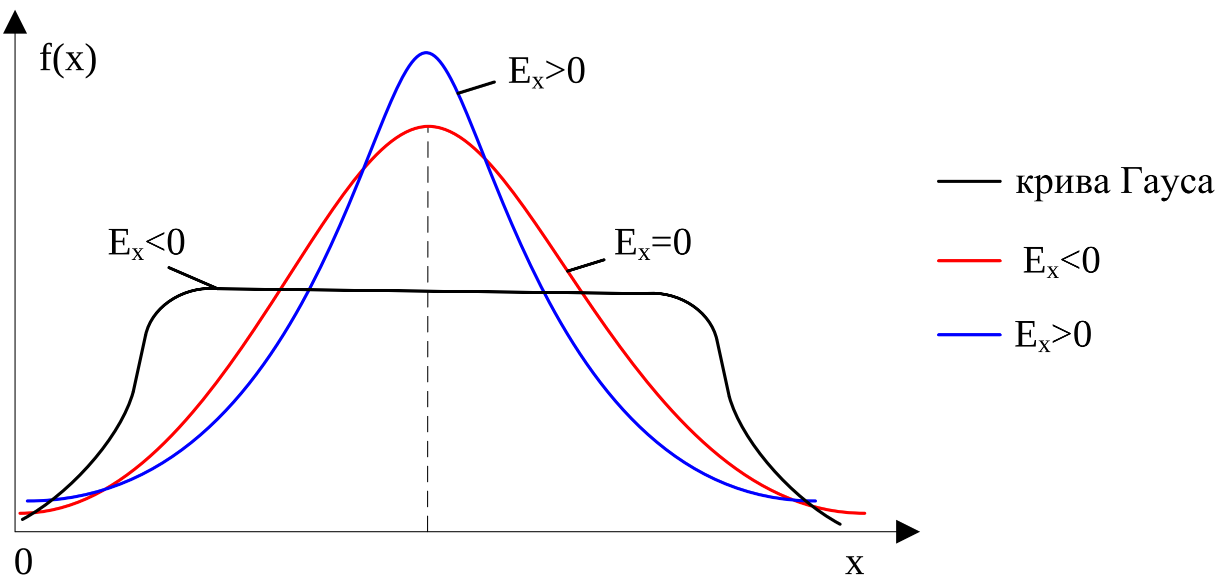


Рис. 2.12 – Поняття ексцесу випадкової величини

Приклад:

Визначимо наведені вище початкові та центральні моменти вибірки даних вимірювання $БСК_5$. Для цього можна скористатись відповідними функціями на листі Excel, але більш зручно це зробити за допомогою інструменту Описательная статистика (*рис. 2.13). В результаті використання цього інструменту у вказане місце листа електронної таблиці виводяться статистичні дані* (*рис. 2.14*).

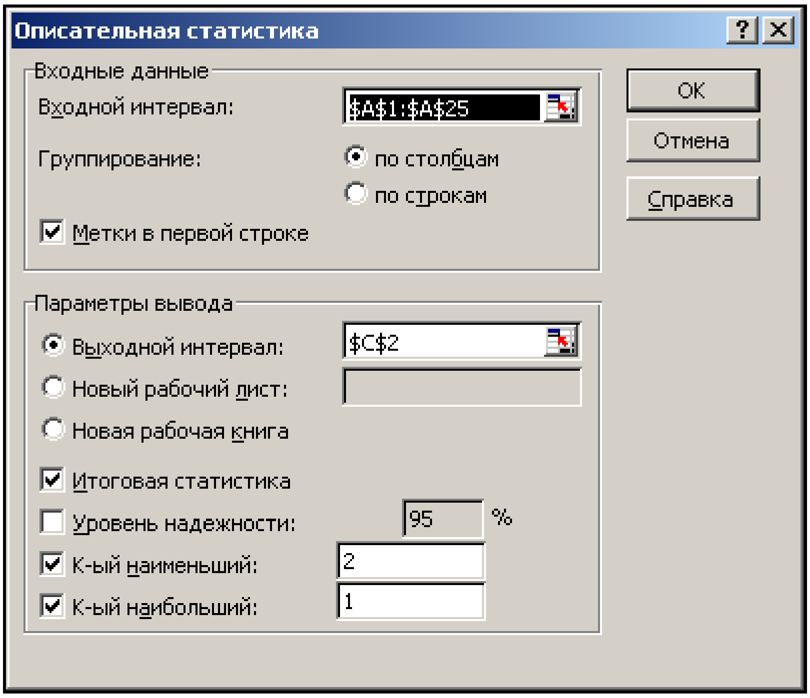


Рис. 2.13 – Діалогове вікно інструменту *Описательная статистика*

	A	B	C	D
1	BSK5			
2	1,44		*BSK5*	
3	2,32			
4	3,48		Среднее	3,377833333
5	5,408		Стандартная ошибка	0,198340357
6	3,48		Медиана	3,26
7	3,6		Мода	2,96
8	3,16		Стандартное отклонение	0,971665342
9	2,64		Дисперсия выборки	0,944133536
10	4,52		Эксцесс	-0,021364675
11	2,96		Асимметричность	0,340606333
12	3,16		Интервал	3,968
13	2,24		Минимум	1,44
14	2,96		Максимум	5,408
15	2,96		Сумма	81,068
16	3,92		Счет	24
17	5,24		Наибольший(2)	5,24
18	4,26		Наименьший(1)	1,44
19	3,12			
20	4,6			
21	3,4			
22	2,24			
23	3,36			
24	2,44			
25	4,16			
26				

Рис. 2.14 – Результат визначення статистичних параметрів вибірки даних вимірювання БСК$_5$

2.5 Експоненційне згладжування

Експоненційне згладжування застосовується для передбачення значення на основі прогнозу для попереднього періоду, скоректованого з урахуванням похибок у цьому прогнозі. При аналізі використовується константа згладжування a, по величині якої визначається ступінь впливу на прогнози похибок у попередньому прогнозі. Застосоване в Excel рівняння методу експоненційного згладжування виглядає наступним чином [9]:

$$F_{t+1} = F_t + a(A_t - F_t) = F_t + (1 - \beta)(A_t - F_t) \qquad (2.10)$$

де F_t – значення з набору вихідних даних;

A_t – згладжене значення;

β – коефіцієнт ослаблення (0 < β < 1, чим менше β, тим слабше згладжування), яка пов'язана з константою згладжування залежністю β = a – 1.

Для константи згладжування найбільш підходящими є значення від 0,2 до 0,3. Ці значення показують, що помилка поточного прогнозу встановлена на рівні від 20 до 30 відсотків помилки попереднього прогнозу. Більш високі значення константи прискорюють відтворення сигналу, але можуть привести до непередбачених прогнозів. Низькі значення константи можуть привести до великих проміжків між прогнозними значеннями (рис. 2.16).

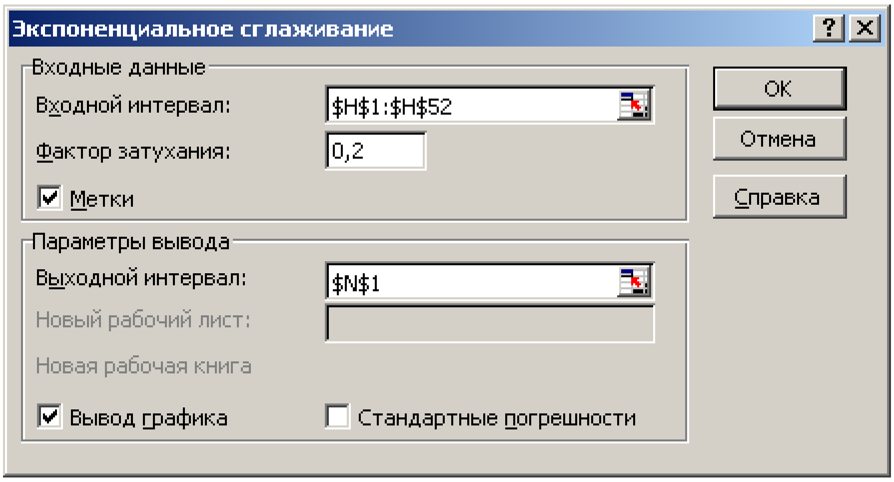


Рис. 2.15 – Діалогове вікно *Экспоненциальное сглаживание*

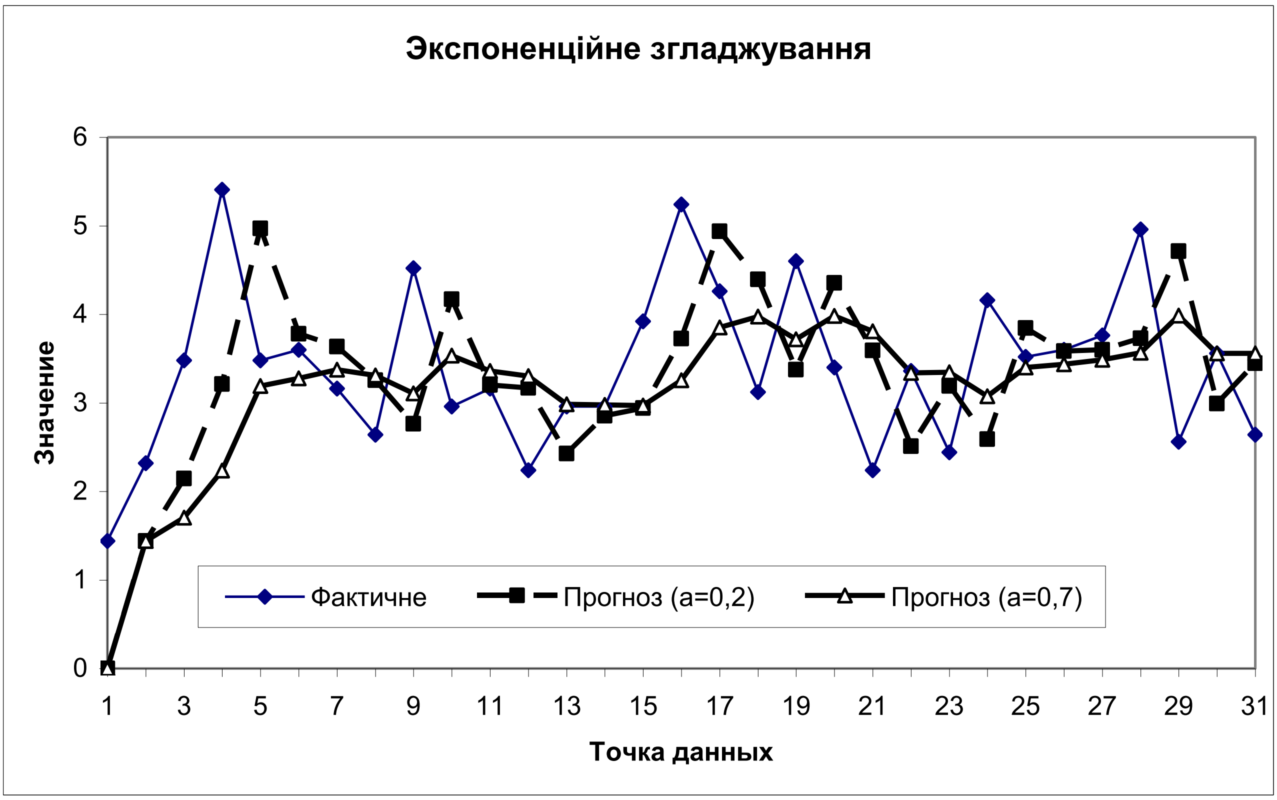


Рис. 2.16 – Експоненційне згладжування із різними значеннями константи згладжування

2.6 Двовибірковий F-тест для дисперсії

Двовибірковий F-тест застосовується для порівняння дисперсій двох генеральних сукупностей.

Наприклад, F-тест можна використовувати для виявлення розходження в дисперсіях тимчасових характеристик, обчислених по двох вибірках.

Гіпотези про дисперсії мають у техніці велике значення, так як дисперсія σ^2 є мірою таких характеристик, як точність вимірювальних приладів, точність машин, точність технологічних процесів та ін. [10].

F-критерій служить для перевірки гіпотези $\sigma_X=\sigma_Y$ при умові, що X та Y розподілені за *нормальним законом*. З кожної генеральної сукупності здійснюються вибірки об'ємом n_1 і n_2. В якості контрольної величини використовують відношення емпіричних дисперсій $F = S_X^2 / S_Y^2$ або $F = S_Y^2 / S_X^2$ (більше значення дисперсії вибирають в якості чисельника). Величина F задовольняє F - розподілу з (m_1, m_2) ступенями свободи. ($m_1=n_1-1$, $m_2=n_1-1$). Критична область вибирається наступним чином. Для рівня значимості α при $p=\alpha/2$ і відповідних ступенях свободи m_1, m_2 визначають критичне значення $F_{p,m1,m2}$. Якщо F, що розраховане по вибірці, більше, ніж критичне значення, то гіпотеза повинна бути відхилена з імовірністю помилки α.

Якщо по емпіричним даним отриманим для двох вимірювальних приладів гіпотеза про рівність дисперсій справджується, то говорять, що твердження про однакову точність приладів не суперечить даним спостережень.

Приклад:

Перевіримо гіпотезу про рівність дисперсій даних вимірювань (Змінна 1, Змінна 2), що здійснені двома вимірювальними приладами (рис. 2.18). Скористаємось інструментом Двухвыборочный F-тест для дисперсии *(рис. 2.17). Результат аналізу виведений у комірку* D2 *електронної таблиці показує, що* F>F критичне*, тому гіпотеза не підтверджується з імовірністю помилки 0,099968. Отже згідно даних вимірювань вимірювальні прилади мають різну точність.*

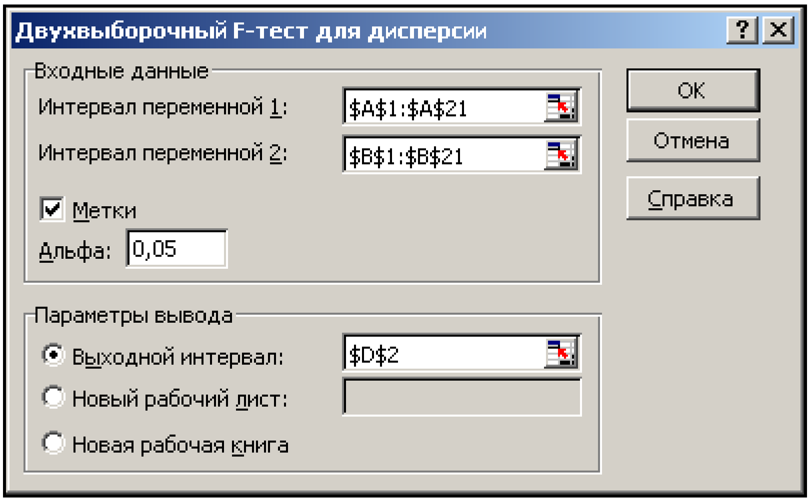


Рис. 2.177 – Діалогове вікно *Двухвыборочный F-тест для дисперсии*

	A	B	C	D	E	F	G
1	Змінна 1	Змінна 2					
2	1,01	1,9		Двухвыборочный F-тест для дисперсии			
3	0,99	1,97					
4	1,05	2,11			*Змінна 1*	*Змінна 2*	
5	0,91	1,95		Среднее	0,9585	2,013	
6	0,91	2,19		Дисперсия	0,007561	0,01378	
7	0,93	1,98		Наблюдения	20	20	
8	0,89	2,17		df	19	19	
9	0,96	1,95		F	0,548678		
10	0,93	2,16		P(F<=f) одностороннее	0,099968		
11	1,07	2,04		F критическое одностороннее	0,461201		
12	1,01	1,88					
13	1,05	1,92					
14	0,91	1,78					
15	0,95	2,1					
16	1,14	2,18					
17	0,93	1,95					
18	0,8	1,88					
19	0,79	2,06					
20	1,03	2,11					
21	0,91	1,98					
22							

Рис. 2.18 – Результат двовибіркового F-тесту для дисперсії

2.7 Аналіз Фур'є

Для представлення періодичних функцій доцільно користуватися рядом, що складається із синусів і косинусів [11]. Період T будь-якої розглянутої функції завжди можна привести до 2π шляхом заміни z:

$$z = 2\pi x/T. \tag{2.10}$$

З іншої сторони, використовуючи доданок виду $A_i\cos\ x\ +\ B_i\sin\ x$ можна легко задати амплітуду коливання; і, нарешті, додавши до цієї суми деякий вільний член, можна опустити або підняти середнє значення щодо осі ординат. Природні процеси як правило, характеризуються тим, що видимий результат складається з декількох гармонік. Наприклад, кількість опадів, що випадають на якій-небудь території, складається з коливань клімату, що мають періоди довжиною в місяці, роки, десятиліття, сторіччя і т.д. Таким чином, актуальним є питання – чи можна, маючи сумарну криву, тобто суперпозицію окремих функцій, параметрів яких ми не знаємо, шляхом деяких перетворень одержати ці параметри? Французький математик Ж. Б. Фур'є показав, що таку сумарну криву можна представити у виді ряду

$$y(t) = A_0 + \sum(A_i\cos(2\pi t/T) + B_i\cos(2\pi t/T)), \tag{2.11}$$

де T – період функції; A_i і B_i – коефіцієнти Фур'є, що знаходять з умови мінімального розходження експериментальної і модельної сумарної кривої.

Виходячи з цього, можна показати, що

$$A_i = 2\sum(z_i \cos(2\pi t/T))/n; \tag{2.12}$$

$$B_i = 2\sum(z_i \sin(2\pi t/T))/n, \tag{2.13}$$

де *n* - число спостережень. A_0 збігається із середньої з усього ряду спостережень.

Окремі криві, що характеризуються *i* - ми коефіцієнтами Фур'є (звичайно їх потрібно одержати), називають гармоніками, а застосування рядів Фур'є для аналізу періодичних даних – гармонійним аналізом. Обчислення коефіцієнтів часто називають перетворенням Фур'є. По суті така процедура є простою апроксимацією експериментальних даних періодичною залежністю.

Важливо пам'ятати, що при гармонійному аналізі відносини періодів різних гармонік повинні бути цілими.

Відомо, що періодичні функції можна представляти як у виді тригонометричних функцій, так і використовуючи комплексні числа. Таким чином, можливо також комплексне перетворення Фур'є. Для аналізу спостережень за природними явищами це менш зручно. У складі «Пакета аналізу» MS Excel мається саме інструмент комплексного перетворення, що, крім того, припускає, що число аналізованих спостережень збігається зі ступенем 2. Це робить даний інструмент ще менш зручним. Отже, апріорі передбачається, що з усіх гармонік максимальний період має та, що збігається з довжиною всього ряду спостережень. Інші повинні мати менший період і відносини періодів повинні бути цілими. Отже, перша гармоніка має вигляд:

$$y_1(\mathrm{t}) = A_0 + \cos(2\pi t/n) + \sin(2\pi t/n) \tag{2.14}$$

і її період збігається з довжиною ряду спостережень. Друга гармоніка:

$$y_2(t) = A_0 + \cos(4\pi t/n) + \sin(4\pi t/n) \tag{2.15}$$

у межах аналізованого ряду має 2 повних періоди; і так далі.

Аналіз Фур′є – це метод апроксимації емпіричних даних сумою тригонометричних функцій (синусів і косинусів), який застосовується для рішення задач у лінійних системах і аналізу періодичних даних на основі методу швидкого перетворення Фур'є (ШПФ). Аналіз Фур′є полягає у визначенні коефіцієнтів на які множаться значення синусів і косинусів до сумування. Таким чином, коефіцієнти Фур′є визначають вклад конкретних частот коливань у множину даних.

Ця процедура підтримує також зворотні перетворення, при цьому, інвертування перетворених даних повертає вихідні дані.

Аналіз Фур′є корисний при дослідженні періодичних даних, оскільки дозволяє визначити основні частоти коливань.

Приклад:

Представляючи дані вимірювання розчиненого кисню 85 створу за 2000-2002 роки можна побачити сезонні періодичні коливання цього показника (рис. 2.20). Для зменшення кількості значень цього показника з метою спрощення аналізу Фур'є здійснимо усереднення по місяцях за допомогою запиту до бази даних. В результаті цього з вибірки з близько 1300 значень були отримані 36 (рис. 2.22). Оскільки число значень у вхідному діапазоні для алгоритму ШПФ повинно бути кратне 2^k*, (наприклад, 4; 8; 16, 32, ..., 4096) то для аналізу використаємо тільки 32 з 36 усереднених значень розчиненого кисню (рис. 2.20). В результаті використання інструменту* Анализ Фурье *(рис. 2.20) отримані значення коефіцієнтів (комірки* E3:E34*) на які множаться значення синусів і косинусів (рис. 2.22). Для визначення найбільш впливових частот визначимо максимальні значення(виділені сірим кольором) модулів*[3] *(комірки* F3:F34*) цих комплексних чисел. Коефіцієнти з найбільшими модулями запишемо у сусідній стовпець, а інші комірки заповнимо нулями (комірки* G3:G34*). Здійснимо зворотне перетворення Фур'є цих значень за допомогою цього ж інструменту змінивши прапорець* Инверсия *(рис. 2.21) та отримаємо ряд даних у комірках* H3:P34. *З графіку побудованого на основі вихідних даних вимірювань розчиненого кисню та даних отриманих в результаті аналізу Фур'є по максимальній частоті слідує, що емпіричні дані можна апроксимувати одною періодичною складовою ряду Фур'є (рис. 2.23).*

3 модуль комплексного числа визначається за допомогою функції Excel *ImAbs()*.

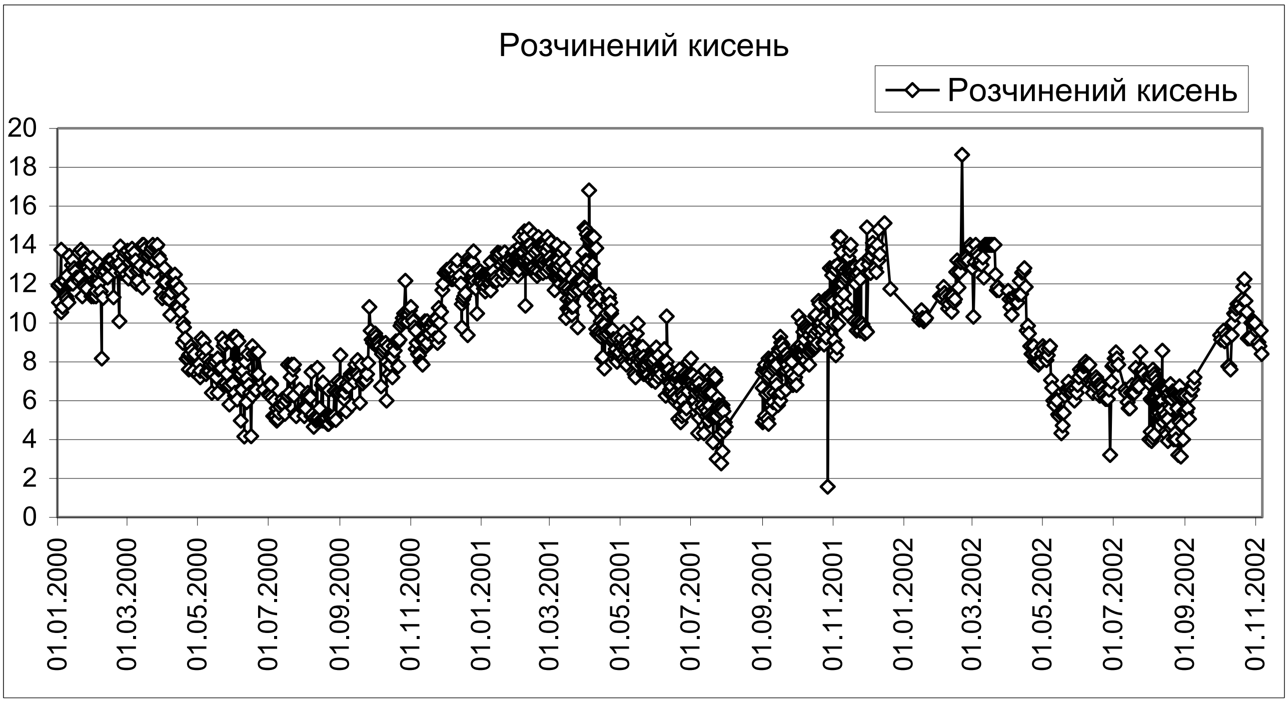


Рис. 2.19 – Дані вимірювання по місяцям значень розчиненого кисню 85 створу за 2000-2002 роки

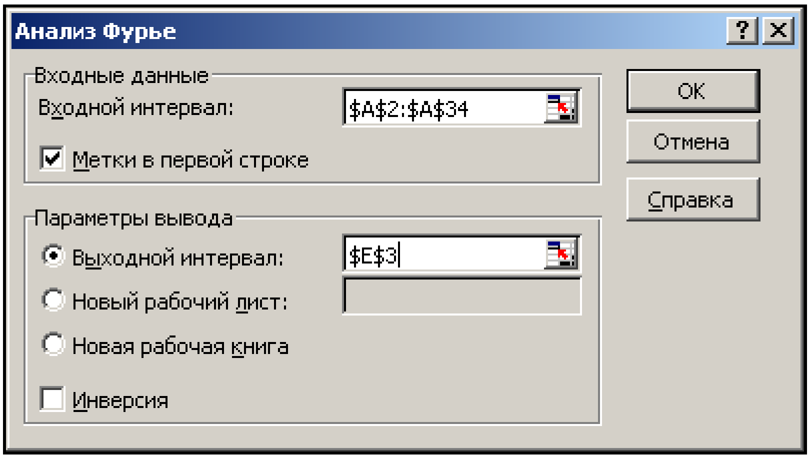


Рис. 2.20 – Використання інструменту *Анализ Фурье* для прямого перетворення

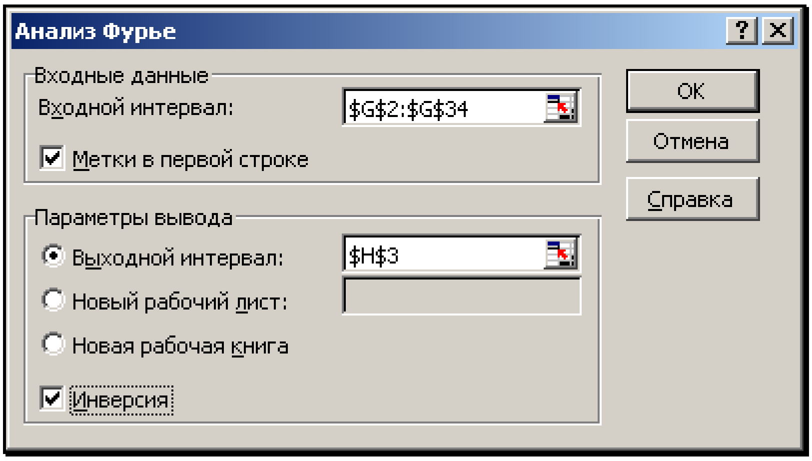


Рис. 2.21 – Використання інструменту *Анализ Фурье* для зворотного перетворення

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вихідні дані				Результати розрахунків			
2	Розчинений кисень	Рік	Місяць		Аналіз Фур'є	Модуль	Частоти з найбільшими коефіцієнтами	Зворотне перетворення Фур'є
3	11,9	2000	1		300,6350513	300,6	300,6350513	10,3
4	11,8	2000	2		-2,373036604302+8,18564361527494i	8,5	0	11,5
5	12,2	2000	3		-3,00231207358026+14,1705245418177i	14,5	0	11,9
6	9,7	2000	4		14,7546512016934-37,620666047291i	40,4	14,7546512016934-37,620666047291i	11,5
7	7,4	2000	5		2,46794813007797-7,22515791055899i	7,6	0	10,4
8	7,4	2000	6		6,76689146710548-11,771537272388i	13,6	0	8,9
9	6,4	2000	7		1,58400342820145-3,29705888563705i	3,7	0	7,6
10	6,5	2000	8		2,37769999017845+2,12935881996605E-002i	2,4	0	6,9
11	7,3	2000	9		-4,27514112811596-3,4046160428058i	5,5	0	7,0
12	8,9	2000	10		-2,7731634387086-5,28925971021373i	6,0	0	8,0
13	9,5	2000	11		3,55452744621035-0,350247817879163i	3,6	0	9,3
14	10,2	2000	12		2,92344109631344-1,11439184923377i	3,1	0	10,8
15	12,5	2001	1		4,21332109025613-2,0574302091016i	4,7	0	11,7
16	12,6	2001	2		6,84229219100103+2,68935164827587i	7,4	0	11,9
17	12,0	2001	3		2,69099081973684-1,8577589223895i	3,3	0	11,2
18	10,2	2001	4		3,88093776887348+0,1042167146867i	3,9	0	9,9
19	7,9	2001	5		1,887936807	1,9	0	8,5
20	7,1	2001	6		3,88093776887347-0,104216714686711i	3,9	0	7,3
21	6,2	2001	7		2,69099081973683+1,85775892238949i	3,3	0	6,9
22	7,9	2001	8		6,84229219100104-2,68935164827588i	7,4	0	7,3
23	7,7	2001	9		4,21332109025614+2,0574302091016i	4,7	0	8,4
24	9,4	2001	10		2,92344109631344+1,11439184923376i	3,1	0	9,8
25	11,7	2001	11		3,55452744621036+0,35024781787916i	3,6	0	11,1
26	11,3	2001	12		-2,77316343870858+5,28925971021375i	6,0	0	11,9
27	11,3	2002	1		-4,27514112811596+3,4046160428058i	5,5	0	11,7
28	11,8	2002	2		2,37769999017844-2,12935881996779E-002i	2,4	0	10,8
29	12,2	2002	3		1,58400342820146+3,29705888563705i	3,7	0	9,4
30	10,7	2002	4		6,76689146710551+11,771537272388i	13,6	0	8,0
31	7,4	2002	5		2,46794813007799+7,225157910559i	7,6	0	7,1
32	7,4	2002	6		14,7546512016935+37,620666047291i	40,4	14,7546512016935+37,620666047291i	6,9
33	7,5	2002	7		-3,00231207358029-14,1705245418177i	14,5	0	7,6
34	6,5	2002	8		-2,37303660430202-8,18564361527489i	8,5	0	8,9
35	7,7	2002	9					
36	9,4	2002	10					
37	6,5	2002	11					
38	9,0	2002	12					

Рис. 2.22 – Вихідні дані усереднених по місяцям значень вимірювання розчиненого кисню по 85 створу за 2000-2002 роки та результати аналізу Фур'є

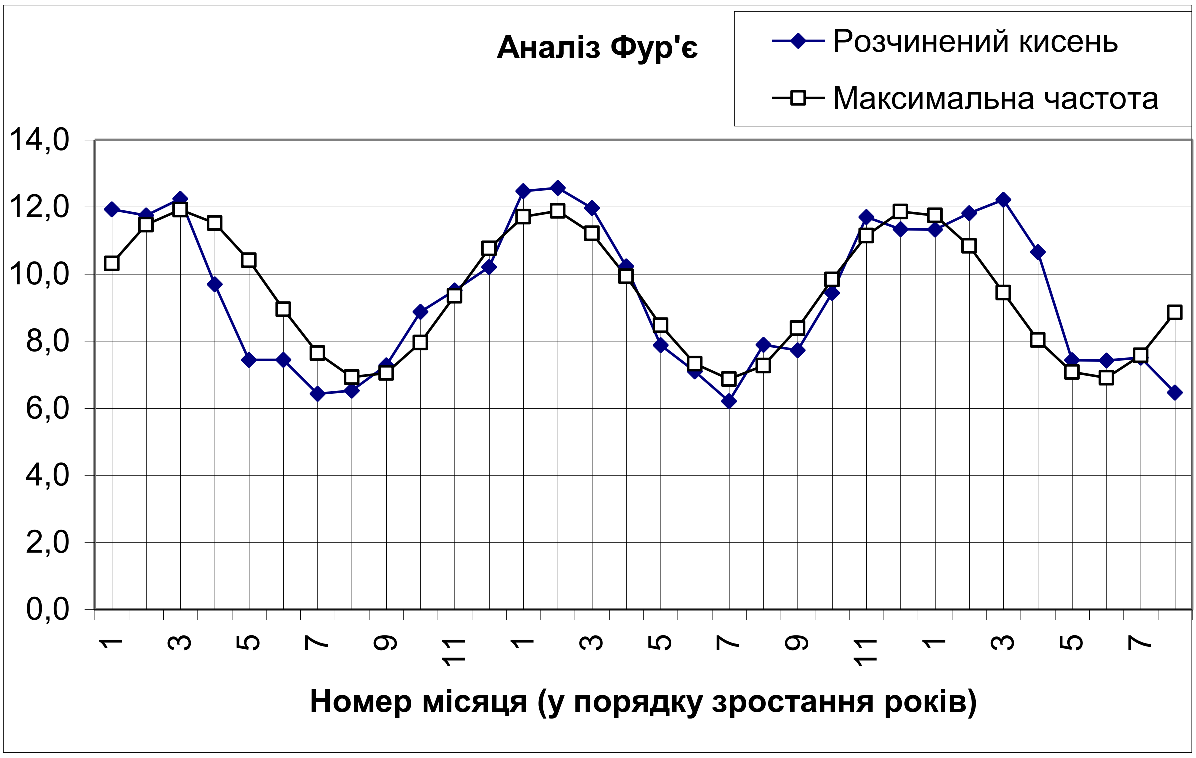


Рис. 2.23 – Графіки емпіричних даних розчиненого кисню та його апроксимація періодичною складовою

2.8 Гістограма

Гістограма використовується для обчислення вибіркових і інтегральних частот попадання даних у зазначені інтервали значень. При цьому розраховуються числа влучень для заданого діапазону комірок [12].

Нехай є вибірка (x_1, ..., x_n) із генеральної сукупності з ознакою X. Закон розподілу X невідомо. Для того щоб отримати перше уявлення про цей розподіл здійснюють побудову гістограми.

Здійснюють розбиття дійсної вісі на кінцеву кількість проміжків Δ_1, ..., Δ_k, що межують між собою. Потім здійснюють підрахунок числа m_i вибіркових значень, що лежать у проміжках Δ_i ($1 \le i \le k$). Ці числа називаються **груповими частотами.** Над Δi зображають прямокутник висоти m_i/n (відносні частоти попадання в інтервали). Графік побудований на основі таких прямокутників називається **гістограмою** вибірки.

Для побудови емпіричної функції розподілу для даного дійсного числа x підраховується число вибіркових значень, що менше x. Позначимо це число через $m_n(x)$. Функція $F_n(x) = \dfrac{m_n(x)}{n}$ називається емпіричною функцією розподілу вибірки (x_1, ..., x_n).

Приклад:

Необхідно виявити тип розподілу значень вимірювання БСК$_5$ за 2002 рік по 85 створу спостереження. Скористуємось інструментом пакету аналізу Гистограмма *(рис. 2.24). Заповнення поля* Интервал карманов *є не обов'язковим і у разі відсутності цих параметрів будуть підібрані автоматично проміжки* $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ (карман)*. Отримана таблиця гістограми складається з границь шкали БСК$_5$ і кількостей вимірювань, значення яких знаходиться між самою нижньою границею і поточною границею (*частота*), а також долі значень з загального числа (*интегральный %*), що менше поточної границі (рис. 2.25). Щоб отримати відносні частоти попадань у інтервали поділимо кожну частоту на загальну кількість вимірювань і отримаємо для них графік (рис. 2.27). Як видно з графіка на рис. 2.27 густина розподілу отримана по емпіричним даним наближається до кривої Гауса, що відповідає нормальному закону розподілу.*

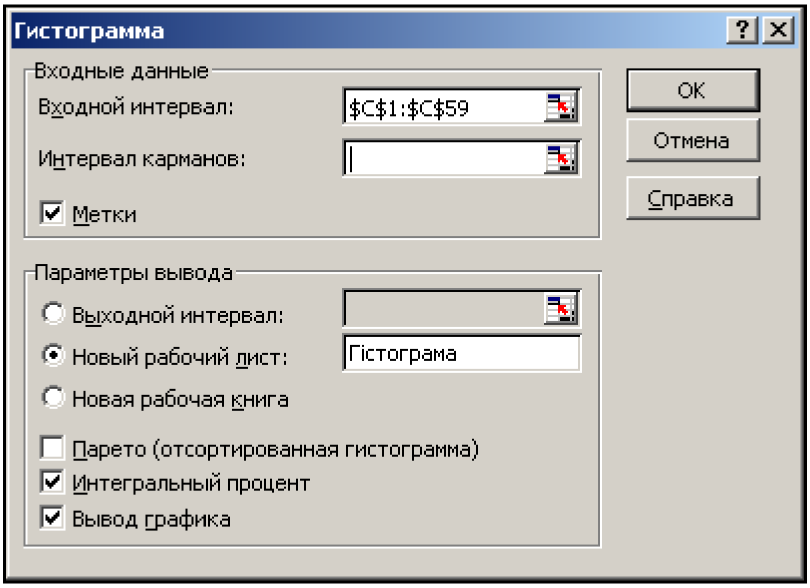


Рис. 2.24 – Діалогове вікно інструменту *Гистограмма*

	A	B	C	D
1	*Карман*	*Частота*	*Интегральный %*	
2	1,60	2	0,03	
3	2,37	4	0,10	
4	3,13	22	0,48	
5	3,90	16	0,76	
6	4,66	8	0,90	
7	5,43	5	0,98	
8	6,19	0	0,98	
9	Еще	1	1,00	
10				

Рис. 2.25 – Таблиця гістограми

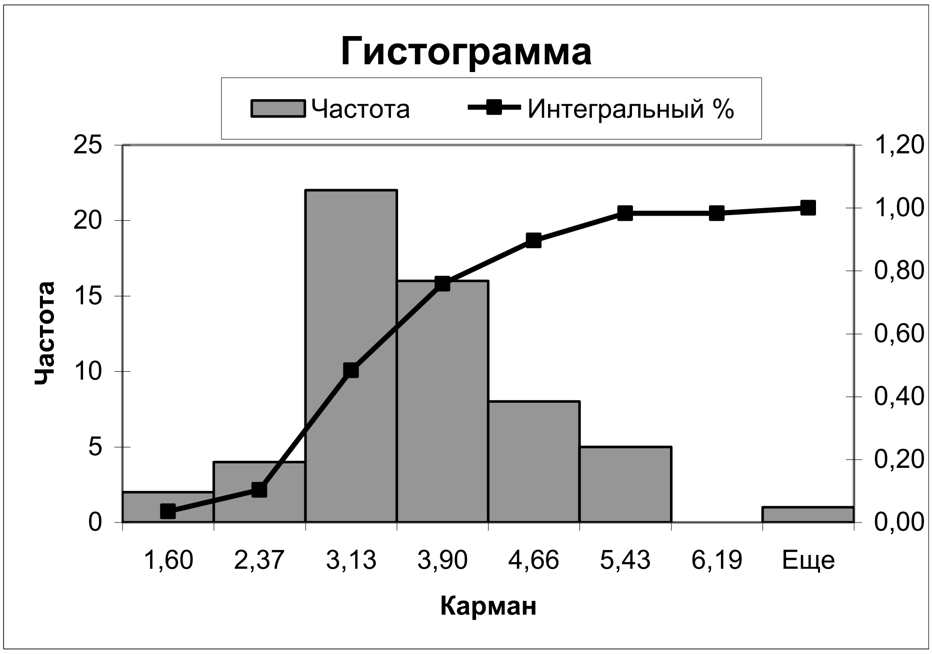


Рис. 2.26 – Гістограма та емпірична функція розподілу величини БСК$_5$

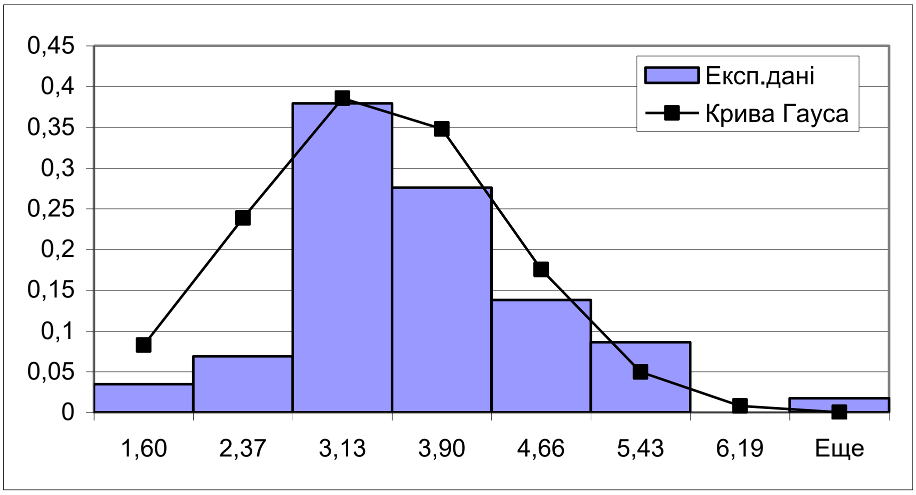


Рис. 2.27 – Густина розподілу величини БСК$_5$

2.9 Ковзне середнє

Ковзне середнє використовується для розрахунку значень у прогнозованому періоді на основі середнього значення змінної для зазначеного числа попередніх періодів. Ковзне середнє, на відміну від простого середнього для усієї вибірки, містить відомості про тенденції зміни даних [13]. Цей метод може використовуватися для прогнозу зміни споживання ресурсів, запасів і інших процесів. Розрахунок прогнозованих значень виконується по наступній формулі.

$$F_{t+1} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} A_{t-j+1}, \tag{2.16}$$

де N – кількість попередніх періодів, що входять у ковзне середнє;

A_j— фактичне значення в момент часу j;

F_j— прогнозоване значення в момент часу j.

Приклад:

*Знайдемо часові ряди даних вимірювань концентрації розчиненого кисню усереднені за різною кількістю попередніх періодів (*N=*3 та* N=*5). Для цього використаємо інструмент* Скользящее среднее (*рис.* 2.28). *В результаті отримаємо графіки, які свідчать, що при* N=*3 дані прогнозу більш наближені до вихідного графіку ніж при* N=*5.*

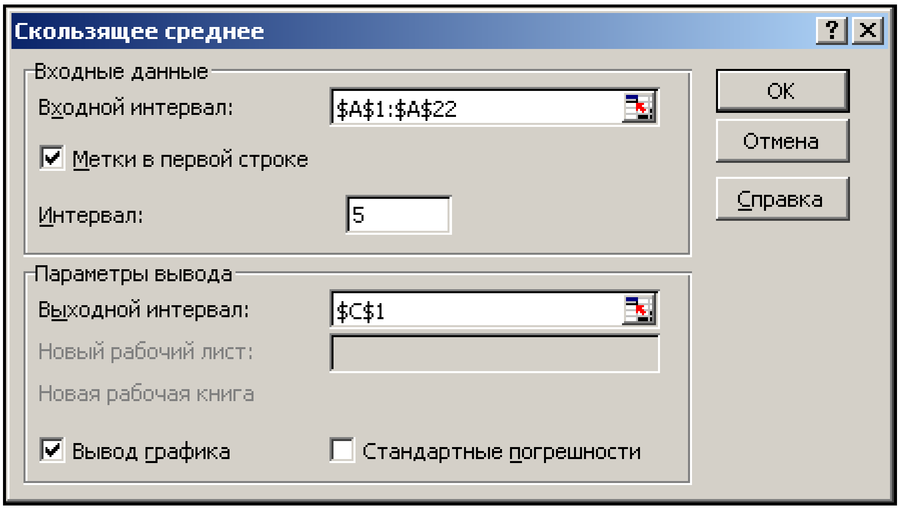


Рис. 2.28 – Діалогове вікно інструменту *Скользящее среднее*

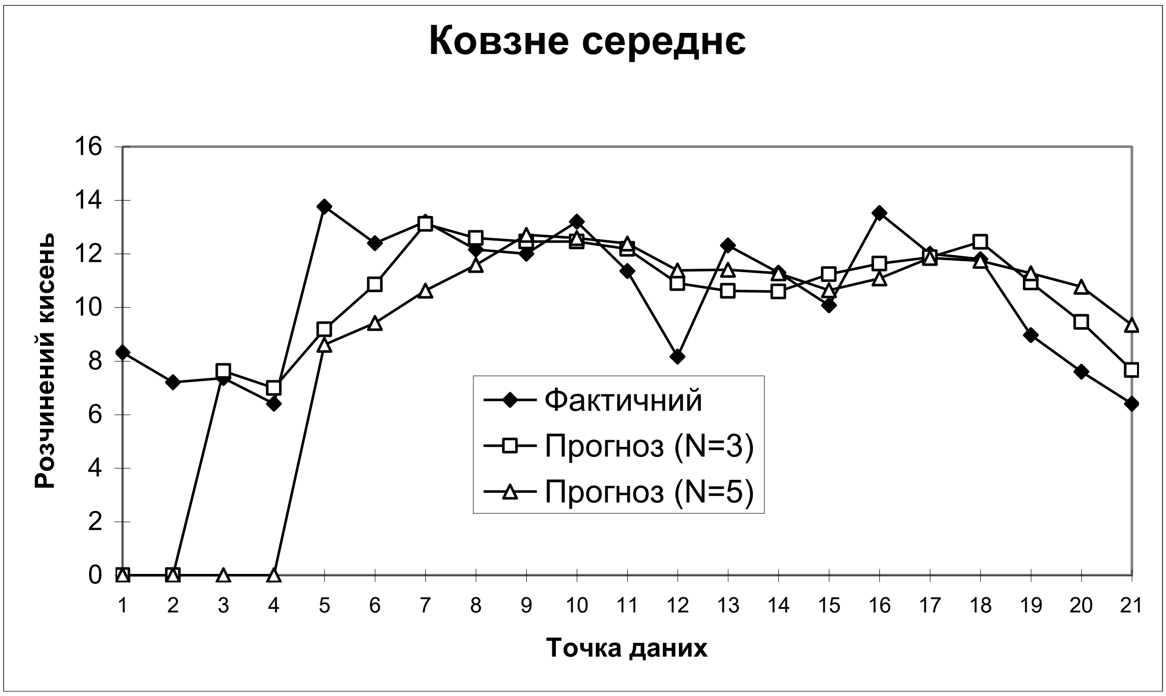


Рис. 2.29 – Ковзне середнє показника концентрації розчиненого кисню із різними значеннями кількостей попередніх періодів, що входять у ковзне середнє

2.10 Генерація випадкових чисел

Використовується для заповнення діапазону випадковими числами, сформованими з одного або декількох розподілів. За допомогою даної процедури можна моделювати об'єкти, що мають випадкову природу, по відомому розподілі ймовірностей [10].

Наприклад, можна використовувати нормальний розподіл для моделювання сукупності даних по росту індивідуумів, або випадкової похибки вимірювань.

Приклад:

Сформуємо набір з 50-ти чисел розподілених за нормальним законом розподілу з показниками: середнє – 0,2, стандартне відхилення – 1. За допомогою інструменту Генерация случайных чисел *(рис. 2.30) отримаємо набір даних гістограма яких представлена на рис. 2.31. Гістограма наближається за формою до кривої Гауса, що відповідає нормальному закону розподілу.*

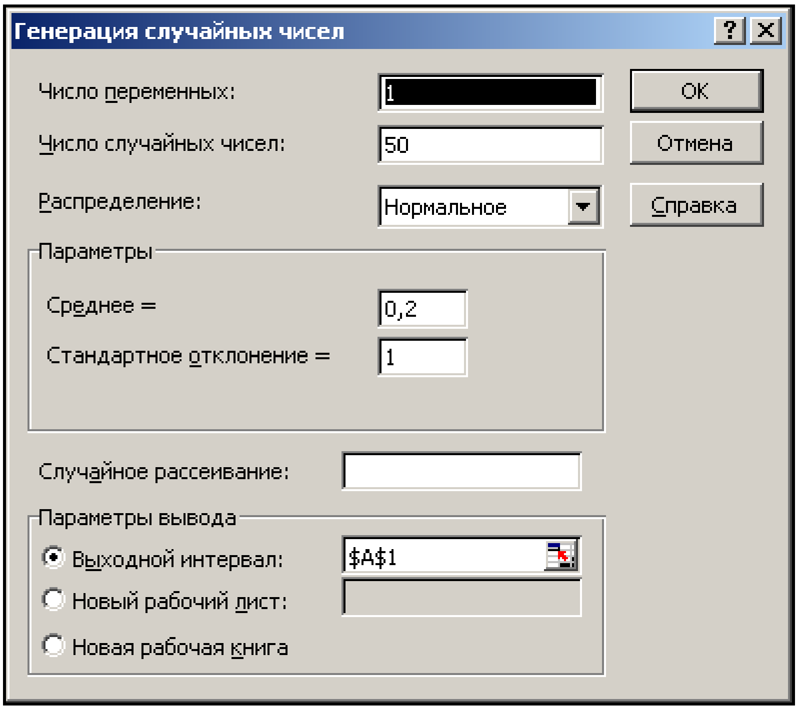


Рис. 2.30 – Діалогове вікно інструменту *Генерация случайных чисел*

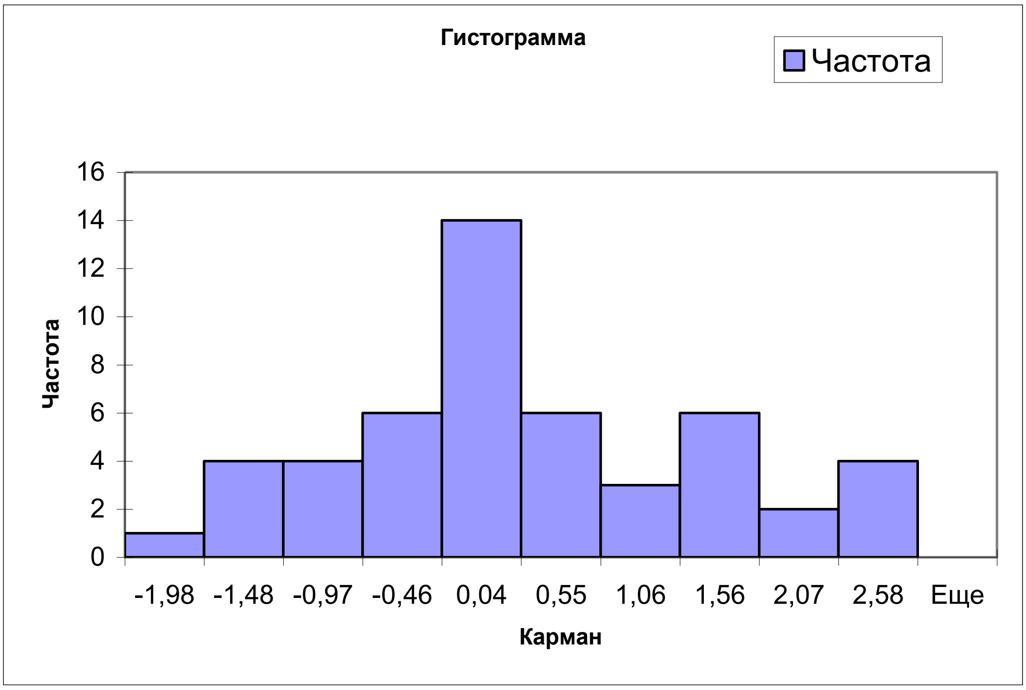


Рис. 2.31 – Гістограма набору випадкових чисел

2.11 Ранг і персентиль

Використовується для формування таблиці, що містить порядковий і процентний ранги для кожного значення в наборі даних. Дана процедура може бути застосована для аналізу відносного розташування даних у наборі.

Вихідні умови ті ж, що і для регресійного аналізу: тобто мається дві групи сполучених спостережень $X = (x_1, ..., x_m)$ і $Y = (y_1, ..., y_m)$.

Якщо є сумнів у нормальності розподілу даних (а вони, у більшості випадків, небезпідставні), то для оцінки зв'язку між змінними X та Y можна скористатися деякими альтернативами методу найменших квадратів. Порядковий номер числа у відсортованому по зростанню вимірюваної величини списку об'єктів називається його *рангом*.

Ступінь впливу ознаки X на ступінь виразності відгуку Y будемо шукати, ґрунтуючись на рангах вимірів [8].

Нехай кожному i-му вимірові приписана пара натуральних чисел (r_i, s_i), де r_i – ранг x_i серед чисел (x_1, ..., x_m), а s_i – ранг y_i серед чисел (y_1, ..., y_m).

Якщо ознаки X и Y взаємозалежні, то послідовність рангів $r_1, r_2, \ldots, r_m$ впливає на рангову послідовність $s_1, s_2, \ldots, s_m$; у противному випадку порядок серед Y випадковий по відношенню порядку серед X.

Коефіцієнт рангової кореляції, запропонований у 1900 р. знаменитим психологом Ч. Спірменом, заснований на тім, що близькість цих двох рядів чисел відбиває величина:

$$S=\sum_{i=1}^{m}(r_i-s_i)^2, \qquad (2.17)$$

яка варіюється від 0, якщо послідовності цілком збігаються, до $(m^3 - m)/3$, коли послідовності рангів цілком протилежні.

Нормований по своєму максимальному значенню, *коефіцієнт рангової кореляції Спірмена*

$$\rho=1-\frac{6S}{m^3-m} \qquad (2.18)$$

має значення від +1 до –1 і свої крайні значення приймає у випадках повної передбачуваності однієї рангової послідовності по іншій. Значення S не залежить ні від значення першого номера послідовності, ні від порядку сортування.

Приклад:

Для знаходження коефіцієнту рангової кореляції Спірмена між двома вибірками даних вимірювання показників мутності та БСК$_5$ *по 85 створу за 2000 рік скористаємось інструментом Ранг и персентиль (рис. 2.32). Результат роботи цього інструменту представлено на рис. 2.33. Оскільки значення рангів у результуючій таблиці представлені у порядку зростання, то для повернення до початкової послідовності (як вихідні дані) потрібно скористатись функцією сортування по стовпцю Точка меню Данные►Сортировка... для двох вибірок (рис. 2.34). Далі за допомогою функції Excel СУММКВРАЗН() у комірці С26 визначається сума квадратів різниць рангів, а також у комірці С29 визначається коефіцієнт рангової кореляції Спірмена за рівнянням шляхом введення у цю комірку виразу "=1-C26/(20^3-20)". Отримане значення 0,857895 коефіцієнту кореляції Спірмена свідчить про високий рівень зв'язку порядків даних цих показників.*

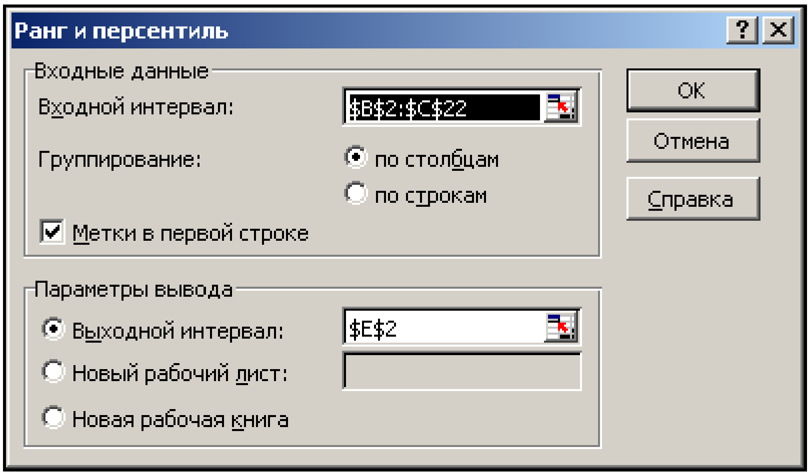


Рис. 2.32 – Діалогове вікно інструменту *Ранг и персентиль*

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Вихідні дані			Результати аналізу							
2	**Мутність**	**БСК5**		*Точка*	*Мутність*	*Ранг*	*Процент*	*Точка*	*БСК5*	*Ранг*	*Процент*
3	2,54	1,84		3	6,1	1	100,00%	17	8,32	1	100,00%
4	5,09	2,88		2	5,09	2	89,40%	11	7,12	2	89,40%
5	6,1	5,12		19	5,09	2	89,40%	19	7,12	2	89,40%
6	3,05	4		18	4,83	4	84,20%	3	5,12	4	84,20%
7	4,07	3,2		13	4,58	5	73,60%	6	4,96	5	78,90%
8	3,82	4,96		14	4,58	5	73,60%	18	4,8	6	73,60%
9	1,53	4		5	4,07	7	68,40%	8	4,36	7	68,40%
10	1,37	4,36		6	3,82	8	63,10%	20	4,16	8	63,10%
11	1	1,76		20	3,56	9	57,80%	4	4	9	52,60%
12	1,17	1,44		4	3,05	10	52,60%	7	4	9	52,60%
13	1,17	7,12		1	2,54	11	42,10%	15	3,86	11	47,30%
14	2,54	3,76		12	2,54	11	42,10%	12	3,76	12	42,10%
15	4,58	3,08		16	2,03	13	36,80%	5	3,2	13	36,80%
16	4,58	3,12		15	1,98	14	31,50%	14	3,12	14	31,50%
17	1,98	3,86		7	1,53	15	26,30%	13	3,08	15	26,30%
18	2,03	2,8		17	1,52	16	21,00%	2	2,88	16	21,00%
19	1,52	8,32		8	1,37	17	15,70%	16	2,8	17	15,70%
20	4,83	4,8		10	1,17	18	5,20%	1	1,84	18	10,50%
21	5,09	7,12		11	1,17	18	5,20%	9	1,76	19	5,20%
22	3,56	4,16		9	1	20	,00%	10	1,44	20	,00%
23											

Рис. 2.33 – Визначення порядкового та процентного рангів показників вимірювання мутності та БСК$_5$ по 85 створу за 2000 рік

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Вихідні дані			Результати аналізу							
2	**Мутність**	**БСК5**		*Точка*	*Мутність*	*Ранг*	*Процент*	*Точка*	*БСК5*	*Ранг*	*Процент*
3	2,54	1,84		1	2,54	11	42,10%	1	1,84	18	10,50%
4	5,09	2,88		2	5,09	2	89,40%	2	2,88	16	21,00%
5	6,1	5,12		3	6,1	1	100,00%	3	5,12	4	84,20%
6	3,05	4		4	3,05	10	52,60%	4	4	9	52,60%
7	4,07	3,2		5	4,07	7	68,40%	5	3,2	13	36,80%
8	3,82	4,96		6	3,82	8	63,10%	6	4,96	5	78,90%
9	1,53	4		7	1,53	15	26,30%	7	4	9	52,60%
10	1,37	4,36		8	1,37	17	15,70%	8	4,36	7	68,40%
11	1	1,76		9	1	20	,00%	9	1,76	19	5,20%
12	1,17	1,44		10	1,17	18	5,20%	10	1,44	20	,00%
13	1,17	7,12		11	1,17	18	5,20%	11	7,12	2	89,40%
14	2,54	3,76		12	2,54	11	42,10%	12	3,76	12	42,10%
15	4,58	3,08		13	4,58	5	73,60%	13	3,08	15	26,30%
16	4,58	3,12		14	4,58	5	73,60%	14	3,12	14	31,50%
17	1,98	3,86		15	1,98	14	31,50%	15	3,86	11	47,30%
18	2,03	2,8		16	2,03	13	36,80%	16	2,8	17	15,70%
19	1,52	8,32		17	1,52	16	21,00%	17	8,32	1	100,00%
20	4,83	4,8		18	4,83	4	84,20%	18	4,8	6	73,60%
21	5,09	7,12		19	5,09	2	89,40%	19	7,12	2	89,40%
22	3,56	4,16		20	3,56	9	57,80%	20	4,16	8	63,10%
23											
24											
25											
26	S= =СУММКВРАЗН(G3:G22;K3:K22)							$S=\sum_{i=1}^{m}(r_i-s_i)^2$			
27											
28											
29	ρ= 0,857895							$\rho=1-\frac{6S}{m^3-m}$			
30											

Рис. 2.34 – Визначення коефіцієнту рангової кореляції Спірмена між двома вибірками даних

2.12 Регресія

В уявленні більшості лінійна регресія асоціюється з визначенням кутового коефіцієнта і точки перетину з віссю ординат апроксимуючої прямої, що найкраще описує експериментальну залежність. Але це є лише частиною загального поняття лінійної регресії, що означає лінійну залежність відносно своїх коефіцієнтів рівняння використаного для опису даних. При цьому не є обов'язковою лінійність графіку апроксимаційної залежності.

Пакет регресійного аналізу в Excel достатньо простий у використанні, але він дещо складніше ніж побудова лінії тренда на діаграмі [9]. Збільшення складності може бути викликано з таких причин:

- потрібно використати модель регресії, лінія тренду якої відсутня.

Цей пакет дозволяє застосувати будь-яку модель лінійної регресії.

- потрібна більш повна інформація щодо регресії, яку не можна отримати за допомогою ліній тренду.

Лінійний регресійний аналіз полягає у підборі графіка для набору спостережень за допомогою методу найменших квадратів. Регресія використовується для аналізу впливу на окрему залежну змінну значень однієї або більше незалежних змінних.

Використання пакету регресійного аналізу здійснюється за таким алгоритмом.

1. Вибирається модель лінійної регресії. Ця модель повинна бути лінійною відносно коефіцієнтів.
2. Задаються стовпці електронної таблиці, що містять значення X та Y (рис. 2.35) В якості стовпця (рядка), що містить значення Y, можна вказувати тільки один стовпчик (рядок), а значення X можуть використовувати декілька стовпців (рядків) (наприклад, X, X^2, X^3 і т. і. або іншими потрібними значеннями для обраної моделі регресії).
3. Здійснюється регресійний аналіз за допомогою порогами Excel (рис. 2.36).
4. Розміщення результатів регресії в електронній таблиці та їх аналіз за такими якостями (рис. 2.37):

- коефіцієнти *Y-пересечение, Переменная X1, Переменная X2* і т. і. є результатом регресії.
- якщо R^2 дорівнює 1,0 – це вказує на ідеальне співпадіння.

5. За допомогою графіку підбору і графіку залишків (якщо вибрані відповідні опції) перевірити відповідність отриманої моделі регресії вихідним даним.

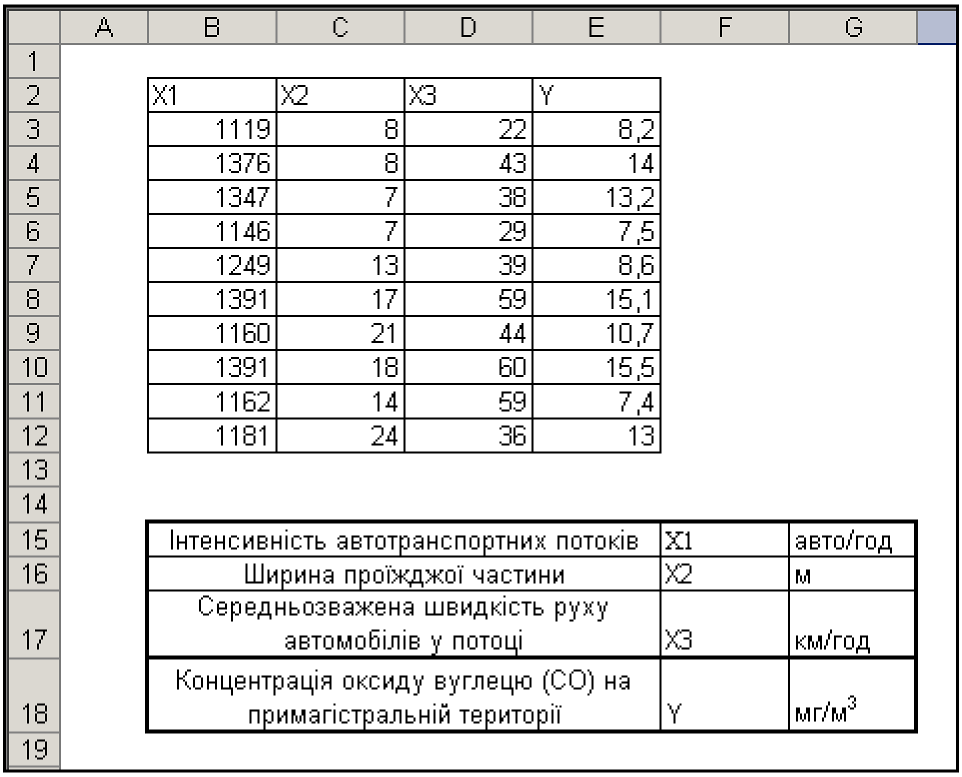
Приклад:

Наприклад, на вміст шкідливих домішок поблизу автомобільного шляху можуть впливати такі фактори: інтенсивність автотранспортних потоків, ширина проїжджої частини, середньозважена швидкість руху автомобілів у потоці та ін. Здійснимо лінійний регресійний аналіз, а саме знайдемо залежність між експериментальними даними (рис. 2.35) у виді $Y=K_0+K_1 \cdot X_1+K_2 \cdot X_2+K_3 \cdot X_3$. *Для цього заповнимо форму відповідно рис. 2.36 та натиснувши кнопку* ОК *отримаємо результат у виді представленому на рис. 2.37 та графіки залишків (рис. 2.38) та підбору (рис. 2.39).*

Таким чином в результаті регресійного аналізу отримано залежність

$Y=-26{,}6838+ 0{,}030331 \cdot X_1+0{,}274408 \cdot X_2-0{,}08708 \cdot X_3$.

Отримана залежність може бути використана для орієнтовного визначення вмісту чадного газу поблизу автомагістралей без застосування спеціальних приладів.



X1	X2	X3	Y
1119	8	22	8,2
1376	8	43	14
1347	7	38	13,2
1146	7	29	7,5
1249	13	39	8,6
1391	17	59	15,1
1160	21	44	10,7
1391	18	60	15,5
1162	14	59	7,4
1181	24	36	13

Інтенсивність автотранспортних потоків	X1	авто/год
Ширина проїжджої частини	X2	м
Середньозважена швидкість руху автомобілів у потоці	X3	км/год
Концентрація оксиду вуглецю (СО) на примагістральній території	Y	мг/м^3

Рис. 2.35 – Вихідні дані регресійного аналізу

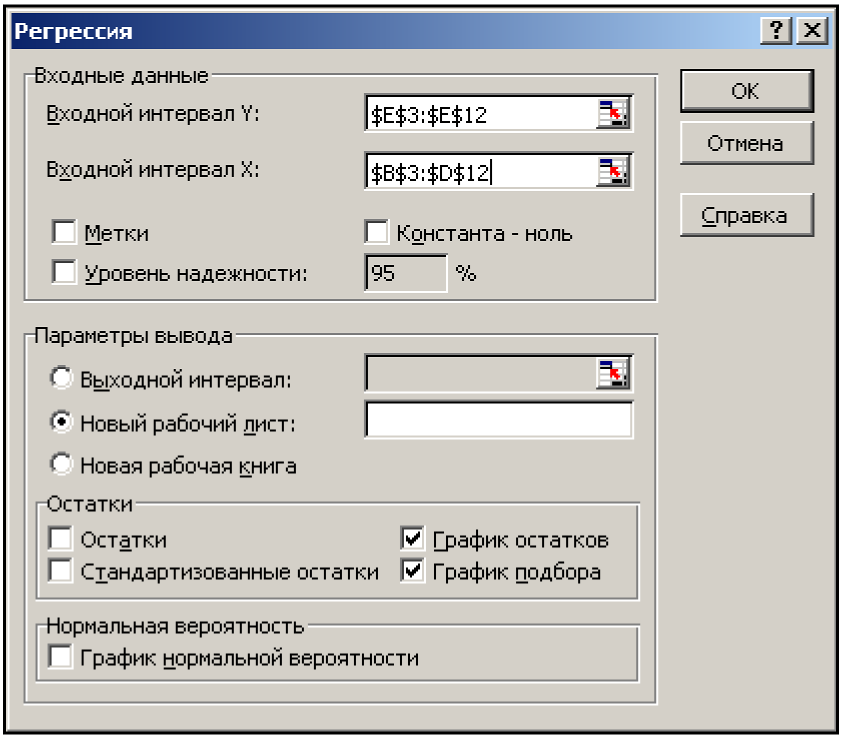


Рис. 2.36 – Виконання регресійного аналізу

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	ВЫВОД ИТОГОВ							
2								
3	*Регрессионная статистика*							
4	Множественный	0,950928						
5	R-квадрат	0,904264						
6	Нормированный	0,856396						
7	Стандартная оши	1,216691						
8	Наблюдения	10						
9								
10	Дисперсионный анализ							
11		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*		
12	Регрессия	3	83,89398	27,96466	18,89074	0,001849164		
13	Остаток	6	8,882022	1,480337				
14	Итого	9	92,776					
15								
16		*Коэффициен*	*дартная о*	*статисти*	*Р-Значение*	*Нижние 95%*	*ерхние 95%*	*ижние 95,0*
17	Y-пересечение	-26,6838	5,261707	-5,07132	0,002285	-39,55872286	-13,8088	-39,5587
18	Переменная X 1	0,030331	0,004704	6,447421	0,000659	0,018819594	0,041842	0,01882
19	Переменная X 2	0,274408	0,078716	3,486041	0,013046	0,081796026	0,467019	0,081796
20	Переменная X 3	-0,08708	0,045002	-1,93496	0,101146	-0,197192684	0,023039	-0,19719
21								

Рис. 2.37 – Результати регресійного аналізу

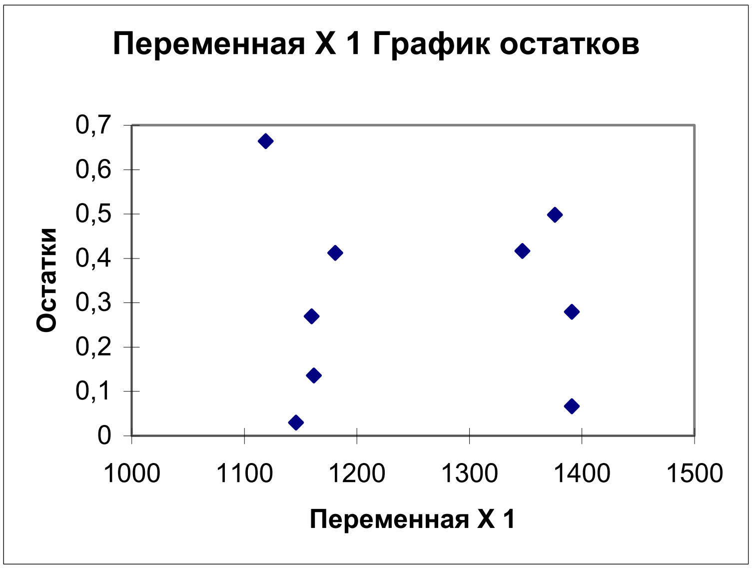


Рис. 2.38 – Графік залишків

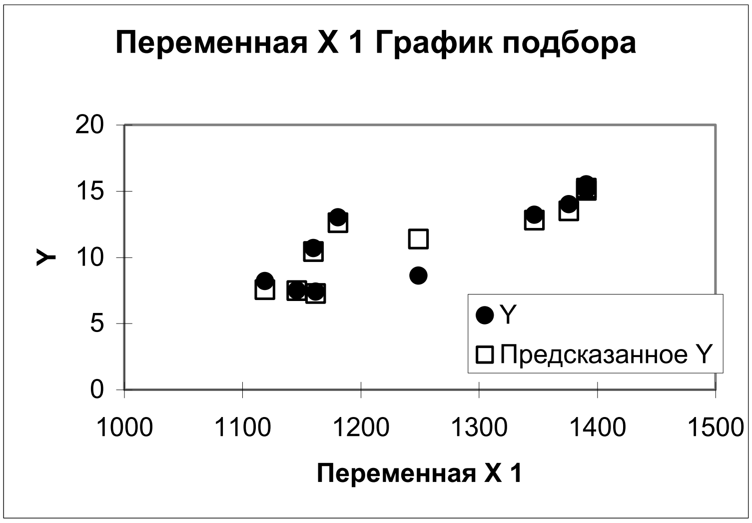


Рис. 2.39 – Графік підбору

2.13 Вибірка

Даний інструмент створює вибірку з генеральної сукупності, розглядаючи вхідний діапазон як генеральну сукупність. Якщо сукупність занадто велика для обробки або побудови діаграми, можна використовувати представницьку вибірку. Крім того, якщо передбачається періодичність вхідних даних, то можна створити вибірку, що містить значення тільки з окремої частини циклу [9].

Вибірка даних використовується для опису властивостей генеральної сукупності. Такий метод отримав назву вибіркового дослідження. Для створення репрезентативної вибірки зазвичай використовується випадкова вибірка, яка може бути отримана способом, що забезпечить даним однакову імовірність попасти у вибірку. Але при створенні вибірки слід також мати на увазі характер випадкових даних генеральної сукупності, наприклад, вибірка сформована на основі даних вимірювань чадного газу поблизу автомагістралі у час найбільшої інтенсивності руху не буде репрезентативною для генеральної сукупності.

Якщо вхідний діапазон містить дані рівнів води, то створення вибірки з періодом 1 рік розмістить у вихідному діапазоні значення одного року.

Приклад:

Знайдемо репрезентативну вибірку даних вимірювання БСК$_5$ *у 2003 році за даними з прикладу дисперсійного аналізу. Скористуємось інструментом* Выборка *пакету аналізу (рис. 2.40). В результаті отримаємо вибірку даних (рис. 2.41) середнє значення і дисперсія якої мало відрізняються від цих показників для генеральної сукупності.*

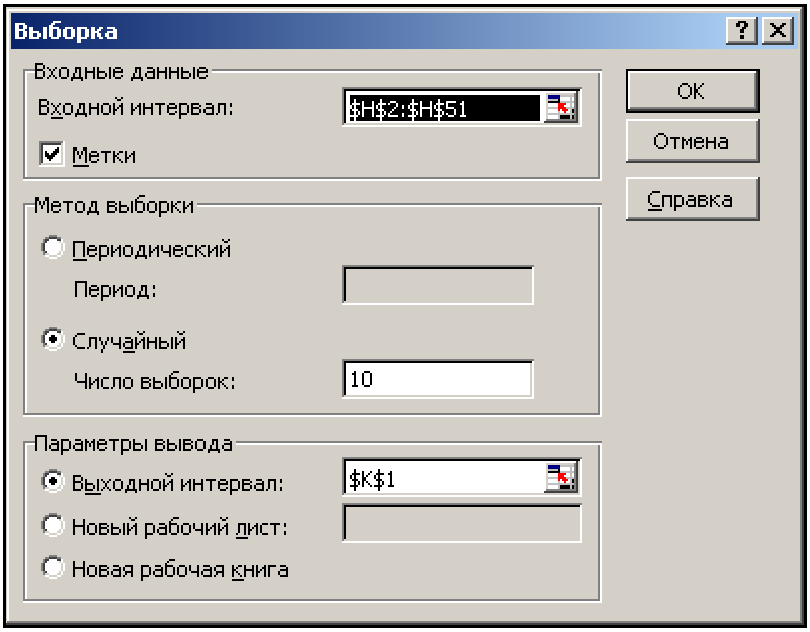


Рис. 2.40 – Діалогове вікно інструменту *Выборка* пакету аналізу

I	J	K	L	M
	Вибірка	3,48		
		3,16		
		5,8		
		3,4		
		3,16		
		3,76		
		2,4		
		2,64		
		1,6		
		3,36		
		Середнє	Дисперсія	
	Генер.сукупн.	3,320549	1,154051	
	Вибірка	3,276	1,186293	

Рис. 2.41 – Репрезентативна вибірка БСК$_5$

2.14 Т-тест

Цей вид аналізу використовується для перевірки середніх для різних типів генеральних сукупностей.

Двовибірковий t-тест з однаковими дисперсіями. **Двовибірковий** t-тест Стьюдента служить для перевірки гіпотези про рівність середніх для двох вибірок із нормально розподілених генеральних сукупностей у припущенні, що дисперсії σ_1^2 та σ_2^2 рівні але невідомі [10]. В якості контрольної використовують величину

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1)\sigma_X^2 + (n_2 - 1)\sigma_Y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \qquad (2.19)$$

Для рівня значимості α визначають і k=n_1+n_2–2 ступенями свободи визначають критичне значення $t_{\alpha,k}$. Якщо визначена величина t задовольняє нерівності $|t| > t_{\alpha,k}$, то гіпотезу відкидають.

Приклад:

По даним вимірювань концентрацій цезію по 36 створу за 2003 та 2004 роки середні значення відрізняються. Перевіримо гіпотезу про рівність цих середніх.

Скористаємось інструментом пакету аналізу ***Двовибірковий t-тест з однаковими дисперсіями*** *(рис. 2.42). На основі результату представленого на рис. 2.43 можна лише стверджувати, що оскільки $|t| < t_{\alpha,k}$, то дані вимірювань не суперечать гіпотезі про рівність значень концентрацій цезію за 2003 та 2004 роки.*

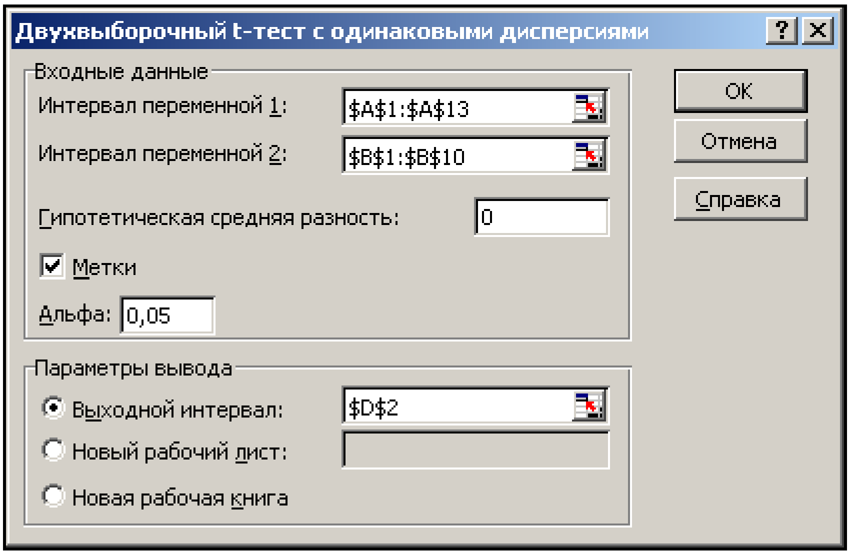


Рис. 2.42 – Діалогове вікно інструменту **Двовибірковий t-тест з однаковими дисперсіями**

	A	B	C	D	E	F
1	**Cs**	**Cs**				
2	0,81	0,78		Двухвыборочный t-тест с одинаковыми дисперсиями		
3	1,40	1,40				
4	1,60	0,76			*Cs*	*Cs*
5	0,75	1,40		Среднее	1,115666667	0,993333333
6	0,73	1,07		Дисперсия	0,114173879	0,08573225
7	1,40	0,75		Наблюдения	12	9
8	0,90	1,27		Объединенная дисперсия	0,102198456	
9	0,77	0,76		Гипотетическая разность средних	0	
10	1,44	0,75		df	19	
11	1,40			t-статистика	0,867810444	
12	0,85			P(T<=t) одностороннее	0,198163434	
13	1,35			t критическое одностороннее	1,729131327	
14				P(T<=t) двухстороннее	0,396326869	
15				t критическое двухстороннее	2,093024705	
16						

Рис. 2.43 – Результати двовибіркового t-тесту для середніх значень за 2003 та 2004 роки концентрацій цезію по 36 створу

Двовибірковий t-тест із різними дисперсіями. Двовибірковий t-тест Стьюдента використовується для перевірки гіпотези про рівність середніх $\bar{X}$ та $\bar{Y}$ для двох вибірок даних з різних генеральних сукупностей. Якщо тестується та сама генеральна сукупність, використовуйте парний тест.

Для визначення тестової величини *t* використовується наступна формула.

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2}}}. \qquad (2.20)$$

Для апроксимації числа ступенів волі застосовується формула.

$$df = \frac{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_1} + \frac{\sigma_Y^2}{n_2}\right)}{\frac{\left(\sigma_X^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\sigma_Y^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}} \qquad (2.21)$$

Як правило, результатом обчислень є дійсне число, тому проводиться округлення до найближчого цілого, щоб одержати критичне значення *t* з таблиці.

Парний двовибірковий t-тест для середніх. Парний д**вовибірковий** t-тест Стьюдента використовується для перевірки гіпотези про розходження середніх для двох вибірок даних. У ньому не передбачається рівність дисперсій генеральних сукупностей, з яких обрані дані. Парний тест використовується, коли мається природна парність спостережень у вибірках, наприклад, коли генеральна сукупність тестується двічі — до і після експерименту.

Сукупна міра розподілу даних навколо середнього значення визначається по наступній формулі

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_X^2 + n_2\sigma_Y^2}{n_1 + n_2 - 2}. \qquad (2.22)$$

2.15 Z-тест

Двовибірковий z-тест для середніх з відомими дисперсіями. Використовується для перевірки гіпотези про розходження між середніми $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ двох генеральних сукупностей [12].

Перевірка гіпотез про рівність двох середніх $\overline{X}$ та $\overline{Y}$ має важливе практичне значення. В ситуаціях коли середній результат одної серії даних відрізняється від середнього результату іншої серії виникає запитання: чи можна пояснити виявлене розходження середніх випадковими помилками експерименту або воно викликане іншими причинами? Задача порівняння середніх часто виникає при вибірковому контролі якості по даним отриманим в різних умовах. Перевірка гіпотези H_0 про рівність середніх $MX=MY$ здійснюється за умови нормального закону розподілу вибірок та умови, що відомі є стандартні відхилення σ_X та σ_Y .

При цій гіпотезі величина

$$z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{D\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)}} = \frac{\left(\overline{X} - \overline{Y}\right)\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} \qquad (2.22)$$

розподілена за нормальним законом з середнім рівним нулю та дисперсією рівною одиниці. Для заданого рівня значимості α можна визначити критичне значення z_α таку, що $P\left(|z| > z_\alpha\right) = \alpha$. Визначене z для конкретної вибірки дає можливість перевірити гіпотезу H_0. Якщо $|z| > z_\alpha$, то говорять, що z лежить в критичній області і гіпотезу H_0 слід відкинути. Говорять, що розходження даних є значним. Якщо z не лежить в критичній області, тобто $|z| < z_\alpha$, то можна лише стверджувати, що гіпотеза H_0 не суперечить матеріалу спостережень. З допомогою перевірки статистичних гіпотез можна лише відкинути гіпотезу, але ніколи не можна підтверджувати її справедливість .

Приклад:

По даним вимірювань концентрацій цезію по 36 створу за 2003 та 2004 роки середні значення відрізняються. Перевіримо гіпотезу про рівність цих середніх.

Згідно багаторічних вимірювань концентрацій цезію по 36 створу стандартне відхилення генеральної сукупності склала 0,735. Скористаємось інструментом пакету аналізу Двухвыборочный z-тест для средних *(рис. 2.44). На основі результату представленого на рис. 2.45 можна лише стверджувати, що оскільки $|z| < z_\alpha$, то дані вимірювань не суперечать гіпотезі про рівність значень концентрацій цезію за 2003 та 2004 роки.*

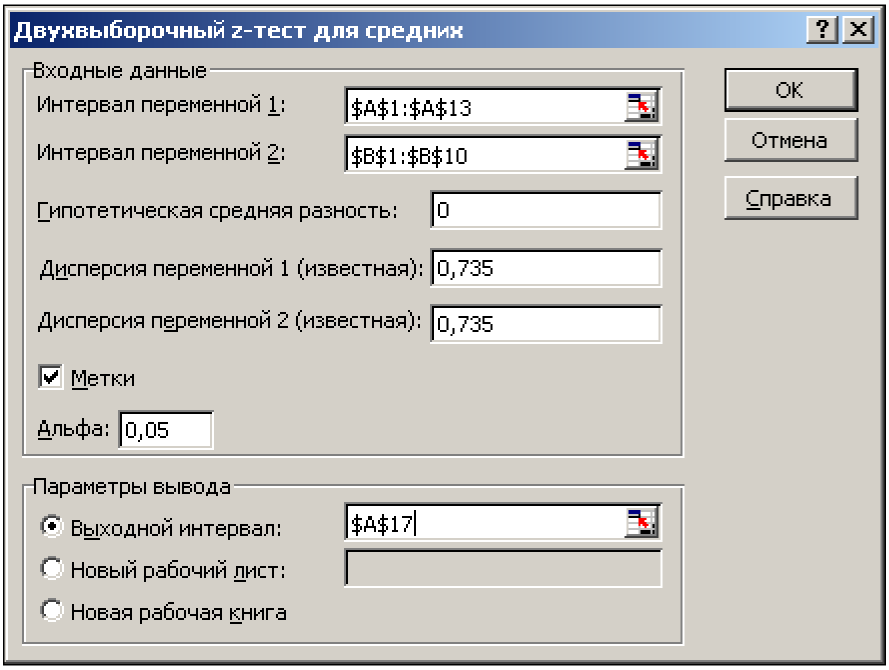


Рис. 2.44 – Діалогове вікно *Двухвыборочный z-тест для средних*

	A	B	C	D	E	F
1	**Cs**	**Cs**				
2	0,81	0,78		Двухвыборочный z-тест для средних		
3	1,40	1,40				
4	1,60	0,76			*Cs*	*Cs*
5	0,75	1,40		Среднее	1,115666667	0,993333333
6	0,73	1,07		Известная дисперсия	0,735	0,735
7	1,40	0,75		Наблюдения	12	9
8	0,90	1,27		Гипотетическая разность средних	0	
9	0,77	0,76		z	0,323596168	
10	1,44	0,75		P(Z<=z) одностороннее	0,37312196	
11	1,40			z критическое одностороннее	1,644853476	
12	0,85			P(Z<=z) двухстороннее	0,746243919	
13	1,35			z критическое двухстороннее	1,959962787	
14						

Рис. 2.45 – Результати двовибіркового z-тесту для середніх значень за 2003 та 2004 роки концентрацій цезію по 36 створу

Контрольні питання

1) *Основні статистичні характеристики неперервної величини.*
2) *Для чого застосовують кореляційний аналіз?*
3) *Що показує коваріація?*
4) *Види дисперсійного аналізу.*
5) *З якою метою застосовують експоненційне згладжування?*
6) *Двовибірковий F-тест для дисперсії.*
7) *Застосування аналізу Фур'є.*
8) *Побудова гістограм у MS Excel.*
9) *Генерація випадкових чисел у MS Excel.*
10) *Інструмент «Ранг и персентиль» MS Excel.*
11) *Регресійний аналіз у MS Excel.*
12) *Інструмент «Выборка» у MS Excel.*
13) *Виконання T-тесту та Z-тесту у у MS Excel.*

3 ВИКОРИСТАННЯ ППП MATHCAD ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЇХ РЕЗУЛЬТАТІВ

3.1 Побудова і аналіз графіків

Крім математичних конструкцій та текстових зон у будь-яке місце документа Mathcad можна помістити графічну зону. Після активізації іконки «X-Y Plot» у робочому полі документа генерується макет графічної області у вигляді прямокутної рамки з двома показниками, розташованими так, як показано на рис. 3.1.

Графічна зона *активізована*, якщо курсор розташований в її межах. Активізована графічна зона доступна для редагування та форматування. Щоб створити двовимірний графік, необхідно і достатньо замість показників увести ті упорядковані змінні, значення яких застосовуються для побудови графіка.

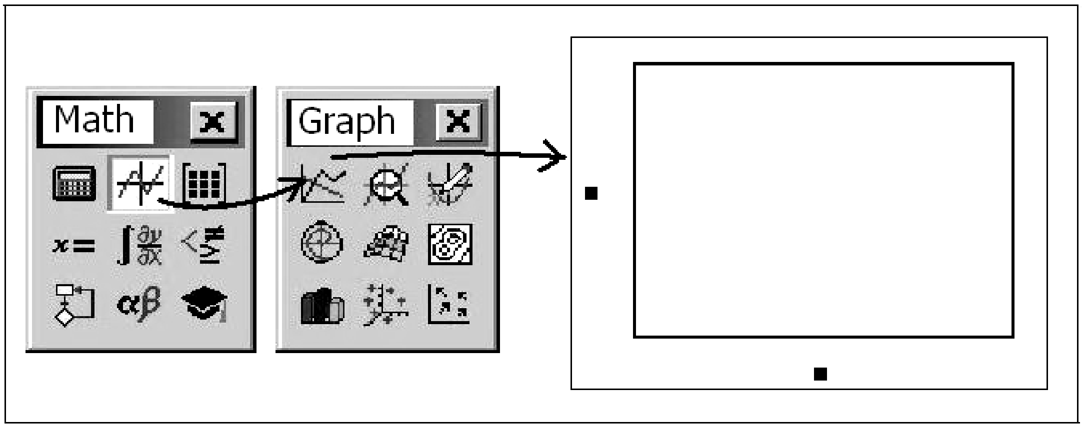


Рис. 3.1 – Порядок створення графічної зони `X-Y Plot`

Найпростіший спосіб створення графічної інформації – це побудова графіка функції. При цьому замість показника, що відповідає осі абсцис, потрібно вказати ім’я незалежної змінної. Відповідно замість показника на осі ординат треба вказати вираз для функціональної залежності. Можна будувати графіки функцій, заданих в явному вигляді або параметрично, використовуючи декартові або полярні координати.

Окремо слід зупинитися на виборі оптимального масштабу для координатних осей. Якщо при побудові графіка не вказаний діапазон змінення значень аргументу, то автоматично розраховуються значення функції для значень аргументу, розташованих на інтервалі [-10, 10]. При упорядкованих значеннях аргументу система Mathcad намагається встановити масштаб таким чином, щоб виведений графік займав якомога більшу частину корисної площини графічної зони. Якщо встановлений масштаб не задовольняє користувача, той має змогу змінити масштаб самостійно, вказавши мінімальні та максимальні значення аргументу і функції замість показників, розташованих у кутах графічної зони. Нарешті, вибір масштабу можна провести в режимі X-Y Zoom (рис. 3.2). Якщо в активізованій графічній зоні виділити мишею частину графіка у вигляді прямокутної рамки, то після закриття діалогового вікна X-Y Zoom виділена частина графічної зони буде займати всю площину графічного вікна.

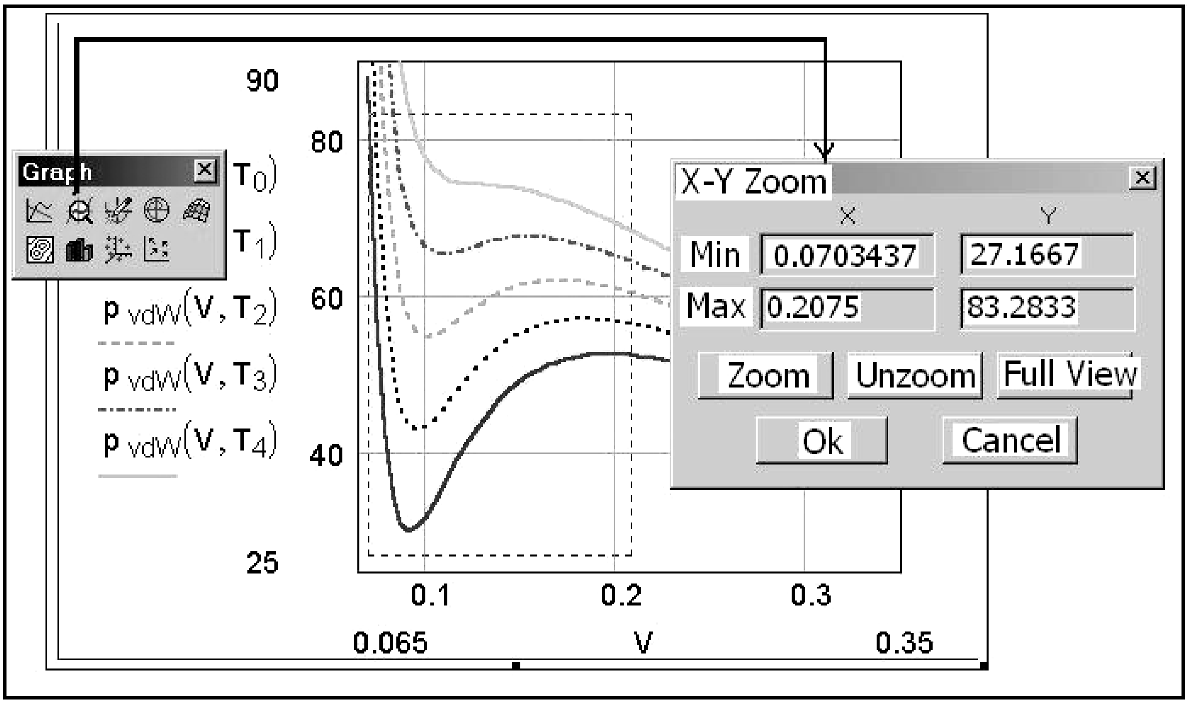


Рис. 3.2 – Робота в режимі X-Y Zoom

Дуже часто в практичній роботі виникає потреба нанесення на координатну площину експериментальних даних. Найбільш доцільним для цього є попереднє розміщення їх у відповідних векторах. Далі достатньо замість показників графічної зони вказати імена цих векторів. До речі, за умовчанням система Mathcad з'єднає всі сусідні точки прямими лініями, отже, у більшості випадків ми отримаємо в підсумку деяку ламану лінію, адже завжди всі експериментальні дані містять певні похибки. У науковій графіці практично ніколи не подають результати експериментів у вигляді ламаних ліній, хіба що за винятком окремих ситуацій, коли проведений експеримент принципово не може ніколи бути відтвореним (наприклад, до таких експериментів належать натурні корозійні дослідження). Тому необхідно вміти коректно зображати графічні об'єкти, створені на підставі результатів експериментів. Для цього в системі Mathcad передбачені дуже потужні та різноманітні засоби форматування графіки. *Меню графічних форматів* стає доступним для інтерактивної роботи після подвійного натиснення лівої кнопки миші. Показник миші при цьому повинен бути розташованим в активізованій графічній зоні. Робота з меню графічних форматів дуже проста та зрозуміла. Вже після перших сеансів роботи з системою користувач здатен створювати цілком професійні графічні об'єкти.

Меню графічних форматів двовимірної графіки складається в цілому з 4 розділів, у кожному з яких можна встановити потрібні характеристики форматів.

Розділ X-Y Axes дозволяє встановити зовнішній вигляд та характеристики координатних осей: лінійна або логарифмічна шкала (Log Scale), наявність допоміжної сітки на координатній площині (Grid Lines), чисельні значення аргументу та функції (Numbered), автоматичне встановлення масштабу (Auto Scale), наявність допоміжних маркерів (Show Markers), стиль подання осей координат (Boxed, Crossed, None). У розділі Traces задаються параметри для виведення графічних даних. Характеристика Symbol встановлює тип символів для точок, що виводяться на графік (none, ×'s, +'s ,◊'s, box, o's), тип з'єднувальної лінії (solid, dash, dot, dadot), загальний спосіб подання даних на площині графічної зони (lines, points, error, bar, step, draw, stem, solidbar), їх колір (Color) та товщину лінії для вибраної серії даних (Weight). У розділі Legend Label можна вказати назву створюваного графічного об'єкта (Title) та назви координатних осей (X-Axis, Y-Axis). Весь комплекс вибраних характеристик форматів можна встановити доступним за умовчанням (розділ Defaults).

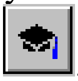
Окрім графіків у декартових координатах, система Mathcad дозволяє створювати двовимірні графічні об'єкти і в полярній системі координат, для чого за допомогою іконки `Polar Plot` генерується відповідний макет графічної зони. Подальші дії аналогічні до вже розглянутих.

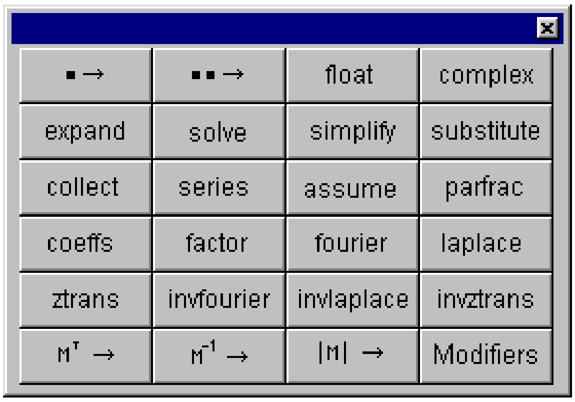
Високим ступенем наочності поданої інформації характеризуються об'єкти тривимірної графіки. Обидві системи дають можливості створення таких об'єктів, а відповідні засоби форматування забезпечують високий рівень реалістичності отриманих зображень [15].

Графічна панель інструментів системи Mathcad містить іконки для створення макетів графічних зон 3D-графіки: Surface Plot, Contour Plot, 3D Bar Plot, 3D Scatter Plot, Vector Field Plot. На відміну від двовимірної графіки, генеровані макети графічних зон мають лише один показник, замість якого слід увести змінну для побудови проекції тривимірного об'єкта на екранну площину. Таким чином можна подати, наприклад, функції двох аргументів, графіком яких, як відомо, є поверхня.

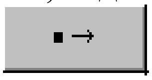
Основний спосіб зображення поверхні в системі Mathcad – це формування *матриці аплікат точок*. Якщо необхідно зобразити поверхню, утворену функцією $f(x,y)$, слід визначити інтервали значень аргументів x (абсциси) та у (ординати). Нехай маємо i значень x та j значень y. Якщо функція задається аналітичним виразом, то можна розрахувати $i \times j$ значень цієї функції і занести всі ці значення до єдиної матриці, яка має назву матриці аплікат. Засоби роботи з матрицями будуть розглянуті пізніше, зараз тільки відзначимо, що кожний елемент прямокутної матриці має подвійний індекс, що вказує його місцерозташування в конкретному рядку та стовпчику матриці. Ще один зручний засіб подання проекцій тривимірної графіки – це побудова контурних діаграм або мапи ліній однакового рівня (Contour Plot), подібно до того, як це робиться на географічних мапах.

3.2 Символьні обчислення математичних виразів в системі Mathcad.

Аналітичні ("символьні") обчислювальні засоби ППП Mathcad знаходять-ся в меню "Symbolics". Але простіше натиснути на іконку символьної палітри інструментів . Тоді з’явиться таке вікно:

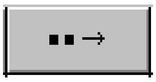


Розглянемо елементи цього вікна (позначення "*)" біля функціонального призначення оператора означає, що в разі введення цього оператору з палітри інструментів, його слід задавати з параметрами; як правило, це — змінна, до якої застосовується цей оператор; якщо ж оператор викликається з меню "Symbolics", тоді просто курсор слід поставити на цю змінну):

1. : запрошення для введення виразу, значення якого слід обчислити в аналітичному вигляді. Ця стрілочка є аналогом знаку "=" в чисельних обчисленнях. З клавіатури: "Ctrl+.". Приклад:

$\operatorname{asin}(1) \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\pi$ $\quad$ $\operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow \operatorname{atanh}\left(\frac{1}{2}\right)$

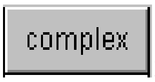
$\operatorname{asin}(1.0) \rightarrow 1.5707963267948966192$ $\quad$ $\exp(i\cdot\pi) \rightarrow -1$

2. : запрошення для введення виразу, значення якого слід обчислити в аналітичному вигляді, та аналітичного оператору, який ви хочете застосувати до цього виразу. З клавіатури: "Ctrl+Shift+.".

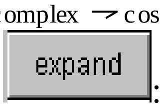
3. : оператор обчислення значення виразу з заданою кількістю знаків після децимальної коми. Приклад:

$2\cdot\operatorname{acos}(0)\ \text{float}, 15 \rightarrow 3.14159265358979$

$e\ \text{float}, 40 \rightarrow 2.718281828459045235360287471352662497$

4. : перетворення комплексних чисел з однієї форми і запису до другої. Приклад:

$e^{1i\cdot n\cdot\theta}\ \text{complex} \rightarrow \cos(n\cdot\theta) + 1i\cdot\sin(n\cdot\theta)$

5. : розкласти по степеням:

$(x+y)^4$ expands to $x^4+4\cdot x^3\cdot y+6\cdot x^2\cdot y^2+4\cdot x\cdot y^3-y^4$

$\cos(5\cdot x)$ expands to $16\cdot\cos(x)^5-20\cdot\cos(x)^3-5\cdot\cos(x)$

6. solve: розв’язати рівняння*), наприклад:

$\frac{1}{2}\cdot x^2+x-2$ has solution(s) $\begin{bmatrix} -1+i\cdot\sqrt{3} \\ -1-i\cdot\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}\cdot x^2+x-2.0$ has solution(s) $\begin{bmatrix} -1.+1.7320508075688772935 \\ -1.-1.7320508075688772935 \end{bmatrix}$

$e^x = -1$ has solution(s) $\pi\cdot i$

якщо ж курсор поставити на певну змінну в виразі, тоді розв’язок буде відносно цієї змінної:

$\frac{\alpha\cdot f+1}{f-\beta} = e^{-\alpha}$ has solution(s) $\frac{-(-1-\exp(-\alpha)\cdot\beta)}{(-\alpha+\exp(-\alpha))}$

7. simplify: спростити вираз, наприклад:

$\operatorname{asin}(1)$ simplifies to $\frac{1}{2}\cdot\pi$

$\operatorname{asin}(1.0)$ simplifies to 1.5707963267948966192

$\frac{3}{19}-\frac{47}{93}$ simplifies to $\frac{1172}{1767}$

$\frac{3}{19.0}-\frac{47}{93}$ simplifies to $.663271080928126768$

$\frac{x^2-3\cdot x-4}{x-4}+2\cdot x\quad 5$ simplifies to $3\cdot x\quad 4$

$e^{2\cdot\ln(a)}$ simplifies to a^2

$\sin(x)^2-\cos(x)^2$ simplifies to 1

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{3!}{k!\cdot 3-k!}\cdot x^k\cdot 2^{3-k} \quad \text{simplifies to} \quad 8+12\cdot x+6\cdot x^2-x^3$$

Finite geometric series:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i \quad \text{simplifies to} \quad \frac{\left[a^{(n+1)}-1\right]}{(a-1)}$$

Infinite geometric series ($|a| < 1$):

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i \quad \text{simplifies to} \quad \frac{-1}{(a-1)}$$

Maclaurin series for exponential function and sine function:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n\cdot n!} \quad \text{simplifies to} \quad \exp\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot x^{2\cdot k+1}}{7^{2\cdot k+1}\cdot 2\cdot k+1!} \quad \text{simplifies to} \quad \sin\left(\frac{1}{7}\cdot x\right)$$

8. substitute: зробити заміну (підстановку) змінної*). Для цього треба спочатку набрати на екрані вираз відносно змінної, яку ви хочете замінити, а потім помістити в буфер змінну, на яку ви хочете зробити заміну. І лише тоді визвати цей оператор. Приклади:

$x+3\cdot a$

$$z^2-\frac{2}{z} \quad \text{by substitution, yields} \quad (x+3\cdot a)^2-\frac{2}{(x+3\cdot a)}$$

$f(\sin(x))$

$$\cos(y)-\sqrt{1+y^2} \quad \text{by substitution, yields} \quad \cos(f(\sin(x)))-\sqrt{1+f(\sin(x))^2}$$

$x \quad 1$

$$x-1-\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2+\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3-\frac{1}{4}\cdot(x-1)^4+\frac{1}{5}\cdot(x-1)^5-O\left[(x-1)^6\right]$$

9. collect: привести подібні*), наприклад:

$$x^2-a\cdot y\cdot x^2+2\cdot y^2\cdot x-x \quad \text{by collecting terms, yields} \quad (1-a\cdot y)\cdot x^2-\left(2\cdot y^2-1\right)\cdot x$$

10. series: розкласти в ряд*), наприклад:

$$\sin(x) \quad \text{converts to the series} \quad x-\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{120}\cdot x^5-O\left(x^6\right)$$

$$\ln(x+1) \quad \text{converts to the series} \quad x-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{4}\cdot x^4+\frac{1}{5}\cdot x^5-O\left(x^6\right)$$

Якщо цей оператор набрати не "series, x", а "series, x, N", де замість N вказати якесь число, тоді оператор розкладе заданий вираз в ряд з N членами.

11. assume: ігнорування чисельного значення змінних, наприклад:

$$\int_a^b \cos(x)\,dx \rightarrow \sin(b) - \sin(a)$$

12. parfrac: розкладення на елементарні дроби*), наприклад:

$$\frac{2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1}{x^3 + 2 \cdot x^2 - 9 \cdot x - 18} \qquad \frac{1}{(3 \cdot (x-3))} + \frac{14}{(3 \cdot (x+3))} - \frac{3}{(x+2)}$$

$$\frac{1}{x^4 - 1} \qquad \frac{1}{(4 \cdot (x-1))} - \frac{1}{(4 \cdot (x+1))} - \frac{1}{\left[2 \cdot \left(x^2 + 1\right)\right]}$$

13. coeffs: знаходження коефіцієнтів поліному*), наприклад (в першому випадку обчислюються звичайні коефіцієнти поліному, а в другому — коефіцієнти поліному Чебишева):

$$3 \cdot b \cdot x^4 - \pi \cdot x^2 + \frac{2}{3} \cdot x - 3 \cdot a \cdot b \qquad \begin{bmatrix} -3 \cdot a \cdot b \\ \frac{2}{3} \\ -\pi \\ 0 \\ 3 \cdot b \end{bmatrix} \qquad \cos(5 \cdot \operatorname{acos}(x)) \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$$

14. factor: представлення виразу в вигляді добутку простих множників. Якщо це багаточлен, то він представляється добутком одно- чи двочленів, а якщо це число, то воно представляється добутком простих чисел, наприклад:

$$-5 \cdot x \cdot z \cdot y + 2 \cdot x \cdot z^2 - x^2 \cdot y - 2 \cdot x^2 \cdot z + 3 \cdot y^2 \cdot z + 6 \cdot y \cdot z^2 - 3 \cdot x \cdot y^2$$

by factoring, yields

$$(x + 3 \cdot y) \cdot (z - x) \cdot (2 \cdot z + y)$$

8238913765711 by factoring, yields $(73) \cdot (112861832407)$

15. fourier: застосування прямого перетворення Фур'є*), наприклад:

$\mathrm{Dirac}(t)$ has Fourier transform 1

$-\Phi(-t - c) - \Phi(-t + c)$ $\Phi(t)$ is the Heaviside step functic

has Fourier transform

$$\frac{-i}{\omega} \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot c) - \frac{i}{\omega} \cdot \exp(-i \cdot \omega \cdot c)$$

16. laplace: застосування прямого перетворення Лапласа*), наприклад:

$\exp(-a \cdot t)$ has Laplace transform $\dfrac{1}{s + a}$

$\sin(b \cdot t)$ has Laplace transform $\dfrac{b}{\left(s^2 + b^2\right)}$

17. ztrans: застосування прямого z-перетворення*), наприклад:

n has z transform $\frac{z}{(z-1)^2}$

$\sin(a \cdot n)$ has z transform $\sin(a) \cdot \frac{z}{\left(1 - 2 \cdot z \cdot \cos(a) + z^2\right)}$

18. invfourier: застосування оберненого (зворотного) перетворення Фур'є*), наприклад:

$\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot e^{-2 \cdot \omega^2}$ has inverse Fourier transform $\frac{1}{2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{8} \cdot t^2\right)$

19. invlaplace: застосування оберненого (зворотного) перетворення Лапласа*), наприклад:

$\frac{s}{s+a}$ has inverse Laplace transform $-a \cdot \exp(-a \cdot t) - \mathrm{Dirac}(t)$

$\frac{s}{s^2 + b^2}$ has inverse Laplace transform $\cos(b \cdot t)$

20. invztrans: застосування оберненого (зворотного) z-перетворення*), наприклад:

$\frac{z}{z-1}$ has inverse z transform 1

$\frac{z}{z-e}$ has inverse z transform e^n

21. $M^T \rightarrow$: обчислення транспонованої матриці, наприклад:

$\begin{bmatrix} x & 1 & a \\ -b & x^2 & -a \\ 1 & b & x^3 \end{bmatrix}$ by matrix transposition, yields $\begin{bmatrix} x & -b & 1 \\ 1 & x^2 & b \\ a & -a & x^3 \end{bmatrix}$

22. $M^{-1} \rightarrow$: обчислення оберненої матриці, наприклад:

$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$ by matrix inversion, yields $\frac{-1}{\lambda^2} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \cdot \lambda & -5+\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & 2 \cdot \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{d}{(a \cdot d - c \cdot b)} & \frac{-c}{(a \cdot d - c \cdot b)} \\ \frac{-b}{(a \cdot d - c \cdot b)} & \frac{a}{(a \cdot d - c \cdot b)} \end{bmatrix}$$

23. $|M| \rightarrow$: обчислення визначника (детермінанту) матриці, наприклад:

$$\begin{bmatrix} x & 1 & a \\ -b & x^2 & -a \\ 1 & b & x^3 \end{bmatrix} \text{ has determinant } \quad x^6 + x \cdot a \cdot b + b \cdot x^3 - a \cdot b^2 - a \quad a \cdot x^2$$

24.Оператор Symbolics\Evalute (Shift-F9) — дозволяє обчислювати значення виразу в аналітичному вигляді. Приклади:

$$\lim_{x \to 7^+} \frac{3 \cdot x + 1}{(x-7)^5} \qquad \infty$$

$$\int_1^c x^3 \, dx \qquad \text{yields} \quad \frac{1}{4} \cdot c^4 \quad \frac{1}{4} \qquad \text{Press \& for definite integr}$$

$$\int_0^\infty e^{(-x)^2} \, dx \qquad \text{yields} \quad \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}^2 \quad \text{yields} \quad \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2 \cdot \lambda + 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 + 2 \cdot \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}^3 \quad \text{yields} \quad \begin{bmatrix} \lambda^3 & 2 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot \lambda + 2 & \lambda^2 - \lambda^3 - 4 \\ 0 & 1 & -2 + 2 \cdot \lambda - 2 \cdot \lambda^2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3 \end{bmatrix}$$

25. Додатково в меню "Symbolics" є ще дві опції: "Variable\Differentiate"*) та "Variable\Integrate"*), які дозволяють знаходити аналітичне значення похідної та невизначного інтегралу, набираючи тільки вираз, до якого ці операції застосовуються (знак похідної чи інтегралу не набирається). Після цього курсор слід встановити на змінну, до якої застосовується одна з вищевказаних операцій і вибрати в меню одну з цих функцій. Наприклад:

$$2 \cdot x^2 - y \qquad \text{by differentiation, yields} \qquad 4 \cdot x$$

$$x^2 \cdot e^x \qquad \text{by integration, yields} \quad x^2 \cdot \exp(x) - 2 \cdot x \cdot \exp(x) - 2 \cdot \exp(x)$$

Взагалі, деякі з символьних операторів іноді краще та зручніше не вибирати з панелі інструментів, а вибирати їх в меню (цей спосіб також слід використовувати, якщо перший — не спрацьовує).

3.3 Обчислення елементарних і спеціальних функцій в ППП Mathcad

Оператори, що позначають основні арифметичні дії, вводяться з панелі в ППП Mathcad Calculator (Калькулятор)показаною на рис. 3.3.

- складання і віднімання: + / —;
- множення і ділення: • / * ;
- факторіал: !;
- модуль числа: |x|;
- квадратний корінь;
- корінь n-й ступеня:,
- піднесення х до ступеня у: ху ;
- зміна пріоритету: дужки;
- чисельний вивід: = (всі лістинги).

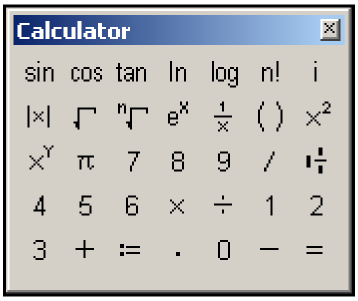


Рис. 3.3 – Панель Calculator

Обчислювальні оператори

Обчислювальні оператори вставляються в документи за допомогою панелі *Calculator*. Після натискання будь-якої кнопки панелі в документі з’являється символ відповідної математичної дії з декількома місцезаповнювачами. Кількість та розташування місцезаповнювачів визначається типом оператора і повністю відповідає їх загальноприйнятому математичному запису. Наприклад, при вставці оператора суми необхідно задати чотири величини: змінну, по якій потрібно провести сумування, нижню та верхню межі сумування, а також сам вираз, який буде розміщений під знаком суми [15].

Після введення будь-якого обчислювального оператора є можливість обчислити його значення чисельно натисканням клавіші<=>, або аналітично за допомогою оператора символьного виведення.

Логічні оператори

Результатом дії логічних операторів є тільки числа 1 (якщо логічний вираз істина) та 0 (якщо логічний вираз хибний). Логічні оператори:

1. більше x>y;
2. менше x<y;
3. більше аба дорівнює;
4. менше або дорівнює;
5. дорівнює;
6. не дорівнює;

7. і (and);
8. або (or);
9. заперечення (not).

Матричні оператори

Матричні оператори призначені для виконання дій над матрицями та векторами. Для того, щоб вставити матрицю в документ Mathcad, необхідно:

1. Натиснути кнопку **Matrix or Vector (Матрица или вектор)** на панелі **Matrix(Матрица) ,** або клавіші **<Ctrl>+<M>,** або виберіть пункт меню **Insert/Matrix (Вставка/Матрица).**
2. У вікні діалогу **Insert Matrix (Вставка матрицы)** задайте ціле число стовпців та рядків матриці, яку хочете створити.
3. Натисніть кнопку **ОК** або **Insert (Вставить)** – в результаті в документ буде вставлена заготовка матриці з визначеним числом рядків та стовпців.
4. Введіть значення в місцезаповнювачі елементів матриці. Переходити від одного елемента матриці до іншого можна за допомогою вказівника миші або клавіш із стрілками.

Оператори виразу

Обчислювальні оператори згруповані на панелі **Evaluation (Вычисления).**Це:

1. чисельне виведення (=);
2. символьне виведення ();
3. присвоєння (:=);
4. глобальне присвоєння ().

Mathcad містить велику кількість вбудованих функцій. Ми не будемо детально розглядати всі функції , а лише перерахуємо їх основні типи.

Елементарні функції

Сюди відносяться добре відомі групи стандартних функцій:

1. **Exponential and logarithmic function** (Логарифми та експонента);
2. **Complex** (Комплексні);
3. **Trigonometric** (Тригонометричні);
4. **Invers trig** (Обернені тригонометричні);
5. **Hyperbolic** (Гіперболічні);
6. **Invers hyperbolic** (Обернені гіперболічні).

Допоміжні функції

Mathcad має ряд допоміжних функцій, які в багатьох ситуаціях полегшують обчислення. Це такі:

1. **Discontinuous** (Розривні функції);
2. **Round-off-and truncation** (Скорочення та заокруглення);
3. **Sorting** (Сортування);
4. **Strings** (Рядкові;
5. **Finance functions** (Фінансові);
6. **Coordinate transform** (Перетворення координат);
7. **Conditional** (Умови);
8. **Expression type** (Типу виразу).

Спеціальні функції

В Mathcad вбудовано множину різних математичних функцій, які поповнюються від версії до версії. Спеціальні функції в **Mathcad** розбиті на декілька груп:

1. **Bessel** (Функції Бесселя);
2. **Error function and complementary error function** (Інтеграли помилок);
3. **Special function** (Решта спеціальні функції).

В системі Mathcad алгебраїчні обчислення виконуються, головним чином, аналітично. Як не дивно, але більшість користувачів **Mathcad** не дуже добре проінформовані про ці можливості, тоді як вони могли би суттєво зекономити свій час і сили, затрачені на виконання всіляких перетворень математичних виразів.

3.4 Використання матричних операцій

Операція **Matrices…**(Матриці) опції **Insert** забезпечує завдання векторів або матриць. Як правило, матриця задається своїм ім'ям-об'єктом у вигляді масиву даних. Mathcad використовує одночасно масиви – вектори і двовимірні – власне матриці.

Матриця характеризується числом рядків *Rows* та числом стовпців *Columns.* Таким чином, число елементів матриці дорівнює *Rows ´Columns*. Елементами матриць можуть бути числа, константи, змінні та навіть математичні вирази. Відповідно матриці можуть бути числовими та символьними.

Якщо активізувати операцію *Matrices…,* то в поточному вікні з'явиться невелике вікно, дозволяючи задавати число рядків і стовпців матриці. Натиснувши клавішу *Enter* або вказавши курсором миші на зображення клавіші *Insert* (Вставити) у вікні, також можна вивести шаблон матриці або вектора. Вектор – це матриця з одним стовпцем або одним рядком.

Шаблон містить обрамовуванні дужки та темні маленькі прямокутники, визначаючи місця вводу значення (числові або символьні) для елементів вектора або матриць. Один з прямокутників можна зробити активним (відмітивши його курсором мишки). При цьому він заключається у кут. Це вказує на те, що в нього буде введене значення відповідного елементу. За допомогою клавіш переміщення курсору можна, переміщуючись по всім прямокутникам, ввести всі елементи вектора або матриці.

Поки відбувається введення елементів вектора або матриці, пусті шаблони відображаються без будь-яких коментарів. Однак, якщо закінчити введення до повного заповнення шаблонів, система виведе повідомлення про помилку – незаповнений шаблон набуває червоного кольору. Відповідно вивід неіснуючих матриць або помилковий запис її індексів відображається виводом червоним кольором.

Якщо використовувати операцію *Insert* (Вставить) при вже виведеному шаблоні матриці, то матриця розширяється і її розмір збільшується. Кнопка *Delete* (Стирання) дозволяє зняти розширення матриці, викреслити з неї стовпець або рядок [16].

Кожний елемент матриці можна розглядати як значення індексованої змінної, цілочисельні значення індексів яких визначає положення елемента у матриці, а саме: перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця. Для набору індексованої змінної попередньо необхідно ввести її ім'я, а потім перейти до набору індексів натиском клавіші, що вводить символ [. Попередньо вказати індекс рядків, а потім через кому індекс стовпця.

Вироджена в один рядок або в один стовпець матриця є вектором. Нижня границя індексів задається значенням системної змінної **ORIGIN.** Як правило її значення задається рівним 0 або 1.

Векторні та матричні оператори

Для роботи з векторами і матрицями Mathcad має ряд операторів і функцій. Спочатку розглянемо оператори, ввівши такі позначення: для векторів **V,** для матриць **M,** для скалярних величин Z.

Таблиця 3.1 – Оператори для роботи з матрицями та векторами

Вираз	Введення	Призначення оператора
V1+V2	V1+V2	Додавання двох векторів
V1-V2	V1-V2	Віднімання двох векторів
-V	-V	Зміна знаку у елементів вектора
-M	- M	Зміна знаку у елементів матриці
M1*M2	M1*M2	Множення двох матриць
V/Z	V/Z	Ділення вектора на скаляр
$\mathbf{M}^{\mathbf{-1}}$	M^-1	Обернення матриці
$\mathbf{M}^{\mathbf{n}}$	M^n	Зведення матриці в степінь
$\mathbf{M}^{\langle\mathbf{n}\rangle}$	MCtrl^n	Виділення n-го елемента матриці
$\mathbf{M}_{\mathbf{m,n}}$	M[m,n]	Виділення елемента (m,n) матриці

Деякі влаштовані векторні і матричні функції системи Mathcad

Влаштовані векторні і матричні функції значно полегшують розв'язання задач лінійної алгебри, до яких зводяться математичні моделі цілого кола задач лазерної та оптоелектронної техніки. Розглянемо деякі найпоширеніші влаштовані векторні і матричні функції системи Mathcad.

- **length(V)** - повертає число елементів вектора;
- **last(V)** — повертає індекс останнього елемента;
- **max(V)** - повертає максимальний за значенням елемент;
- **min(V)** — повертає мінімальний за значенням елемент;
- **augment(M1,M2)** — об'єднує в одну матриці **M1** і **M2**, що мають рівне число рядків (об'єднання бік о бік);
- **identity(n)** — створює одиничну квадратну матрицю розміром n*n
- **stack(M1,M2)** — об'єднує дві матриці **M1** і **M2**, що мають рівне число стовпців (**M1** поміщається над**M2**);
- **diag(V)** - створює діагональну квадратну матрицю, елементи головної діагоналі якої співпадають з елементамивектора **V.**

3.5 Одно- і двомірна лінійна і сплайнова апроксимація даних

Для побудови інтерполяції-екстраполяції в Mathcad є декілька вбудованих функцій, що дозволяють "з'єднати" точки вибірки даних (x_i,y_i) кривому різному ступеню гладкості. За визначенням інтерполяція означає побудову функції A, що апроксимує залежність y(x) в проміжних точках (між x_i). Тому інтерполяцію ще по-іншому називають апроксимацією. У точках x_i значення інтерполяційної функції повинні збігатися з початковими даними, тобто $A(x_i)=y\ (x_i)$.

Лінійна інтерполяція

Найпростіший вид інтерполяції – лінійна, яка представляє шукану залежність A(X) у вигляді ламаної лінії. Інтерполююча функція A(x) складається з відрізань прямих, що сполучають точки (рис. 3.4) [17].

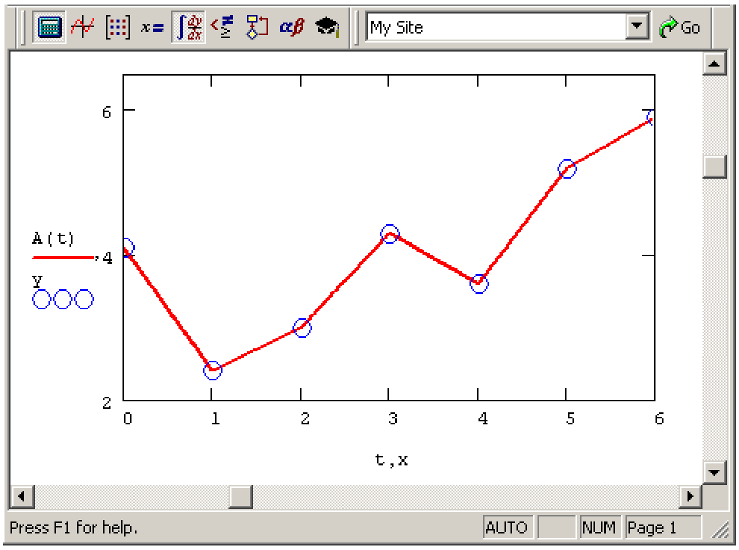


Рис. 3.4 – Лінійна інтерполяція

Для побудови лінійної інтерполяції служить вбудована функція linterp:

linterp(x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і y кусочно-лінійною залежністю:

- x — вектор дійсних даних аргументу;
- y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
- t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

```
x := (0.0  1.0  2.0  3.0  4.0  5.0  6.0)^T

y := (4.1  2.4  3.0  4.3  3.6  5.2  5.9)^T

A(t) := linterp(x, y, t)
```

Рис. 3.5 – Лістинг лінійної інтерполяцій

Як видно з лістингу (рис. 3.5), щоб здійснити лінійну інтерполяцію, треба виконати наступні дії:

1. Ввести вектори даних x і y (перші два рядки лістингу).
2. Визначити функцію linterp (x, y, t).
3. Обчислити значення цієї функції в необхідних крапках, наприклад linterp(x,y,2.4)=3.52 або linterp(x,y,6)=5.9 або побудуйте її графік.

Кубічна сплайн-інтерполяція

У більшості практичних застосувань бажано з'єднати експериментальні крапки не ламаною лінією, а гладкою кривою. Краще всього для цих цілей підходить інтерполяція кубічними сплайнами, тобто відрізками кубічних парабол:

interp(s,x,y,t) — функція, що апроксимує дані векторів x і y кубічними сплайнами:

- s — вектор других похідних, створений одній з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
- x — вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
- y — вектор дійсних даних значень того ж розміру;
- t — значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція.

Сплайн-інтерполяція в Mathcad реалізована трохи складніше лінійної. Перед застосуванням функції interp необхідно заздалегідь визначити перший з її аргументів – векторну змінну s. Робиться це за допомогою однієї з трьох вбудованих функцій тих же аргументів (x, y):

- ispline (x, y) – вектор значень коефіцієнтів лінійного сплайна;
- pspiine(x,y) – вектор значень коефіцієнтів квадратичного сплайна;
- cspline (x, y) – вектор значень коефіцієнтів кубічного сплайна:
- x, y – вектори даних.

Вибір конкретної функції коефіцієнтів сплайнів впливає на інтерполяцію поблизу кінцевих точок інтервалу (рис. 3.6).

```
x := (0.0  1.0  2.0  3.0  4.0  5.0  6.0)^T

y := (4.1  2.4  3.0  4.3  3.6  5.2  5.9)^T


s := cspline(x, y)

A(t) := interp(s, x, y, t)
```

Рис. 3.6 – Лістинг сплайнової інтерполяцій

Сенс сплайн-інтерполяції полягає в тому, що в проміжках між точками здійснюється апроксимація у вигляді залежності $A(t)=at^3+bt^2+ ct+d$. Коефіцієнти a, b з, d розраховуються незалежно для кожного проміжку, виходячи із значень у* у сусідніх крапках. Цей процес прихований від користувача, оскільки сенс завдання інтерполяції полягає у видачі значення A(t) у будь-якій точці t (рис. 3.7) [18].

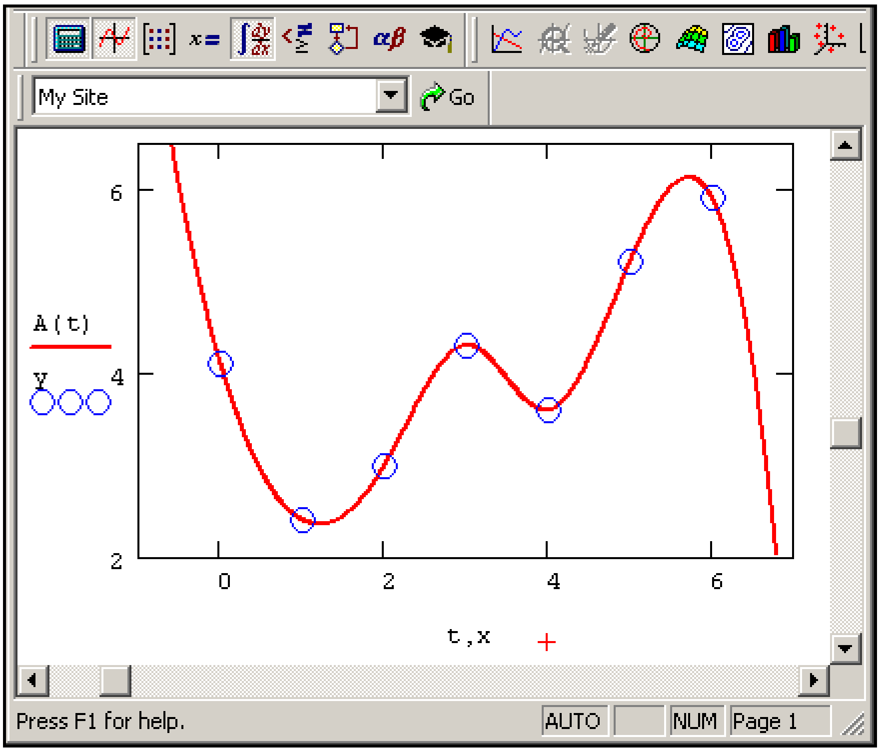


Рис. 3.7 – Сплайн-інтерполяція

Поліноміальна сплайн-інтерполяція

Складніший тип інтерполяції — так звана інтерполяція В-сплайнами. На відміну від звичайної сплайн-интерполяції, зшивання елементарних В-сплайнів проводиться не в точках x_iа в інших точках u_i координати яких пропонується ввести користувачеві. Сплайни можуть бути поліномами 1, 2 або 3 ступені (лінійні, квадратичні або кубічні). Застосовується інтерполяція В-сплайнамі точно так, як і звичайна сплайн-інтерполяція, відмінність полягає тільки у визначенні допоміжної функції коефіцієнтів сплайна [18]:

- interp(s,x,y,t) – функція, що апроксимує дані векторів x і y за допомогою В-сплайнів.
- bspiine (x,y,u,n) – вектор значень коефіцієнтів В-сплайна:

  - s – вектор других похідних, створений функцією bspline;
  - x – вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
  - y – вектор дійсних даних значень того ж розміру;
  - t – значення аргументу, при якому обчислюється інтерполююча функція;
  - u – вектор значень аргументу, в яких проводиться зшивання В-сплайнів;
  - n – порядок поліномів сплайнової інтерполяції (1, 2 або з).

Інтерполяція В-сплайнами ілюструється наступним лістингом (рис. 3.8):

```
x := (0.0  1.0  2.0  3.0  4.0  5.0  6.0)^T

y := (4.1  2.4  3.0  4.3  3.6  5.2  5.9)^T

u := (-0.5  2.2  3.3  4.1  5.5  7)^T

s := bspline(x, y, u, 2)

A(t) := interp(s, x, y, t)
```

Рис. 3.8 – Лістинг В-сплайнової-інтерполяції

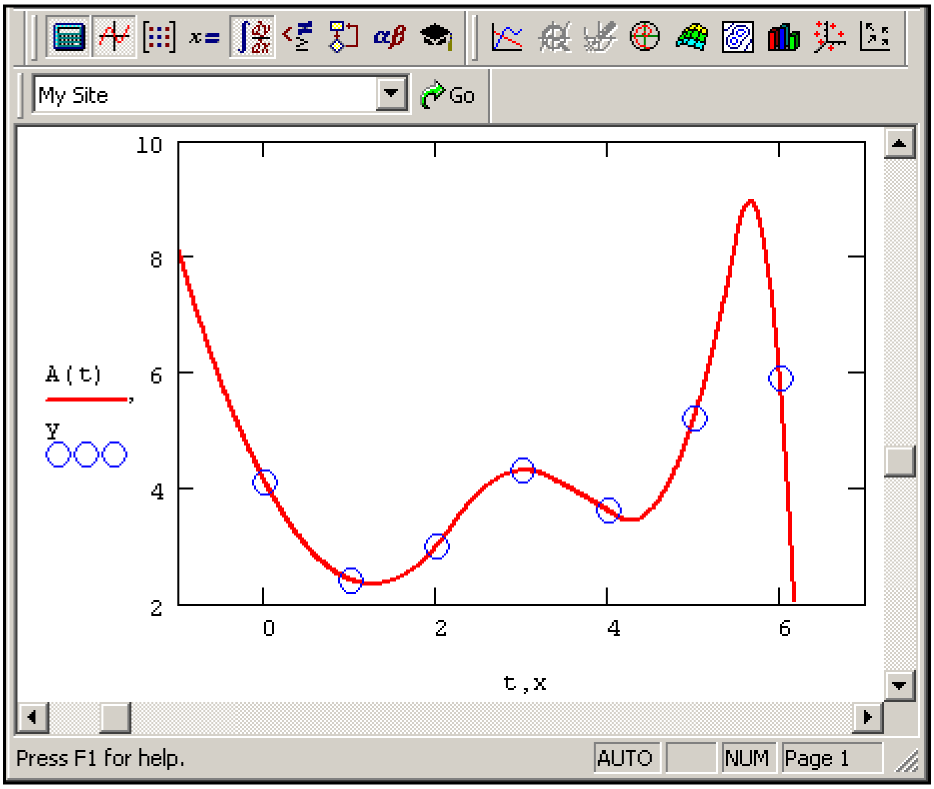


Рис. 3.9 – В-сплайн-інтерполяція

Багатовимірна інтерполяція

Двовимірна сплайн-інтерполяція приводить до побудови поверхні z (x,y) що проходить через масив точок, що описує сітку на координатній площині (x,y). Поверхня створюється ділянками двовимірних кубічних сплайнів, що є функціями (x,y) і що мають безперервні перші і другі похідні по обох координатах .

Багатовимірна інтерполяція будується за допомогою тих же вбудованих функцій, що і одновимірна, але має як аргументи не вектори, а відповідні матриці. Існує одне важливе обмеження, пов'язане з можливістю інтерполяції тільки квадратних NxN масивів даних [19]:

interp(s,x,z,v) – скалярна функція, що апроксимує дані вибірки двовимірного поля по координатах x і y кубічними сплайнами:

- s – вектор других похідних, створений одній з супутніх функцій cspline, pspline або lspline;
- x – матриця розмірності Nx2що визначає діагональ сітки значень аргументу (елементи обох стовпців відповідають міткам x і y і розташовані в порядку зростання);
- z – матриця дійсних даних розмірності NxN;
- v – вектор з двох елементів, що містить значення аргументів x і y для яких обчислюється інтерполяція.

Лістинг двовимірної інтерполяції (рис. 3.10):

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 10 \\ 2 & 20 \\ 3 & 30 \\ 4 & 40 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1.1 & 1.2 \\ 1 & 2 & 3 & 2.1 & 1.5 \\ 1.3 & 3.3 & 5 & 1.7 & 2 \\ 1.3 & 3 & 3.7 & 2.1 & 2.9 \\ 1.5 & 2 & 2.5 & 2.8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S := \mathrm{cspline}(X, Y)$$

$$V := \begin{pmatrix} 3.7 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{interp}(S, X, Y, V) = 1.636$$

$$A_{i,j} := \mathrm{interp}\left[S, X, Y, \begin{pmatrix} \frac{i}{k} \cdot 4 \\ \frac{j}{k} \cdot 40 \end{pmatrix}\right]$$

Рис. 3.9 – Лістинг двовимірної інтерполяції

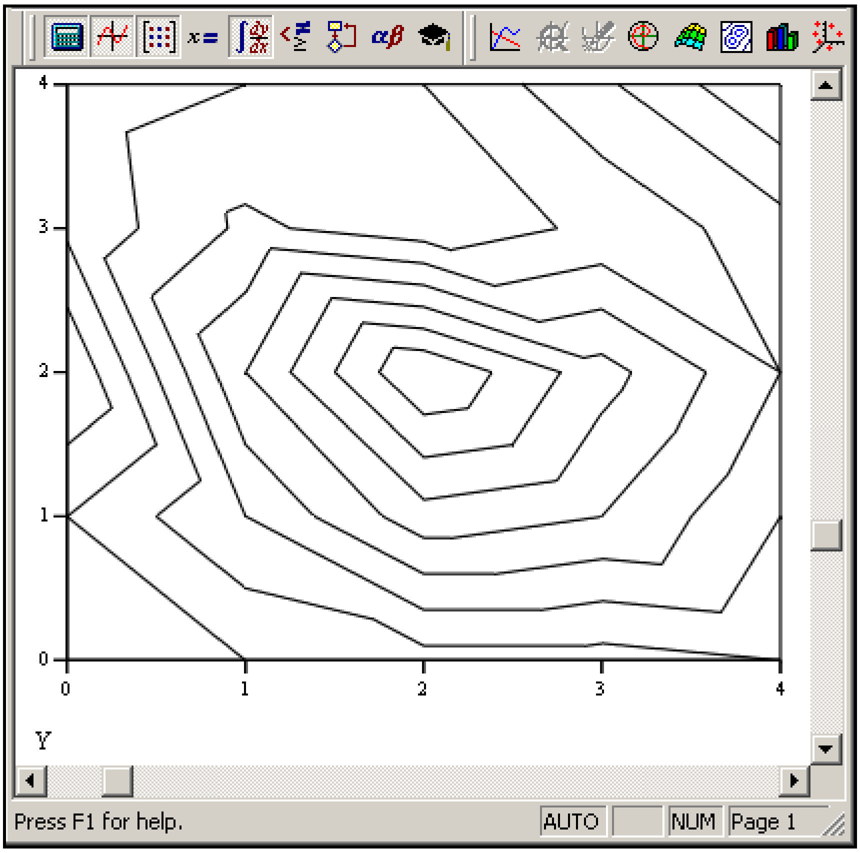


Рис. 3.10 – Початкове двовимірне поле даних

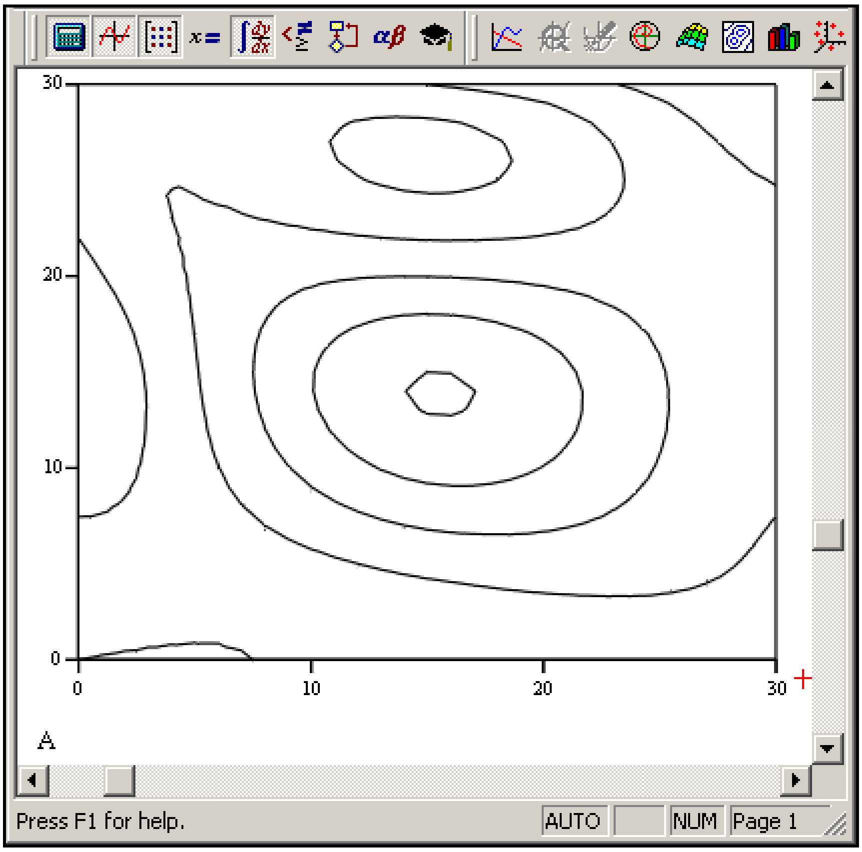


Рис. 3.11 – Результат двовимірної інтерполяції

3.6 Моделювання випадкових даних і первинна статистична обробка

Mathcad має розвинений апарат роботи із завданнями математичної статистики і обробки експерименту. По-перше є велика кількість вбудованих спеціальних функцій, що дозволяють розраховувати щільність ймовірності і інші основні характеристики основних законів розподілу випадкових величин. Разом з цим, в Mathcad запрограмована відповідна кількість генераторів псевдовипадкових чисел для нормального закону розподілу, що дозволяє ефективно проводити моделювання методами Монте-Карло. По-друге, передбачена можливість побудови гістограм і розрахунку статистичних характеристик вибірок випадкових чисел і випадкових процесів, таких як середні, дисперсії, кореляції і тому подібне. При цьому випадкові послідовності можуть як створюватися генераторами випадкових чисел, так і підключатися користувачем з файлів. По-третє є цілий арсенал засобів, направлених на інтерполяцію-екстраполяцію даних, побудову регресії по методу найменших квадратів, фільтрацію сигналів. Нарешті, реалізований ряд чисельних алгоритмів, що здійснюють розрахунок різних інтегральних перетворень, що дозволяє організувати спектральний аналіз різного типу.

Статистичні функції

У Mathcad закладена інформація про велику кількість різноманітних статистичних розподілів, що включає, з одного боку, табульовані функції ймовірності і, з іншого, можливість генерації послідовності випадкових чисел за відповідним законом розподілу. Для реалізації цих можливостей є чотири основні категорії вбудованих функцій. Їх назви є складеними і влаштовані однаковим чином: літера ідентифікує певний закон розподілу, а частина (нижче в списку функцій вона умовно позначена зірочкою), що залишилася, задає смислову частину вбудованої функції [18]:

- d* (x,par) – щільність ймовірності;
- p*(x,раг) – функція розподілу;
- q*(P,par) – квантиль розподілу;
- r* (M,par) – вектор м незалежних випадкових чисел, кожне з яких має відповідний розподіл, де
- x – значення випадкової величини (аргумент функції);
- P – значення вірогідності;
- par – список параметрів розподілу.

Щоб отримати функції, що відносяться, наприклад, до рівномірного розподілу, замість * треба поставити unif і ввести відповідний список параметрів par. Він складатиметься в даному випадку з двох чисел: a,b – між інтервалу розподілу випадкової величини.

Перерахуємо всі типи розподіли, реалізовані в Mathcad, разом з їх параметрами, цього разу позначивши зірочкою * бракуючу букву вбудованих функцій. Деякі з щільностей ймовірності показані на рис. 3.12.

- *beta (x, s1, s2) – бета-розподіл (s1, s2>0 – параметри, 0<x<1).
- *binom(к,n,p) – біноміальний розподіл (n – цілий параметр, 0<k<n і 0<p<1 – параметр, рівний вірогідності успіху одиничного випробування).

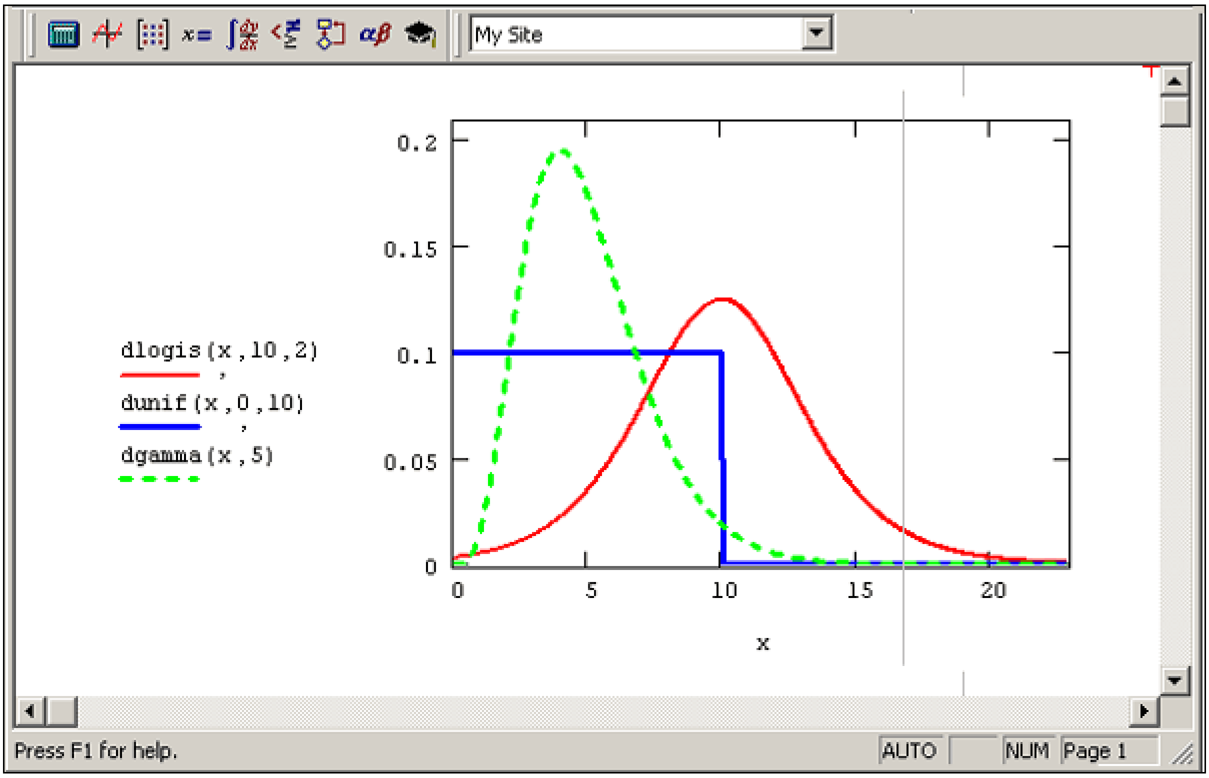


Рис. 3.12 – Щільність вірогідності деяких розподілів

- *cauchy(x,l,s) – розподіл Коші (l – параметр розкладання, s>0 – параметр масштабу);
- *chisq(x,d) – "хі-квадрат" розподіл (d>0 – число мір свободи);
- *exp(x,r) – експоненціальний розподіл (r>0 – показник експоненти);
- *F(x,d1,d2) – розподіл Фішера (d1,d2>0 – числа мір свободи);
- *gamma(x,s) – гамма-розподіл (s>0 – параметр форми);
- *geom(к,p) – геометричний розподіл (0<p<1 – параметр, рівний вірогідності успіху одиничного випробування);
- *hypergeom(к,a,b,n) – гіпергеометричний розподіл (a,b,n – цілі параметри);
- *lnorm(x,μ,d) – логарифмічно нормальний розподіл (μ – натуральний логарифм математичного очікування d>0 – натуральний логарифм середньоквадратичного відхилення);
- *logis (x,l,s) – логістичний розподіл (1 – математичне очікування, s>0 – параметр масштабу)4
- *nbinom(к,n,p) – негативний біноміальний розподіл (n>0 – цілий параметр, 0<p<1);
- *norm(x,μ,d) – нормальний розподіл (μ – середнє значення, d>0 – середньоквадратичне відхилення).
- *pois (d) – розподіл Пуассона (d>0 – параметр).
- *t (x,d) – розподіл Стьюдента (d>0 – число мір свободи).
- *unif (x,a,b) – рівномірний розподіл (a<b – границі інтервалу).
- *weibuii (x, s) – розподіл Вейбулла (s>0 – параметр).

Побудова гістограм

Гістограмою називається графік, що апроксимує за випадковими даними щільність їх розподілу. При побудові гістограми область значень випадкової величини (a,b) розбивається на деяку кількість bin сегментів (інтервалів), а потім підраховується відсоток попадання даних в кожен сегмент. Для побудови гістограм в Mathcad є декілька вбудованих функцій. Розглянемо їх, починаючи з найскладнішої по застосуванню, щоб краще знатися на можливостях кожній з функцій.

Гістограмі з довільними інтервалами

- hist (intvls,x) – вектор частоти попадання даних в інтервали гістограми:
- intvls – вектор, елементи якого задають сегменти побудови гістограми в порядку зростанняa<intvlsi<b;
- x – вектор випадкових даних.

Якщо вектор intvls має bin елементів, то і результат hist має стільки ж елементів. Побудова гістограми ілюструється наступним лістингом та рис.3.13, 3.14:

$N := 1000 \qquad bin := 30$

$x := rnorm(N, 0, 1)$

$lower := floor(min(x))$

$upper := ceil(max(x))$

$h := \dfrac{upper - lower}{bin}$

$j := 0 .. bin$

$int_j := lower + h \cdot (j + 0.5)$

$f := \dfrac{1}{N \cdot h} \cdot hist(int, x)$

Рис. 3.13 – Лістинг побудови гістограми

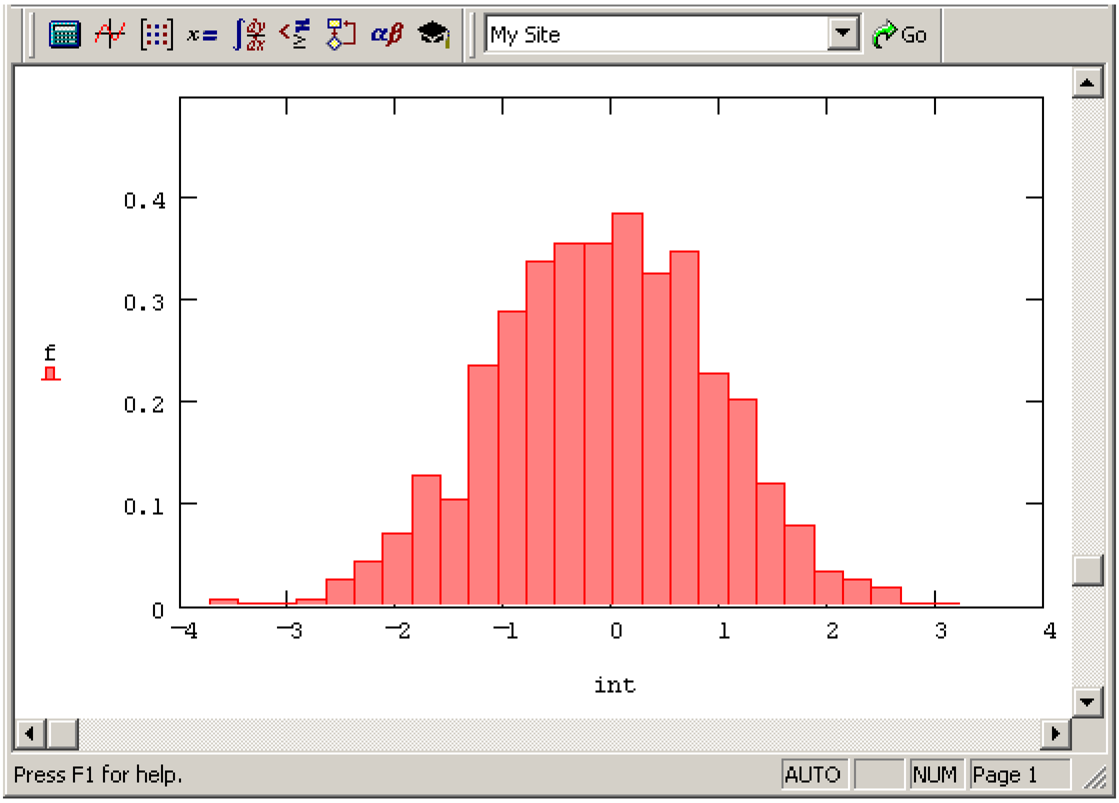


Рис. 3.14 – Побудова гістограми з довільними інтервалами

Гістограма з рівними інтервалами

Якщо немає необхідності задавати сегменти гістограми різної ширини, то зручніше скористатися спрощеним варіантом функції hist [15]:

- hist (bin, x) –вектор частоти попадання даних в інтервали гістограми:
- bin – кількість сегментів побудови гістограми;
- x – вектор випадкових даних.

Для того, щоб використовувати цей варіант функції hist замість попереднього, досить замінити перший з її аргументів в попередньому лістингу таким чином:

$$f := \frac{1}{N \cdot h} \cdot \mathrm{hist}(\mathrm{int}, x)$$

Недолік спрощеної форми функції hist у тому, що як і раніше необхідно додатково визначати вектор сегментів побудови гістограми.

Вільна функція histogram:

- histogram (bin, x) — матриця гістограми розміру binx2, що складається із стовпця сегментів розбиття і стовпця частоти попадання в них даних:
- bin — кількість сегментів побудови гістограми;
- x — вектор випадкових даних.

Приклади використання функції histogram приведені в лістингу та на рис. 3.15, 3.16:

```
N := 1000     bin := 10

x := rnorm(N, 0, 1)

f := histogram(bin, x)
```

Рис. 3.15 – Лістинг функції histogram

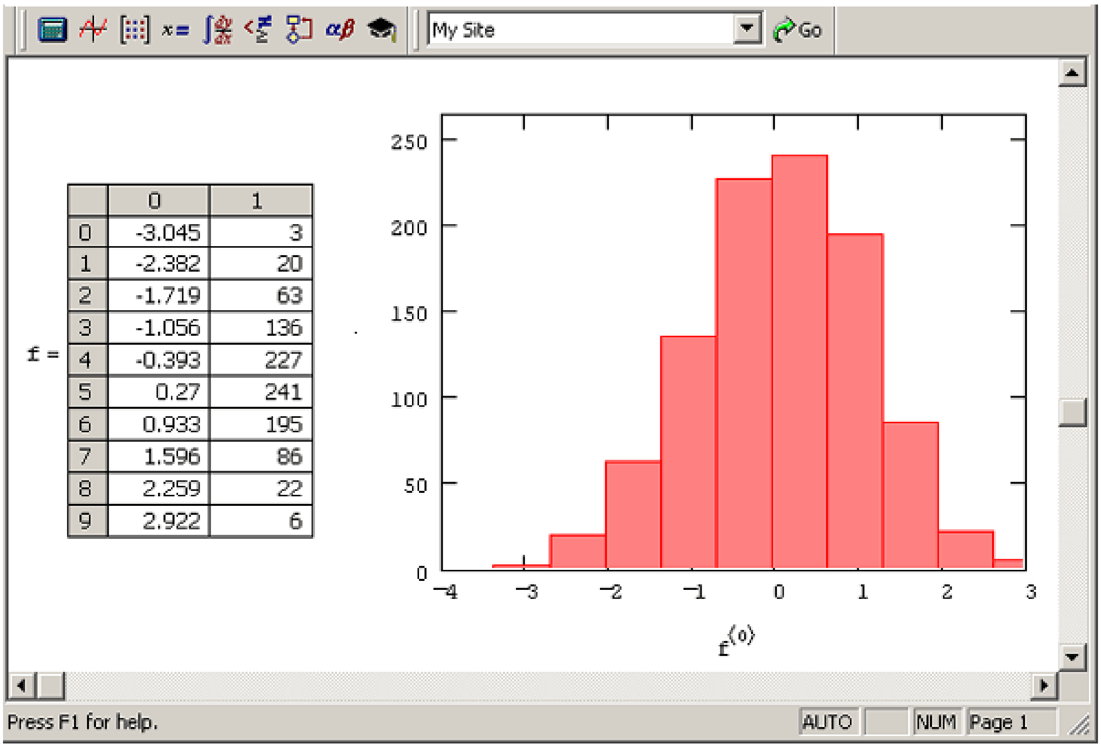


Рис. 3.16 – Графік і матриця гістограми з рівними інтервалами

Середнє і дисперсія

У Mathcad є ряд вбудованих функцій для розрахунків числових статистичних характеристик рядів випадкових даних:

- mean(x) – вибіркове середнє значення;
- median (x) – вибіркова медіана (median) — значення аргументу, яку ділить гістограму щільності вірогідності на дві рівні частини;
- var (x) – вибіркова дисперсія (variance);
- stdev(x) – середньоквадратичне (або стандартне) відхилення (standard deviation);
- max(x),min(x) – максимальне і мінімальне значення вибірки;
- mode(x) – найбільш значення вибірки, що часто зустрічається;
- var(x),stdev(x) – вибіркова дисперсія і середньоквадратичне відхилення в іншому нормуванні:
- x – вектор (або матриця) з вибіркою випадкових даних.

Приклад використання перших чотирьох функцій представлено в лістингу (рис. 3.17):

```
N := 1 × 10^3
x := runif(N, 0, 1)

m := mean(x)

median(x) = 0.478

var(x) = 0.085

stdev(x) = 0.291      √Var(x) = 0.291
```

Рис. 3.17 – Лістинг функцій для розрахунків числових статистичних характеристик рядів випадкових даних

Кореляція

Функції, що встановлюють зв'язок між парами двох випадкових векторів, називаються коваріацією і кореляцією (або, по-іншому, коефіцієнтом кореляції).

- corr(x) – коефіцієнт кореляції двох вибірок;
- cvar(x) – коваріація двох вибірок:
- x1,x2 – вектори (або матриці) однакового розміру з вибірками випадкових даних.

Представимо лістинг пошуку коефіцієнтів варіації та коваріації на рис. 3.18:

```
N := 100        σ := 1

x1 := rnorm(N, 0, σ)    m2 := mean(x2)

x2 := rnorm(N, 0, σ)    σ2 := stdev(x2)

m1 := mean(x1)

σ1 := stdev(x1)
```

$$\frac{1}{N}\cdot\sum_{i=0}^{N-1}\left[(x1_i - m1)\cdot(x2_i - m2)\right] = -0.197$$

$$\mathrm{cvar}(x1, x2) = -0.197$$

$$\frac{\mathrm{cvar}(x1, x2)}{\sigma1\cdot\sigma2} = -0.203$$

$$\mathrm{corr}(x1, x2) = -0.203$$

Рис. 3.18 – Лістинг пошуку коефіцієнту кореляції та коваріації

3.7 Регресія даних і прогнозування поведінки функціональної залежності

Регресія зводиться до підбору невідомих коефіцієнтів, що визначають аналітичну залежність f (x). Через вироблювану дію більшість завдань регресії є окремим випадком більш загальної проблеми згладжування даних. Як правило, регресія дуже ефективна, коли заздалегідь відомий (або, принаймні, добре вгадується) закон розподілу даних(x_i,y_i).

Лінійна регресія

Найпростіший і найбільш часто використовуваний вид регресії — лінійна. Наближення даних (xi,yi) здійснюється лінійною функцією y(x) = b+ax. На координатній площині (x,y) лінійна функція, як відомо, представляється прямою лінією. Ще лінійну регресію часто називають методом найменших квадратів, оскільки коефіцієнти a і b обчислюються з умови мінімізації суми квадратів помилок |b+axi-yi|.

Для розрахунку лінійної регресії в Mathcad є два дублюючий один один способу. Правила їх застосування представлені в лістингах. Результат обох лістингів виходить однаковим (рис. 3.19, 3.20):

- line (x, y) – вектор з двох елементів (b,a) коефіцієнтів лінійної регресії b+ax;
- intercept (x, y) – коефіцієнт ь лінійної регресії;
- slope (x,y) – коефіцієнт a лінійній регресії:
- x – вектор дійсних даних аргументу;
- y – вектор дійсних даних значень того ж розміру.

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$\mathrm{line}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.829 \\ 0.414 \end{pmatrix}$$

$$f(t) := \mathrm{line}(x,y)_0 + \mathrm{line}(x,y)_1 \cdot t$$

Рис. 3.19 – Лістинг розрахунку лінійної регресії

$$x := (0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T$$

$$y := (4.1\ \ 2.4\ \ 3\ \ 4.3\ \ 3.6\ \ 5.2\ \ 5.9)^T$$

$$\mathrm{intercept}(x,y) = 2.829$$

$$\mathrm{slope}(x,y) = 0.414$$

$$f(t) := \mathrm{intercept}(x,y) + \mathrm{slope}(x,y) \cdot t$$

Рис. 3.20 – Лістинг розрахунку коефіцієнтів лінійної регресії

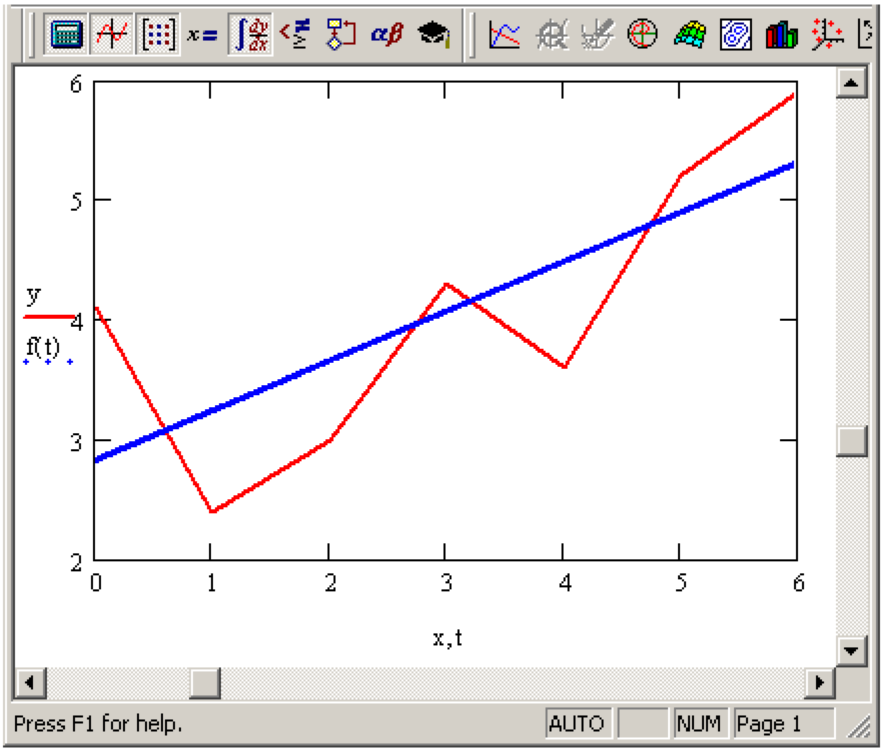


Рис. 3.21 – Графік лінійної регресії

У Mathcad є альтернативний алгоритм, що реалізовує не мінімізацію суми квадратів помилок, а медіанну лінійну регресію для розрахунку коефіцієнтів a і b:

- medfit(x,y) – вектор з двох елементів (b,a) коефіцієнтів лінійної медіанної регресії b-ax:
  - x, y – вектори дійсних даних однакового розміру.

Лістинг побудови лінійної регресії двома різними методами (рис. 3.22):

$$\mathrm{medfit}(x,y) = \begin{pmatrix} 2.517 \\ 0.55 \end{pmatrix}$$

$$g(t) := \mathrm{medfit}(x,y)_0 + \mathrm{medfit}(x,y)_1 \cdot t$$

Рис. 3.22 – Лістинг побудови лінійної регресії

Відмінність результатів середньоквадратичної і медиан-медианной регресії ілюструється на рис. 3.23.

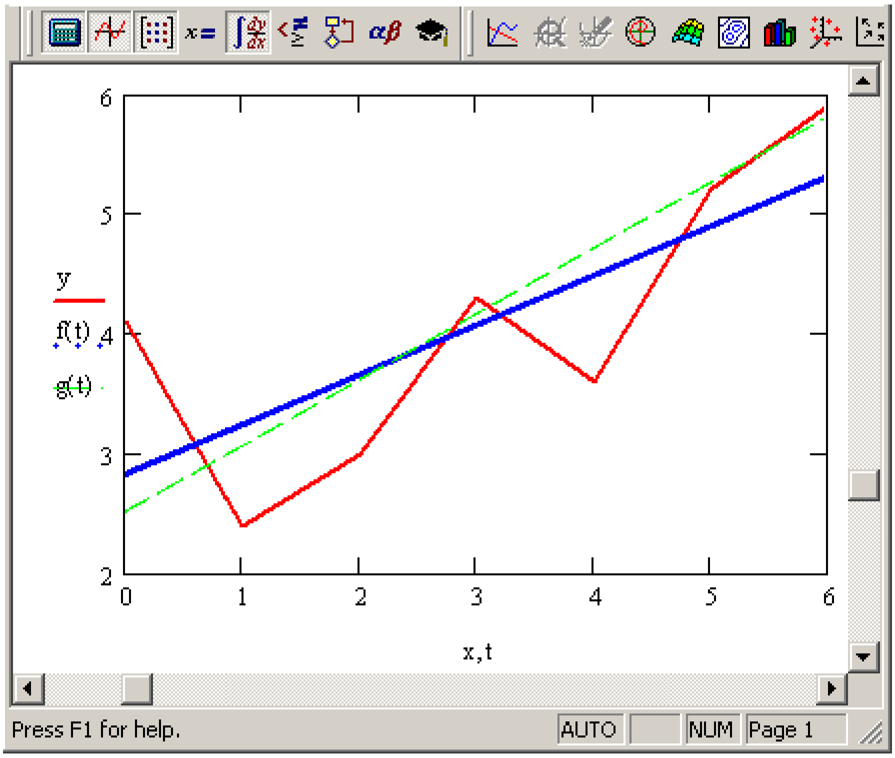


Рис. 3.23 – Лінійна регресія по методу найменших квадратів і методу медіан

Поліноміальна регресія

У Mathcad реалізована регресія одним поліномом, відрізками декількох поліномів, а також двовимірна регресія масиву даних. Поліноміальна регресія означає наближення даних (x_i,y_i) поліномом до-n ступені $A(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ $+hx^{до}$. При k=і поліном є прямою лінією, при k=2 – параболою, при k=3 – кубічною параболою і так далі. Як правило, на практиці застосовуються k<5.

У Mathcad поліноміальна регресія здійснюється комбінацією вбудованої функції regress і поліноміальній інтерполяції:

- regress (x, y,x^n) – вектор коефіцієнтів для побудови поліноміальної регресії даних;
- interp(s,x,y, t) – результат поліноміальної регресії:
- s=regress(x,y,k);
- x – вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
- y – вектор дійсних даних значень того ж розміру;
- x^k – ступінь полінома регресії (ціле позитивне число);
- t – значення аргументу полінома регресії;

Для побудови поліноміальної регресії після функції regress ви зобов'язані використовувати функцію interp. Графічне представлення регресії на рис. 3.24.

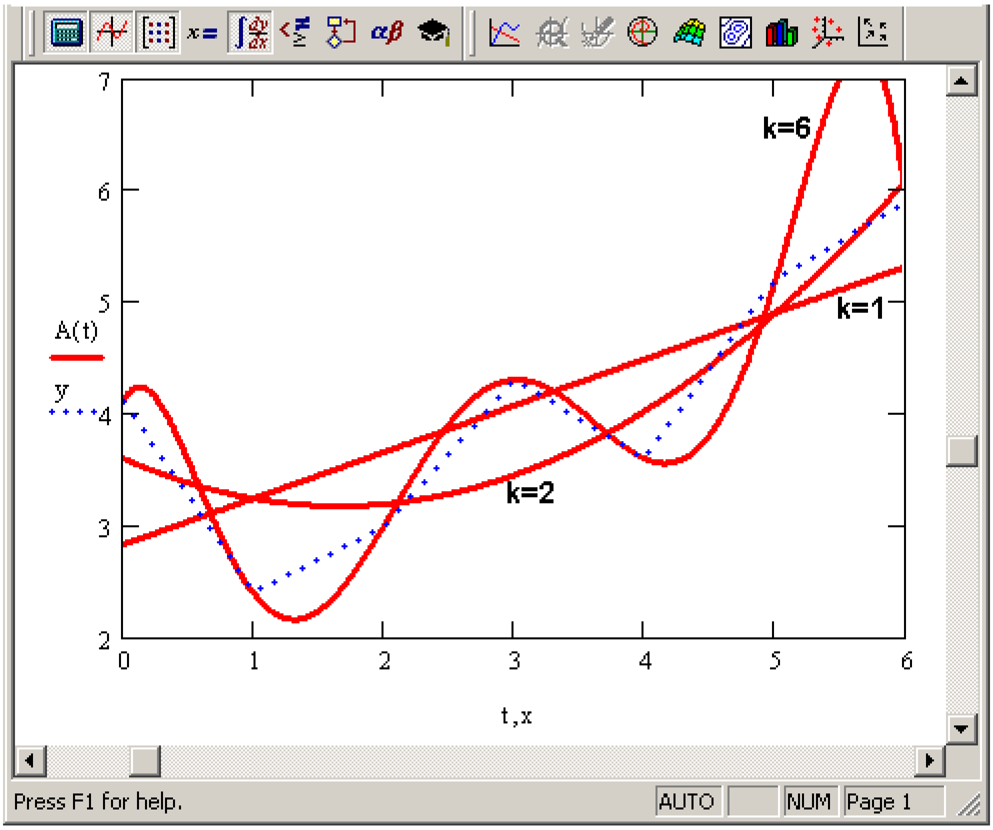


Рис. 3.24 – Регресія поліномами різного ступеня

Регресія відрізками поліномів

Окрім наближення масиву даних одним поліномом є можливість здійснити регресію зшиванням відрізань (точніше кажучи, ділянок, оскільки вони мають криволінійну форму) декількох поліномів. Для цього є вбудована функція loess застосування якої аналогічно функції regress:

- loess (x, y, span) – вектор коефіцієнтів для побудови регресії даних відрізками поліномів;
- interp(s,x,y,t) – результат поліноміальної регресії:
- s=loess(x,y,span);
- x – вектор дійсних даних аргументу, елементи якого розташовані в порядку зростання;
- y – вектор дійсних даних значень того ж розміру;
- span – параметр, що визначає розмір відрізань поліномів (позитивне число, добрі результати дає значення порядку span=0.75).

Параметр span задає ступінь згладженої даних. При великих значеннях span регресія практично не відрізняється від регресії одним поліномом (наприклад span=2 дає майже той же результат, що і наближення крапок параболою).

Лістинг регресії відрізками поліномів (рис. 3.25):

```
x := (0  1  2  3  4  5  6)^T

y := (4.1  2.4  3  4.3  3.6  5.2  5.9)^T

s := loess(x,y,0.9)

A(t) := interp(s,x,y,t)
```

Рис. 3.25 – Лістинг регресії відрізками поліномів

Інші типи регресії

Окрім розглянутих, в Mathcad вбудовано ще декілька видів трьохпараметричної регресії. Їх реалізація декілька відрізняється від приведених вище варіантів регресії тим, що для них, окрім масиву даних, потрібно задати деякі початкові значення коефіцієнтів a, b, c. Використовуйте відповідний вид регресії, якщо добре уявляєте собі, якою залежністю описується ваш масив даних. Коли тип регресії погано відображає послідовність даних, то її результат часто буває незадовільним і таким, що навіть сильно розрізняється залежно від вибору початкових значень. Кожна з функцій видає вектор уточнених параметрів a, b, c.

- expfit (x, y, g) – регресія експонентою f (x) = aebx+c.
- igsfit (x,y,g) – регресія логістичною функцією f (x)=a/ (1+be-cx).
- sinfit (x,y,g) – регресія синусоїдою f (x) =a-sin (x+b) +c.
- pwfit(x,y,g) – регресія статечною функцією f (x)=a-xb+c.
- logfit (x, y, g) –регресія логарифмічною функцією f (x)=aln(x+b) +c.
- infit (x,y) – регресія двох параметричною логарифмічною функцією f (x)=aln(x)+b.

  - x – вектор дійсних даних аргументу.
  - y – вектор дійсних значень того ж розміру.
  - g – вектор з трьох елементів, задаючий початкові значення a, b, c.

3.8 Методи розв’язку нелінійних рівнянь і систем в системі Mathcad "

Для знаходження одного кореню алгебраїчного рівняння f(x) = 0 використовується функція "root" із наперед заданим наближенням

$$x:=1 \qquad root(f(x),x) = x \tag{3.1}$$

Для розв’язання системи лінійних рівнянь типу

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1,$$
$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2,$$
$$a3 \cdot x + b3 \cdot y + c3 \cdot z = d3,$$

використовується:

<u>I спосіб)</u> блок операторів "Given-Find" з наперед заданими початковими наближеннями (див. приклад нижче);

<u>II спосіб)</u> функція “lsolve” (перша літера функції – англійська "ель"):

z:=lsolve(M,v)

де z – вектор коренів системи рівнянь;

M – квадратна матриця її коефіцієнтів;

v – вектор правих частин системи.

1. Для знаходження коренів поліному використовується функція "polyroots(a)"

$$\mathrm{an} \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{n}} + \ldots \mathrm{a1} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{a0} = 0$$

де a – це вектор коефіцієнтів поліному

$$\mathrm{a} = \begin{bmatrix} \mathrm{a0} \\ \mathrm{a1} \\ \ldots \\ \mathrm{an} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{polyroots(a)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

2. Для розв’язання нелінійної системи рівнянь використовується блок операторів "Given-Find" з наперед заданими початковими наближеннями, наприклад:

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 0$

Given

$2 \cdot x + y = 5 - 2 \cdot z^2$

$y^3 + 4 \cdot z = 4$

$x \cdot y + z = e^z$

$vec := \mathrm{Find}(x, y, z) \qquad vec = \begin{bmatrix} 1.422 \\ 0.975 \\ 0.768 \end{bmatrix}$

Рис. 3.26 – Блок операторів "Given–Find" для розв’язання нелінійної системи рівнянь

3.9 Розв'язок системи диференційних рівнянь методом Рунге-Кутта з фіксованим та адаптивним кроком

Для розв’язання звичайного диференціального рівняння в загальному випадку використовують функцію **rkfixed(x0, t0, tk, N, D)**, яка обчислює N точок диференціального рівняння з початкови ми умовами x0 в часовому інтервалі [t0, tk] з правою частиною D(t, x) методом Рунге — Кутта четвертого порядку з фіксованим кроком інтегрування. Права частина у вигляді D(t, x) утворюється, коли рівняння перетворюється до форми векторно-матричної форми. Покажемо як будь-яке диференціальне рівняння трансформується до цієї форми Коші. Нехай задано наступне рівняння:

$$\frac{d^3x}{dt^3} + T_1\frac{d^2x}{dt^2} + T_2\frac{dx}{dt} + T_3x = U,$$
$$x(0) = x0,\quad \dot{x}(0) = x1,\quad \ddot{x}(0) = x2,\ t = [0, T]. \tag{3.2}$$

Введемо заміну змінних (кількість замін дорівнює порядку рівняння – 3):

$$x_0 = x,\quad x_1 = \dot{x},\quad x_2 = \ddot{x}. \tag{3.3}$$

Тоді рівняння (1) можна переписати в вигляді:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_0\\ \dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ U - T_3\cdot x_0 - T_2\cdot x_1 - T_1\cdot x_2\end{bmatrix},\quad X0 = \begin{bmatrix}x0\\ x1\\ x2\end{bmatrix},\quad t = [0, T], \tag{3.4}$$

де похідні перших двох змінних записуються через інші змінні, а остання — знаходиться з рівняння (.2). Якщо праву частину диференціального рівняння в вигляді (3.4) представити як добуток матриці коефіцієнтів та вектору невідомих x-змінних, тоді вигляд (3.4) і перетвориться на *векторно-матричну форму*, але останнє перетворення не вимагається форматом функцій Mathcad.

Диференціальне рівняння, представлене у вигляді (3.4), розв'язується в Mathcad наступним чином:

$U := 10 \quad T1 := 10 \quad T2 := 0.5 \quad T3 := 2 \qquad x0 := 2 \quad x1 := 4 \quad x2 := 3$

$T := 10 \quad N := 50$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ U - T3\cdot x_0 - T2\cdot x_1 - T1\cdot x_2\end{pmatrix}\quad X0 := \begin{pmatrix}x0\\ x1\\ x2\end{pmatrix}\quad t0 := 0\quad tk := T\quad i := 0..N$$

Якщо рівняння розв'язується (відсутні повідомлення червоного кольору), тоді матриця Z1 містить такі стовпці:

$$Z1 = \left[t \mid x(t) \mid \dot{x}(t) \mid \ddot{x}(t)\right],$$

де перший (нульовий) стовпець містить значення незалежної змінної, а інші– значення самої змінної та її похідних (значення *фазових змінних*). Наприклад, для побудови графіків x(t) та $\dot{x}(t)$ треба ввести наступне:

$i := 0..N$

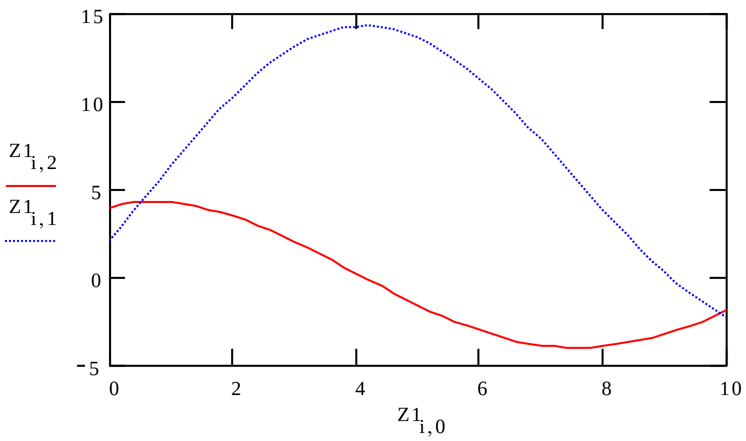


Рис. 3.27 – Приклад побудови графіка функції

1. Для розв’язання диференціальних рівнянь, про які відомо, що вони можливо мають гладкий розв’язок, використовується функція

Bulstoer(x0, t0, tk, N, D)

(перша літера назви функції — обов’язково велика!!) з такими ж параметрами, як і функція "rkfixed". Якщо відомо, що розв’язок буде гладким (не буде мати розривів першого та другого роду), тоді функція "**Bulstoer**" дасть більш точний розв’язок, ніж функція "rkfixed".

2. Для розв’язання диференціальних рівнянь, які не вдається розв’язати за допомогою функцій "Bulstoer" та "rkfixed", можна застосувати функцію

Rkadapt(x0, t0, tk, N, D)

(перша літера назви функції — обов’язково велика!!) з такими ж параметрами, як і функція "rkfixed". Функція "**Rkadapt**", як і функція "rkfixed", розв’язує диференціальне рівняння методом Рунге — Кутта 4-го порядку, але на відміну від неї — зі змінним (таким, який адаптується) кроком інтегрування [17].

Набагато простіше розв’язується диференціальне рівняння в Mathcad, починаючи з версії 2000, за допомогою операторного блоку Given–Odesolve. Для цього достатньо записати задане диференціальне рівняння чи їх систему між цими операторами. При цьому, слід дотримуватись таких правил:

1) похідні слід записувати або у вигляді x′(t) (символ “′” набирається натисненням комбінації клавіш Ctrl-F7);
2) функція, відносно якої записується дифрівняння, записується обов’язково зі своїм аргументом у дужках: x(t);
3) у блоці Given–Odesolve набирається і само рівняння, і його початкові чи граничні умови;
4) синтаксис запису функції Odesolve краще вивчити на прикладі, який є у довідковій системі Mathcad: Resource Center/Differential Equations/усі теми, де згадується абревіатура “ODE”.

3.10 Прогнозування даних

Прогноз здійснюється по одному діапазону точок на інший. Наприклад, по перших 100 точках деякого показника X якості чи стану довкілля можна з певною точністю спрогнозувати наступні 20 чи 30. Прогноз робиться таким чином. Спочатку задана крива (в нашому прикладі 100 точок) апроксимується регресійним поліномом n-го порядку, а потім в цю функцію (поліном) підставляються значення абсцис, в яких треба знайти наступні ординати (в нашому прикладі — абсциси 101, 102, … 120 чи 130) [18]. Для цього використовується функція **predict(F,n,L)**, де **F** — вектор-стовпець з набором точок (ординат) показника, що випадково змінюється; **n** — порядок інтерполюючого регресійного поліному; **L** — кількість наступних значень показника, які слід спрогнозувати. Для неваденого прикладу — це могла б бути функція **predict(X,5,20)** чи **predict(X,5,30)**.

На рис. 3.28 наведено приклад надзвичайно вдалого прогнозування (відносна похибка дорівнює 1,2%), на рис. 3.29 – відносна похибка склала вже 14,2 %, що свідчить про невдало вибрану інтерполюючу функцію чи порядок поліному.

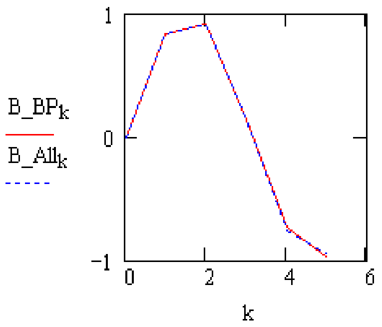
$F(x) := \sin(x) \qquad nb := 3 \qquad np := 2$

$j := 0..nb \qquad B_j := F(j) \qquad h := nb+1..np+nb$

$BP := \mathrm{predict}(B,2,np) \qquad B\_BP := \mathrm{stack}(B,BP)$

$k := 0..nb+np \qquad B\_All_k := F(k)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ 0.909 \\ 0.141 \end{pmatrix}$$



$$BP = \begin{pmatrix} -0.735 \\ -0.984 \end{pmatrix}$$

$B\_All_h =$

-0.757
-0.959

$$B\_BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ 0.909 \\ 0.141 \\ -0.735 \\ -0.984 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.28 – Приклад надзвичайно вдалого прогнозування (відносна похибка дорівнює 1,2%)

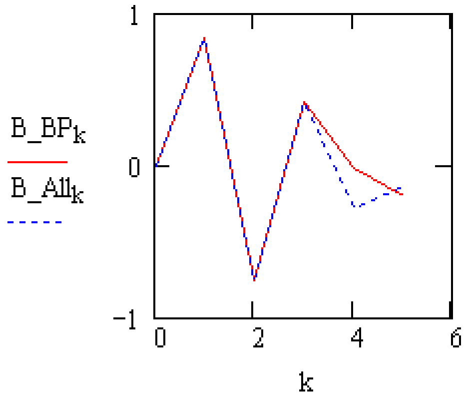
$F(x) := \sin(x^2)$ $nb := 3$ $np := 2$

$j := 0..nb$ $B_j := F(j)$ $h := nb + 1..np + nb$

$BP := \text{predict}(B, 2, np)$ $B\_BP := \text{stack}(B, BP)$

$k := 0..nb + np$ $B\_All_k := F(k)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ -0.757 \\ 0.412 \end{pmatrix}$$



$$BP = \begin{pmatrix} -0.021 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

$B\_All_h =$

-0.288
-0.132

$$B\_BP = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.841 \\ -0.757 \\ 0.412 \\ -0.021 \\ -0.21 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.29 – Приклад не дуже вдалого прогнозування (відносна похибка дорівнює 14,2%)

3.11 Програмування в середовищі Mathcad. Програмні оператори. Використання програмних блоків і системних директив

Традиційне програмування, спрощений варіант якого застосований в Mathcad і здійснюється за допомогою панелі інструментів Programming має ряд істотних переваг:

– можливість застосування циклів і умовних операторів;
– простота створення функцій і змінних, що вимагають декількох простих кроків;
– можливість створення функцій, що містять закритий для решти документа код, включаючи переваги використання локальних змінних і обробку виняткових ситуацій.

Щоб почати створення програмного модуля, слід натиснути на панелі **Programming** кнопку **Add Line** [19]. Потім, якщо приблизно відомо, скільки рядків коди міститиме програма, можна створити потрібну кількість ліній повторними натисненнями кнопки **Add Line** (рис. 3.30).

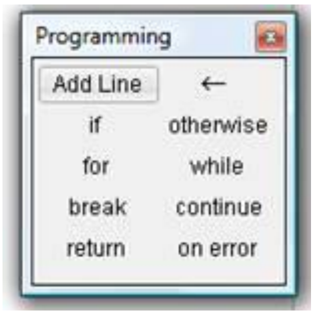


Рис. 3.30 – Панель для створення програмного модуля

Програмний модуль є функцією, описаною із застосуванням як сугубо алгоритмічних засобів (операторів), так і засобів вхідної мови Mathcad. Як і в традиційному програмуванні, при визначенні функції вказується її ім'я, список формальних параметрів (аргументів) і алгоритм обчислення значення - тіло функції. Всі змінні, які вводяться усередині модуля, включаючи формальні параметри, є локальними по відношенню до всього документа.

Нижче наведено приклад програми функції (рис. 3.31):

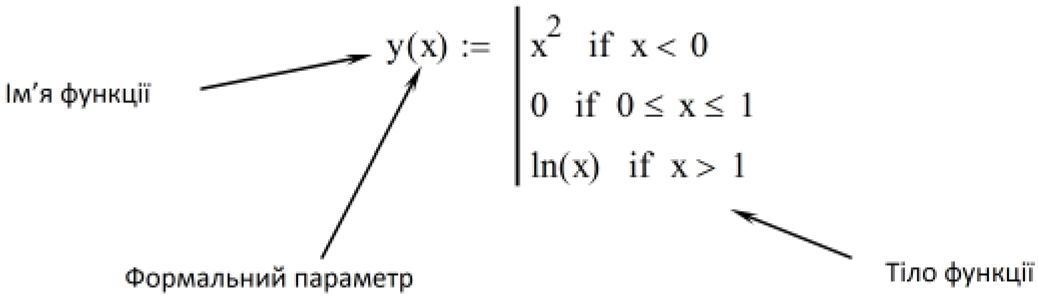


Рис. 3.31 – Приклад програми функції

Огляд програмних операторів Mathcad представлено в табл. 3.1.

Таблиця 3.1 – Програмні оператори Mathcad

Команда	Функція	Приклад
Add Line	Додати новий програмний рядок	
←	Присвоювання значення локальної змінної.	$y \leftarrow 0$
if	Умовний оператор (оператор розгалуження) if; умова повинна стояти після if, а оператор, що виконується, якщо виконано задану умову – перед if.	$f(x) := \begin{vmatrix} -x \text{ if } x < 0 \\ x \text{ otherwise} \end{vmatrix}$ $f(-3) = 3$ $f(4) = 4$
otherwise	Оператор, що задає альтернативну гілку умовного оператора. Позначає оператор, що повинен бути виконаний, якщо умова оператора if не виконується.	$f(x) := \begin{vmatrix} -x \text{ if } x < 0 \\ x \text{ otherwise} \end{vmatrix}$ $f(-3) = 3$ $f(4) = 4$

Команда	Функція	Приклад
for	Оператор цикла з параметром. За ключовим словом for слідує змінна- лічильник, а після символа приналежності вводиться проміжок зміни цієї змінної.	$Sum(n) := \left\vert \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s + i \end{array} \right.$ $Sum(4) = 10$
while	Оператор цикла с передумовою. Внутрішні оператори циклу будуть виконуватися доти, доки буде істинною умова, що слідує за ключовим словом while. Приклад показує застосування циклу для знаходження нулів функції методом дотичних Ньютона.	$N(x, f, f_x) := \text{while } \lvert f(x) \rvert > 10^{-6}$ $\quad x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f_x(x)}$ $N(2, \sin, \cos) = 3.142$
break	Опертор дострокового припинення циклу або програми. Служить для передчасного завершення циклу, щоб, наприклад, уникнути зациклення або занадто тривалих обчислень.	break if $i \ge 10$
continue	Оператор переходу до наступної ітерації. Служить для передчасного завершення поточної ітерації циклу; сам цикл при цьому триває.	continue if $x \ge 10$
retutn	Передчасне завершення програми; зазначене в комірці значення буде повернуто.	return y
on error	Оператор, що визначає значення, яке повертається у випадку виникнення помилки. Якщо при обчисленні виразу expr2 виникла помилка, обчислюється вираз expr1.	expr1 on error expr2

Контрольні питання

1) *Побудова графіків у середовищі Mathcad.*
2) *Аналіз графіків у Mathcad.*
3) *Символьні обчислення математичних виразів у Mathcad.*
4) *Обчислення елементарних функцій у ППП Mathcad.*
5) *Обчислення спеціальних функцій у ППП Mathcad.*
6) *Робота з матрицями у Mathcad.*
7) *Лінійна апроксимація у Mathcad.*
8) *Сплайнова апроксимація у Mathcad.*
9) *Статистичні функції у ППП Mathcad.*
10) *Побудова гістограма у Mathcad.*
11) *Пошук середніх значень і дисперсії у Mathcad.*

12) *Кореляційний аналіз у ППП Mathcad.*
13) *Регресійний аналіз у ППП Mathcad.*
14) *Розв'язання рівнянь і систем у ППП Mathcad.*
15) *Розв'язання диференційних рівнянь у ППП Mathcad.*
16) *Прогнозування даних у Mathcad.*
17) *Програмування у ППП Mathcad.*

Література

1) Мокін В.Б. Інформаційна технологія інтегрування математичних моделей у геоінформаційні системи моніторингу поверхневих вод : монографія / В. Б.Мокін, Є. М Крижановський, М. П. Боцула. — Вінниця : ВНТУ, 2011 — 152 с.
2) Петрук В. Г. Основи науково-дослідної роботи. Навчальний посібник / Петрук В. Г., Володарський Є. Т., Мокін В. Б.; під ред. В. Г. Петрука. — Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. — 144 с.
3) Петрук В. Г. Методологія та організація наукових досліджень (в екології): підручник / [Клименко М. О., Петрук В. Г., Мокін В. Б. та ін.] . – Херсон: Олді-плюс, 2012. – 474 с.
4) Веденеева Е. А. Технологія синтезу геоінформаційної моделі розподіленої системи за математичними моделями процесів у ній / Е. А. Веденеева. – Санкт Петербург: Питер, 2008. – 384 с.
5) Пащенко И. Г. Excel 2007. Шаг за шагом. / И. Г. Пащенко. – Москва: Эксмо, 2009. – 496 с.
6) Додж М. Эффективная работа: Microsoft Office Excel 2003 / М. Додж, К. Стинсон. – СПб.: Питер, 2005. – 1088 с.
7) Кулешова О. В. Microsoft Excel 2010. Расширенные возможности. Решение практических задач / О. В. Кулешова. – Москва: Центр Компьютерного Обучения "Специалист", 2012. – 91 с.
8) Голышева А. В. Excel 2007 "без воды". Все, что нужно для уверенной работы / А. В. Голышева, В. Н. Корнеев. – СПб: Наука и Техника, 2008. – 192 с.
9) Федько В. В. Табличний процесор MS Excel 2003. Навчально-практичний посібник / В. В. Федько, В. І. Плоткін. – Харків: ХНЕУ, 2008. – 176 с.
10) Юдін В. І. Основи роботи в Microsoft Excel XP. Навчальний посібник. / В. І. Юдін, В. С. Рижиков, В. В. Ровенська. – Київ: Центр учбової літератури, 2007. – 272 с.
11) Джон Уокенбах. Microsoft Office Excel 2007. Библия пользователя / Джон Уокенбах., 2008. – 811 с.
12) Серогодский В. В. Excel 2003. Эффективный самоучитель / В. В. Серогодский. – СПб: Наука и техника, 2007. – 401 с.
13) Харвей Грег Excel 2003 для "чайников". Полный справочник. / Харвей Грег. – Москва: Издательский дом "Вильяме", 2005. – 688 с.
14) Михалевич В. М. Математичне програмування разом з Maple. Частина І. Методи розв'язання задач лінійного програмування. Навчальний посібник. / В. М. Михалевич. – Вінниця: ВНТУ, 2008. – 158 с.
15) Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 11. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 560 с.
16) Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 13. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

17) Охорзин В. А. Прикладная математика в системе MATHCAD Учебное пособие / В. А. Охорзина. – СПб: Лань, 2009. – 352 с.
18) Макаров Е. Инженерные расчёты в Mathcad 15: Учебный курс / Е. Макаров. – СПб: Питер, 2011. – 400 с.
19) Берков Н. А. Математический практикум с применением пакета Mathcad: Учебное пособие / Н. А. Берков, Н. Н. Елисеева. – Москва: МГИУ, 2006. – 135 с.
20) Савотченко С. Е. Методы решения математических задач в Maple: Учебное пособие / С. Е. Савотченко, Т. Г. Кузьмичева. – Белгород: Белаудит, 2001. – 116 с.

Навчальне видання

Крижановський Євгеній Миколайович
Мокін Віталій Борисович
Горячев Георгій Володимирович
Варчук Ілона Вячеславівна

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ КОМП'ЮТЕРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Електронний навчальний посібник

Оригінал-макет підготовлено Є. М. Крижановським

Редактор Є. М. Крижановський

Вінницький національний технічний університет,
Навчально-методичний відділ ВНТУ, 21021,
м. Вінниця, Хмельницьке шосе, 95,
ВНТУ, к. 2201, тел. (0432) 59-87-36.