International Science Group
ISG-KONF.COM

PROSPECTIVE DIRECTIONS OF SCIENTIFIC RESEARCH IN ENGINEERING AND AGRICULTURE

Collective monograph

ISBN 979-8-88862-820-1
DOI 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.1
BOSTON(USA)-2023

ISBN – 979-8-88862-820-1
DOI – 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.1

Prospective directions of scientific research in engineering and agriculture

Collective monograph

Boston 2023

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

ISBN – 979-8-88862-820-1
DOI – 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.1

Authors – Hladyshev D., Hnat H., Lemeshev M., Bereziuk O., Stadnijtschuk M., Василенко О., Єрмакова С., Танірвердієв А., Вовк Л., Денисова А., Вечірко В., Нікульшин В., Височин В., Андрющенко А., Altukhova T., Kuzmin D., Tkachenko M., Nikolaienko A., Сачанюк-Кавецька Н., Кириченко О.С., Hlovyn N., Pavliv O., Saiko V., Narytnyk T., Kryvolapov Y., Ковшар В., Калюжний М., Задонський О., Галкин С., Үмбетова М., Үмбетов Ә., Бернацький А., Сіора О., Лукашенко В., Шамсутдінова Н., Сіора І., Пімонов І., Шевченко В., Fialko N., Navrodska R., Shevchuk S., Gnedash G., Kovalenko T., Matiko H., Рубель А., Кураєва А., Вискуб Р., Вінюков О., Бондарева О., Коробова О., Чугрій Г., Завгородній М., Дерев'янко Н., Кобець О., Яковлєва-Носарь С., Бойко Т., Котовська Ю., Kuzmin O., Stukalska N., Fomenko A., Raiskyi M., Dudarev I., Shevchenko O., Khareba V., Khareba O., Kuzmin O., Pavliuchenko O. Vatrenko O., Kyrylov V., Gavva O. Гончарова І., Хохлов А.

REVIEWER

Ivan Katerynchuk – Doctor of Technical Sciences, Professor, Honoured Worker of Education of Ukraine, Laureate of the State Prize of Ukraine in Science and Technology, Professor of the Department of Telecommunication and Information Systems of Bohdan Khmelnytskyi National Academy of the State Border Guard Service of Ukraine.

Kostiantyn Dolia – Doctor of Engineering, Department of automobile and transport infrastructure, National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute".

Published by Primedia eLaunch
https://primediaelaunch.com/

3.2	Kuzmin D.[1], Tkachenko M.[2], Nikolaienko A.[2] VISUALIZATION AND ANALYSIS OF SORTING ALGORITHMS [1] Faculty of Information Technology, Taras Shevchenko National University of Kyiv [2] Department of Software Systems and Technologies, Taras Shevchenko National University of Kyiv	74
3.3	Martsenyuk V.[1], Sverstyuk A.[2], Andrushchak I.[3], Matviiv Y.[3], Rechun O.[3] ENSURING INFORMATION SECURITY BASIC COMPONENTS OF ACCESS CONTROL [1] University of Bielsko-Biala [2] I. Horbachevsky Ternopil National Medical University [3] Lutsk National Technical University	82
3.4	Сачанюк-Кавецька Н.[1] ЧАСОВА ЗМІННА В ЛОГІЧНИХ ФУНКЦІЯХ [1] кафедра вищої математики, Вінницький національний технічний університет	91
4.	ELECTRICAL ENGINEERING	
4.1	Кириченко О.С.[1] ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНІ МОДУЛІ ЕЛЕКТРООБЛАДНАННЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТУ [1] Кафедра електрообладнання та автоматики водного транспорту, Київський інститут водного транспорту імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного Державного університету інфраструктури та технологій	121
5.	GENERAL AGRICULTURE	
5.1	Hlovyn N.[1], Pavliv O.[1] ECOLOGICAL ASPECTS OF THE ANALYSIS OF THE ACTIVITY OF THE ORGANIC FORM ENTERPRISE OF THE EASTERN OPILLIA [1] National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine “Berezhany Agrotechnical Institute”	164
6.	INNOVATIVE TECHNOLOGIES	
6.1	Saiko V.[1], Narytnyk T.[2], Kryvolapov Y.[1] METHOD AND ALGORITHMS OF CONSTRUCTION OF HIGH-RELIABILITY TERAHERTZ CHANNEL INFRASTRUCTURE FOR 5G MOBILE COMMUNICATION SYSTEMS [1] Deprt. of Applied Information Systems, Taras Shevchenko National University of Kyiv [2] Institute of Electronics and Communication of the Ukrainian Academy of Sciences	175

DOI: 10.46299/ISG.2023.MONO.TECH.1.3.4

3.4 Часова змінна в логічних функціях

Історія обчислювальних пристроїв доводить, що їх розвиток базується на необхідності прискорення обчислень та на розширені функціональних властивостей цих пристроїв [125, 126]. Використання методів математичного моделювання та комп'ютерного розв'язування інженерних та наукових задач дозволяє значно підвищити ефективність процесів проектування, розпізнавання, обробки та управління. Математичне комп'ютерне моделювання стало головним засобом дослідження складних динамічних процесів і систем.

Сьогоднішні комп'ютери по своїй суті універсальні, за винятком тих, що призначені для управління якимись технологічними процесами в широкому розумінні цього слова. Ця універсальність потребує спеціальних алгоритмів для вирішення конкретних задач. Часто алгоритми не повністю враховують особливості зміни процесів у часі, що приводить до помилок в прогнозуванні їх майбутнього розвитку. Для усунення подібних недоліків потрібен математичний апарат, що описує поведінку взаємозв'язаних процесів у часі.

Тривалий час розробка обчислювальних пристроїв базувалась на інтуїції і лише в сорокових роках минулого століття в роботах К. Шенона, А. Накашіми та В.І. Шестакова [127] були об'єднані алгебра Буля, двійкова система числення та принципові схеми, що привело до можливості побудови, аналізу і моделювання логічних схем незалежно від фізичних принципів їх роботи. Для цього потрібно амплітуду неперервно змінного сигналу замінити декількома фіксованими рівнями, а неперервний час замінити на дискретний з одиничним інтервалом, протягом якого всі величини незмінні.

На рівні обчислювальних пристроїв в цілому час, як правило, є критерієм для впорядкування послідовності операцій (програм) над даними і носить неявний характер. Навпаки, на рівні конкретних вузлів, час враховується у явному вигляді, забезпечуючи правильну роботу цифрового вузла і представлений на рівні тактів чи синхроімпульсів.

Для комп'ютерної обробки в реальному часі аналоговий сигнал має бути перетворений в цифрову форму шляхом його дискретизації по часі і квантування k рівнями по амплітуді (де k>1). Тоді цифровий сигнал визначається квантованою амплітудою вибірки $x(k, i\Delta)$, де k – число рівнів квантування [128] та функцією дискретного часу $i\Delta$, де Δ - інтервал дискретизації (не обов'язково рівномірний), i=*1, 2, 3, …* – номер відліку (вибірки) (рис. 1).

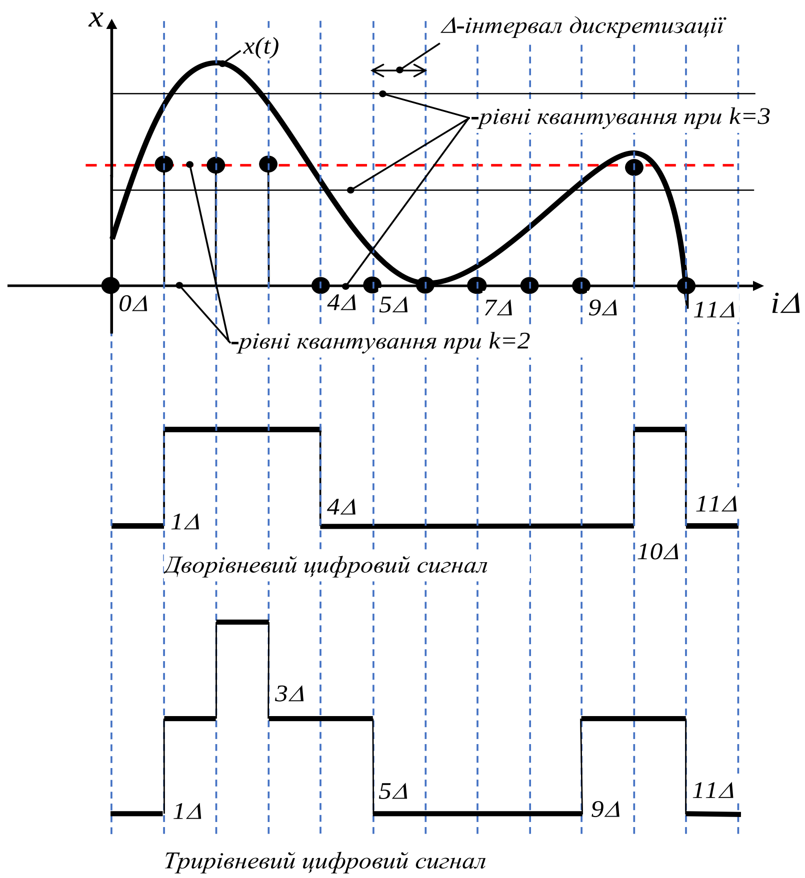


Рисунок 1. Квантування та дискретизація сигналу

Відмітимо, що графічне представлення цифрового сигналу є досить наочним. Воно дозволяє людині виконувати якусь попередню обробку, типу порівняння і т.п., але не дає можливості робити глибоку його обробку комп'ютерними методами.

Для цього достатньо відійти від фізичних параметрів носія сигналу, як то напруги чи струму та представити сигнал, що має фіксоване число рівнів квантування у вигляді набору логічних значень у відповідні дискретні значення часу. Тобто, у вигляді набору нулів та одиниць, або в більш загальному сенсі, у вигляді набору чисел (слів).

Тоді для нашого дворівневого (рис. 1) сигналу маємо 011100000010, а у випадку трирівневого сигналу – 012110000110. Дискретний час тут замінено номером позиції квантованого значення амплітуди в отриманому слові.

Звичайно, в такому варіанті наочність зникає, але з'являється можливість використання комп'ютерної обробки. Остання, як правило, сьогодні виконується по наперед заданих алгоритмах. Створення нових алгоритмів є результатом аналітичної обробки людиною вихідних сигналів і даних отриманих в результаті комп'ютерного аналізу.

Аналітична обробка цифрових сигналів в графічному чи в чисто цифровому представленні практично дещо обмежена. Уявляється доцільною ідея заміни довільного цифрового сигналу (змінної), що змінюється в часі, якоюсь часовою логічною функцією, що може бути представлена, наприклад, поліномом. Це дає можливість полегшити попередню аналітичну обробку цифрових сигналів та змінних, використовуючи властивості таких часових функцій.

Найбільш ранні теоретичні роботи по моделюванню цифрової техніки, що базуються на ідеях К. Шенона, А. Накашіми та В.І. Шестакова почали активно розвиватись після Другої світової війни особливо в 60 роках XX століття, коли обчислювальні пристрої будувались з використанням реле.

Робота Гаврилова М.А. 1950 року «Теорія релейно-контактних схем» була першою, що об'єднала теорію і практику, аналіз і синтез тодішніх цифрових пристроїв. Саме Гаврилов М. А. в своїй роботі розробив метод оцінки впливу часу спрацювання релейно-контактних схем на перехідні процеси, шляхом використання трійкової логіки (0, ½, 1).

Теорія часових логічних функцій Базилевського Ю. Л.

Цим же періодом датуються роботи по теоретичному осмисленню часу, як логічної змінної. Однією з перших і фундаментальних робіт була робота 1958 року Базилевського Ю. Л. [129] «Питання теорії часових логічних функцій».

В роботі розглядається поведінка двійкових логічних змінних $\alpha, \beta, \ldots$ в дискретному часі. Змінні позначаються $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ldots$ і можуть приймати значення «0» або «1». Індекси змінних $t, t-k$ та інші вказують на моменти часу, для якого беруться числові значення змінних, t – поточний час.

Далі вводяться елементарні операції часового зсуву (затримки) $D^k\alpha$, інверсії $\bar{\alpha}$ та кон'юнкції $\alpha \wedge \beta$:

$$
\begin{aligned}
&D^k\alpha \approx \left\{\forall t : \dot{D}^k\alpha_t = \dot{\alpha}_{t-k}\right\},\\
&\bar{\alpha} \approx \left\{\forall t : \dot{\bar{\alpha}} = 1 - \dot{\alpha}_t\right\},\\
&\alpha \wedge \beta \approx \left\{\forall t : \left(\alpha_t \wedge \beta_t\right)^{\cdot} = \dot{\alpha}_t \wedge \dot{\beta}_t\right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Елементарні операції мають такі властивості:

$$
\begin{aligned}
&1)\ D^0\alpha \equiv \alpha; \qquad 2)\ D^m D^k\alpha \equiv D^{m+k}\alpha;\\
&3)\ \bar{D}^k\alpha \equiv D^k\bar{\alpha}; \quad 4)\ D^k\left(\alpha \wedge \beta\right) \equiv D^k\alpha \wedge D^k\beta.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Якщо функція $f\left(\alpha, \beta, \ldots\right)$ створена шляхом застосування до аргументів $\alpha, \beta, \ldots$ скінченної послідовності введених операцій $\left(D^k, \neg, \wedge, \vee, \oplus\right)$, то

$$
\forall k : \vdash\ D^k f\left(\alpha, \beta, \ldots\right) \equiv f\left(D^k\alpha, D^k\beta, \ldots\right),
\tag{3}
$$

де «$\vdash$» квантор виведення, «таке, що виводиться».

Функція $f(\alpha, \beta, \ldots)$ називається *продукуючою* функцією, якщо вона не містить операцій часового зсуву, в протилежному випадку дана функція – часова логічна функція.

Базилевським Ю. Л. було введено поняття слова або багатомісної змінної

$$X \approx \mathop{\mathit{\Gamma}}_{i=0}^{n-1} x_i,$$

як сукупності упорядкованої множини одномісних аргументів x_i,

де знак $\mathit{\Gamma}$ – сукупність, довжини $n = iX$.

Елементарні операції над словами типу еквівалентність, інверсія (заперечення), перетин і циклічний зсув P_0^k за визначенням виконуються за формулами (4).

$$\begin{aligned}
&(Z \equiv X) \approx \{\mathsf{B}(0 \le i \le n-1) : z_i \square x_i\} \\
&(Z \equiv \overline{X}) \approx \{\mathsf{B}(0 \le i \le n-1) : z_i \square \overline{x}_i\} \\
&(Z \equiv X \cap Y) \approx \{\mathsf{B}(0 \le i \le n-1) : z_i \square x_i \wedge y_i\} \\
&(Z \equiv P_0^k X) \approx \{\mathsf{B}(k > 0) \wedge \mathsf{B}(0 \le i \le n-1) : z_{i+k(\mathrm{mod}\, n)} \square x_i\}
\end{aligned} \qquad (4)$$

Властивості операцій $\neg, \cap, \cup$ над словами аналогічні операціям $\neg, \wedge, \vee$ над одномісними змінними:

$$\begin{aligned}
&P_0^k X \equiv X; \quad P_0^m P_0^k X \equiv P_0^{m+k} X; \\
&\overline{P}_0^k X \equiv P_0^k \overline{X}; \quad P_0^k (X \cap Y) \equiv P_0^k X \cap P_0^k Y;
\end{aligned} \qquad (5)$$

Якщо довжина слова $lX = n$, то $P_0^k X$ при $k \ge n$ тотожно рівне

$$P_0^k X \equiv P_0^{k(\mathrm{mod}\, n)} X. \qquad (6)$$

Лінійні властивості операції зсуву над словами виражаються лемою:

$$\forall k : \vdash \; P_0^k F\left(F, B, \ldots\right) \equiv F\left(P_0^k A, P_0^k B, \ldots\right) \tag{7}$$

Далі автор в своїй роботі вводить *продукуючі оператори* для побудови продукуючої функції. Наприклад, продукуюча функція від n аргументів x_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ може бути описана з допомогою операторів, що утворюються із слів X по A довжиною n:

$$Q^{\wedge}\left(A, X\right) \approx \bigwedge_{i=0}^{n-1}\left[\left(x_i \wedge a_i\right) \vee \left(\overline{x}_i \wedge \overline{a}_i\right)\right] \tag{8}$$

Тут $Q^{\wedge}\left(A, X\right)$ кон'юнктивний член (терм) ступеня n від X по A. Фактично, кон'юнктивний терм відбирає ті позиції вхідних змінних (з запереченням або без), на яких вхідні змінні рівні i-тим елементам слова A.

Тепер для утворення продукуючих поліномів в досконалій диз'юнктивній нормальній формі використаємо утворююче слово B довжини 2^n та визначимо оператор

$$R^{\vee}\left(B, X\right) \approx \bigvee_{j=0}^{2^n-1}\left[b_j \wedge Q^{\wedge}\left(A_j, X\right)\right], \quad \dot{A}_j = j \tag{9}$$

де $R^{\vee}\left(B, X\right)$ диз'юнктивний член (терм) ступеня n від X по B;

A_j, $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, зв'язане слово довжини $lA_j = lX$, що пробігає всі значення від $\dot{A}_0 = 00\ldots0$ до $\dot{A}_{2^n-1} = 11\ldots1$;

слово B визначає ті терми, які входять в даний поліном і задає значення самої функції.

Нехай одномісна змінна x пробігає в часі послідовність $t-m+1,\ t-m+2, \ldots,\ t$. Для побудови часових функцій вводяться оператори:

$$T^{\wedge}\left(A, D^0 x\right) \approx \bigwedge_{i=0}^{m-1}\left[\left(D^0 x \wedge a_i\right) \vee \left(D^0 \overline{x} \wedge \overline{a}_i\right)\right], \qquad (10)$$

де A – слово довжиною m;

$T^{\wedge}\left(A, D^0 x\right)$ – кон'юнктивний член (терм) m від $D^0 x$ по A. В першоджерелі було наведено властивості цих термів.

Визначення термів можна узагальнити, якщо прийняти в якості аргументів не $D^0 x$, а $D^k x$, наприклад

$$T^{\wedge}\left(A, D^k x\right) \approx \bigwedge_{i=k}^{k+m-1}\left[\left(D^k x \wedge a_{i-k}\right) \vee \left(D^k \overline{x} \wedge \overline{a}_{i-k}\right)\right]. \qquad (10)$$

Часові поліноми від $D^0 x$ можна побудувати, використовуючи продукуюче слово B довжиною 2^m та оператор для диз'юнктивної досконалої нормальної форми від $D^0 x$ по B.

$$R^{\vee}\left(B, D^0 x\right) \approx \bigvee_{j=0}^{2^m-1}\left[\left(b_j \wedge T^{\wedge}\left(A_j, D^0 x\right)\right)\right], \quad A_j = j \qquad (11)$$

де A_j – зв'язане змінне слово.

В своїй роботі Базилевський Ю. Л. вводить деяку продукуючу функцію $\varphi\left(X\right)$, що задовольняє такі умови:

а) функція приймає значення c_o при комбінації значень аргументів, що визначаються словом B_0;

б) функція приймає значення c_1 при комбінації значень аргументів, що визначаються словом B_1;

с) комбінація значень аргументів, що (немає місця) ніколи не наступають для даної функції, визначається словом $B_н$.

Тому $\overline{B}_н$ визначає допустимі значення для X :

$$B_{0н} = B_0 \cap \bar{B}_н;$$
$$B_{1н} = B_1 \cap \bar{B}_н.$$

Значення φ залишаються невизначеними при значеннях X , що визначаються наступним словом:

$$B^* = \overline{B_{0н} \cup B_{1н}} \equiv \left(\bar{B}_0 \cap \bar{B}_1\right) \cup B_н. \qquad (12)$$

Якщо B^* має k різних розрядів $\dot{b}_j = 1$, то многочлен $R^{\vee}\left(B^*, X\right)$ включає множину k кон'юнктивних термів, з яких можна скласти 2^k різних підмножин.

Позначимо продукуюче слово для підмножин (12) через B_s^*, $s = 1, 2, \ldots, 2^k$. Очевидно $B_s^* \cup B^* = B^*$, $B_s^* \cap B^* = B_s^*$ тоді $\varphi_s = R^{\vee}\left(B_s, X\right)$.

Розглядаючи рівняння типу

$$F\left(\alpha, \varphi\right) = F\left(\alpha,\ D^1\alpha, \ldots, D^{m-1}\alpha, \varphi, D^1\varphi, \ldots, D^{m-1}\varphi\right) = c_0 \qquad (13)$$

Автор розглядає способи розв'язування та умови існування розв'язку таких часових рівнянь:

$$\varphi_j = R^{\vee}\left(B_j^0, X_1\right). \qquad (14)$$

Також можна розглядати властивості періодичних часових функцій.

Зауваження 1. Автор розглядає лише деякий клас логічних (булевих) функцій (формул), що містять $D^k x$ і вважає їх часовими логічними функціями. Насправді, будь-яка логічна змінна, що змінюється в часі є часовою функцією.

Зауваження 2. В роботі вважається (2), що оператор D для всіх змінних має одну і ту розмірність, наприклад, k. Тобто, не врахований варіант можливих операції над часовими змінними типу $D^k x \wedge D^h y$ і не розглядається значення «мінус» k.

Зауваження 3. В формулі (13) не враховано в розмірі продукуючого слова B варіанти значень одномісної змінної x та послідовний перебіг часу. Відповідно, у більш загальному випадку довжина слова B рівна $2^n \cdot m$, де n число змінних.

Зауваження 4. Базилевський Ю. Л. вважав свою роботу «Теорією часових логічних функцій» і вона дозволяє досліджувати найбільш загальні властивості таких функцій та може використовуватись для моделювання роботи цифрових вузлів.

Зауваження 5. Використання операторів в цій теорії робить її надто абстрактною і гальмує її широке використання.

Часові логічні функції Поспєлова Д. А.

Через два роки після виходу статті Базилевського Ю. Л. в 1960 році Поспєлов Д. А. публікує статтю [130], в якій розглядається функція від аргументів

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, t, \tag{15}$$

де $x_i \left(i = 1, 2, \ldots, n\right)$ можуть приймати значення лише «0» або «1»;

t довільне цілочисельне значення від 0 до $s - 1$.

Функцію, що визначена на наборах (15) і яка приймає на цих наборах значення 0 або 1 було названо часовою булевою функцією.

Число різних наборів виду (15) при фіксованому n дорівнює

$$s \cdot 2^n \tag{16}$$

Таку функцію можна задавати таблицею (див. табл. 1), що не дуже практично через її громіздкість.

Таблиця 1.

Можливі значення часової булевої функції Поспєлова

x_1	x_2	t	$\varphi(x_1,x_2,t)$	x_1	x_2	t	$\varphi(x_1,x_2,t)$
0	0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	0
$0 \le t \le 1$							

Більш зручно часову булеву функцію можна записати так:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n, t), \quad 0 \le t \le s-1. \tag{17}$$

Якщо тепер надати t деякого фіксованого значення $t = k,$ де $(0 \le k \le s-1)$, то функція набуває вигляду:

$$y_k = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{18}$$

Функція виду (18) це вже звичайна функція алгебри логіки. Якщо t пробігатиме послідовно всі допустимі значення, отримаємо s функцій:

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \dots, \quad \varphi_{s-1} \tag{19}$$

Тобто, для будь-якої часової логічної функції можна отримати відповідну їй послідовність функцій алгебри логіки. Для наведеної функції (табл. 1) матимемо:

$$\varphi_0 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1 x_2 = 1;$$
$$\varphi_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = \bar{x}_1.$$

Було введено функцію τ_α, що визначається співвідношенням

$$\tau_\alpha = \begin{cases} 0, & t \neq \alpha \\ 1, & t = \alpha \end{cases} \quad (0 \le \alpha \le s-1) \tag{20}$$

Для всякого $s-1$ мають місце рівності:

$$\mathop{\vee}_{i=o}^{s-1} \tau_i = 1, \qquad \mathop{\vee}_{i \neq j} \tau_i \tau_j = 0, \tag{21}$$

суть яких полягає в тому, що в момент часу $t = \alpha$ функція τ_α дорівнює 1, а всі решта $\tau_i \left(i \neq \alpha\right)$ в цей момент часу дорівнюють 0.

З врахуванням співвідношення (20) всяку часову логічну функцію можна записати у вигляді:

$$\varphi\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \varphi_0\tau_0 \vee \varphi_1\tau_1 \vee \ldots \vee \varphi_{s-1}\tau_{s-1} \tag{22}$$

Маємо зручний аналітичний запис часової логічної функції. Для функції, заданої табл. 1 $\varphi\left(x_1, x_2, t\right) = \tau_0 \vee \bar{x}_1\tau_1$.

Однією з найголовніших проблем алгебро-логічного методу синтезу схем є проблема мінімізації функцій виду (22). Для вирішення цієї проблеми для часових булевих функцій, що не повністю визначені можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів або не повну мінімізацію.

Зауваження 6. Робота Поспєлова Д. А. носить прикладний характер і направлена в першу чергу на практичне використання.

Зауваження 7. Викладені вище підходи не дають аналітичної відповіді на знаходження результатів операцій типу $x(t) * y(t)$, де «*» – будь-яка логічна операція.

Зауваження 8. Табличне представлення часової функції, що має дві змінних і часовий інтервал більший $s = 10$ стає громіздким. А мінімізація шляхом невизначених коефіцієнтів також не вселяє оптимізму.

Зауваження 9. Всі змінні в роботі Д. А. Поспєлова незалежні від часу. Дискретний час використовується в функціях від цих змінних.

Векторно-перемикаючі функції Рабіновича З. Л.

Подальший розвиток часових логічних функцій вимагав апарату для виконання операцій над ними.

В 1965 році Рабинович З. Л. запропонував модель часових перемикаючих функцій, яку він назвав векторно-перемикаючими функціями (ВПФ) [131, 132]. В основу ВПФ покладені звичайні перемикаючі (логічні) функції, що дозволило зберегти та використовувати методи перетворення булевих функцій.

Головною перевагою ВПФ є відображення фактору часу у перемикаючих функціях. Для цього використовуються наступні засоби:

- локалізація в часі логічних величин шляхом присвоювання їм відрізків існування;
- введення спеціальних операцій для перетворення вказаних відрізків;
- представлення функцій від різночасових аргументів.

Дані засоби є достатніми для досягнення поставленої мети – використання системами алгебраїчних виразів для опису схем цифрових автоматів та процесів їх функціювання.

Всім логічним величинам надаються відрізки існування, які позначаються координатами t_i при аргументах. Ці відрізки ототожнюються із тривалостями інформаційних сигналів, що відображують логічні величини. Поза цими відрізками довільна величина може бути лише константою. Функція F визначається на області, яка містить відрізки існування усіх її аргументів.

Наприклад, $F = F(x_{t_1 \dots t_2}, y_{t_1 \dots t_2, t_5 \dots t_6}, z_{t_3 \dots t_4}, u_{t_5 \dots t_7, t_8 \dots t_9})$, де відрізки існування значень однієї і тієї ж змінної (x, y, z, u) обов'язково не перетинаються і ці значення мають бути незалежними, причому індекси часових координат можуть бути виразами. Кожному набору значень аргументу відповідає вектор значень функцій, розташованих вздовж певного відрізку часу. Цей відрізок називається *відрізком існування функції*. Відмітимо, що відрізок існування може співпадати з періодом визначення функції (для нашого прикладу $t_1 \dots t_9$), але не може початись раніш ніж t_1. Кожне значення функції може залежати лише від тих аргументів, відрізки існування яких починаються не пізніше за відрізок існування даного значення аргументу.

Алгебра ВПФ містить операції двох класів: логічні, що зберігають час існування аргументів (аналогічні булевим) та спеціальні, які змінюють часові координати аргументів. До основних *операцій першого класу* відносяться:

диз'юнкція

$$x_{t_1 \dots t_2} \vee y_{t_3 \dots t_4} = 0 \rightarrow (x)_{(\tau_x)} \rightarrow (x \vee y)_{(\tau_{x,y})} \rightarrow (y)_{(\tau_y)} \rightarrow 0; \qquad (23)$$

кон'юнкція

$$x_{t_1 \dots t_2} y_{t_3 \dots t_4} = 0 \rightarrow (xy)_{(\tau_{x,y})} \rightarrow 0; \qquad (24)$$

інверсія

$$\bar{x}_{t_1 \dots t_2} = 1 \rightarrow (\bar{x})_{(\tau_x)} \rightarrow 1. \qquad (25)$$

Для опису ВПФ використовується особливий запис у вигляді послідовностей їх виразів, що є справедливими лише на певних відрізках часу. В дужках записані значення функцій за допомогою булевих функцій та часові відрізки існування цих функцій τ_x та τ_y, на протязі яких x та y існують окремо, $\tau_{x,y}$ - часовий відрізок сумісного існування аргументів x та y.

Для операцій даного класу справедливі всі тотожності, аналогічні тотожностям перемикаючих функцій. Окрім цього, мають місце тотожності ВПФ, справедливі для перемикаючих функцій лише на деяких підмножинах наборів аргументів.

Наприклад, $x_{t_1} y_{t_1} \vee z_{t_2} u_{t_2} = (x_{t_1} \vee z_{t_2})(y_{t_1} \vee u_{t_2})$, де для спрощення запису позначені лише початкові часові координати змінних за умовою рівності та відсутності перетинів відрізків їх існування. Якщо, ігноруючи часові координати, вважати даний запис булевим, то ця тотожність є справедливою для всіх наборів, окрім тих, що містять попарні одиничні значення x та u або z та y. Але, враховуючи операцію інверсії, попарне існування саме цих значень аргументів неможливе. Тобто тотожність справедлива.

Операції другого класу необхідні для утворення функцій від змінних, які зображуються різночасовими сигналами і є засобами зсуву в часі та запам’ятовування значень сигналів. До основних операцій другого класу відносяться:

затримка (на час τ)

$$\underset{\to\tau}{x_{t_1 \ldots t_2}} = 0 \to (x)_{(t_1+\tau)\ldots(t_2+\tau)}; \tag{26}$$

статичне запам’ятовування

$$L = (x_{t_1 \ldots t_2}, y_{t_3 \ldots t_4}) = 0 \to \begin{cases} (x)_{t_1 \ldots [t > t_4]}, \text{ якщо } y_{t_3 \ldots t_4} = 0 \\ (x)_{t_1 \ldots t_3}, \text{ якщо } y_{t_3 \ldots t_4} = 1 \end{cases} \tag{27}$$

динамічне запам’ятовування (з періодом τ)

$$L(x_{t_1\ldots t_2}, y_{t_3\ldots t_4}) = 0 \to (x)_{[t_1+k\tau]\ldots[t_2+k\tau]}, \tag{28}$$

де $k = \begin{cases} 1,2,\ldots,\ якщо\ y_{t_3\ldots t_4} = 0 \\ 1,2,\ldots,\left[\dfrac{t_3}{\tau}\right],\ якщо\ y_{t_3\ldots t_4} = 1,\ \tau > t_2 - t_1 \end{cases};$

додавання та статичне запам’ятовування

$$L(x_{[t<t_1]\ldots t_2} \oplus y_{t_1\ldots t_2}) = (x)_{[t<t_1]\ldots t_2} \to \underset{\text{mod } 2}{(x+y)_{t_2\ldots[t>t_2]}}; \tag{29}$$

додавання та динамічне запам’ятовування (з періодом τ)

$$L_\tau(x_{[t<t_1]\ldots t_2} \oplus y_{t_1\ldots t_2}) = (x)_{[t<t_1]\ldots t_2} \to \underset{\text{mod } 2}{(x+y)_{[t_1+k\tau]\ldots[t_2+k\tau]}},\ k = 1,2,3,\ldots,t > t_2 - t_1. \tag{30}$$

Операція затримки є одномісною. Це означає, що зсув відрізку існування аргументу (тобто інформаційного сигналу) відбувається без зміни його тривалості. Решта операцій двомісні. Операції статичного та динамічного запам’ятовування не мають властивості комутативності. Операція статичного запам’ятовування збільшує кінцеву часову координату аргументу на час, який залежить від другого аргументу. Операція динамічного запам’ятовування є періодичним зсувом (повтором із заданим періодом) відрізку існування першого аргументу з циклічністю, яка залежить від другого аргументу. Операція додавання та статичного запам’ятовування реалізується як додавання по модулю два попередньо зафіксованого аргументу з новоприбулим та статичне запам’ятовування результату, причому початкова часова координата кінцевого стану співпадає з кінцевою часовою координатою другого аргументу. Така властивість зумовлює одноразову дію другого аргументу на результат незалежно від тривалості відрізку існування.

Зауваження 10. Недоліком розглянутого способу є врахування фактору часу без зв'язку значень аргументів функції з періодом існування аргументу.

Зауваження 11. В апараті ВПФ відрізок існування аргументу – це тривалість інформаційного сигналу, яка не визначає тривалість цього аргументу.

Зауваження 12. Апарат ВПФ розглядає всі змінні і операції над ними як такі, що відбуваються в часі без якихось виключень і умов та є досить абстрактним в порівнянні з ідеями Поспєлова Д. А.

Часові логічні функції Д. Бохмана

Роботи Поспєлова Д. А. і Рабіновича З. Л. в основному задовольняли нагальні практичні потреби, але не завжди. Оскільки часові логічні функції є функціями часу, то має бути і їх диференціал, похідна та первісна по часі, щоб існувала можливість аналізу зміни таких функцій.

В роботі [133] для цього введена змінна dx, що названа диференціалом змінної x. Вона описує зміну змінної по заданому значенні x та значенню dx із співвідношення $x^* = x \oplus dx$. При цьому $dx = 1$ описує факт зміни x, а $dx = 0$ описує незмінність значення x.

Диференціал визначається формулою:

$$dx = x \oplus x^*. \tag{31}$$

Аналогічно, з іншого боку, пропонується взяти за основну – часову координату, тоді можна записати $t^* = t + dt$ і відповідно, для загального випадку, маємо диференціал по часі від $z(t)$:

$$d_t z(t) = z(t) \oplus z(t + dt). \tag{32}$$

При $dt = \Delta = 1$ отримаємо

$$d_t z(t) = z(t) \oplus z(t+\Delta) = z(t) \oplus z(t+1)\,. \tag{33}$$

Введено також просту однократну похідну по часі:

$$\frac{dz(t)}{dt} = d_t z(t)\Big|_{dt=1} = z(t) \oplus z(t+1) = z'(t) \tag{34}$$

Окрім того, в роботі Д. Бохмана викладені деякі властивості похідної та введено поняття інтегралу: всяка функція $g(t)$ для якої $\frac{dg(t)}{dt} = x(t)$ називається інтегралом і записується

$$g(t) = \int x(t)dt\ . \tag{35}$$

Зауваження 13. Д. Бохман так само як і Ю. Базилевський вважав, що час для всіх змінних один і той самий (однаковий, синхронний).

Логіко-часові функції Кожем'яко В. П.

Подальший розвиток апарат ВПФ отримав в роботах Кожем'яко В. П. 1984-1990 років [134-136]. Тут він відмовляється від терміну часові логічні (перемикаючі) функції і використовує термін «Логіко-часові функції» (ЛЧФ). На думку автора, в контексті функцій, що розглядаються, основою є логічна функція, що змінюється в часі і термін «логіко-часові функції» більш доцільний, ніж термін часові логічні функції.

Відмітимо, що в логіко-часових середовищах всім величинам надаються часові інтервали існування T_i, які ототожнюються з тривалістю інформаційних сигналів. ЛЧФ враховують не тільки фактор часу, а й той факт, що значення аргументів функції визначаються періодом існування аргументу T_i. Оскільки мова йде про логіко-часову функцію, то в даному випадку зберігаються властивості логічних функцій та операцій над ними і з'являється можливість введення нових, спеціальних операцій.

Моменти початку часових інтервалів існування називаються *часовими координатами змінних* і позначають – t_i, а тривалість проміжку існування позначають через T_i.

Наприклад, елементарна ЛЧФ, область визначення якої складається лише з одного відрізка існування має вигляд:

$$f(t,t_1,T_1)=\begin{cases}(t-t_1)=1, & \text{якщо } t_1<t\le t_1+T_1\\ 0, & \text{якщо } t_1+T_1<t\le t_1\end{cases}, \tag{36}$$

де t – поточне значення параметра.

До основних логіко-часових операцій відносяться:

-логіко-часова диз'юнкція (ЛЧД):

$$\begin{aligned}&f_1(t,t_1,T_1)\vee f_2(t,t_2,T_2)\vee\ldots\vee f_n(t,t_n,T_n)=\\&=\begin{cases}t-t_1,\ \text{якщо}\ t_1\le t\le\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2),\ldots\\ \ldots,t_n+f_n(t_n+T_n,t_n,T_n))\\ \\ 0,\ \text{якщо}\ t_1>t>\max(t_1+f_1(t_1+T_1,t_1,T_1),t_2+f_2(t_2+T_2,t_2,T_2),\ldots\\ \ldots,t_n+f_n(t_n+T_n,t_n,T_n))\end{cases}\end{aligned} \tag{37}$$

Інакше кажучи ЛЧД – ЛЧФ така, що:

$$f_1(t,t_1,T_1)\vee f_2(t,t_2,T_2)\vee\ldots\vee f_n(t,t_n,T_n)=\max(f_1(t,t_1,T_1),f_2(t,t_2,T_2),\ldots,f_n(t,t_n,T_n)) \tag{38}$$

-логіко-часова кон'юнкція (ЛЧК)

$f_1(t,t_1,T_1)\wedge f_2(t,t_2,T_2)\wedge\ldots\wedge f_n(t,t_n,T_n)=$

$$
= \begin{cases} t - t_n,\ \textit{якщо}\ \ t_n \le t \le \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2), \ldots \\ \ldots, f_n(t_n + T_n, t_n, T_n)) \\ \\ 0,\ \textit{якщо}\ \ t_n > t > \min(t_1 + f_1(t_1 + T_1, t_1, T_1), t_2 + f_2(t_2 + T_2, t_2, T_2), \ldots \\ \ldots, f_n(t_n + T_n, t_n, T_n)) \end{cases} \tag{39}
$$

Звідси ЛЧК – мінімум ЛЧФ:

$$
f_1(t, t_1, T_1) \wedge f_2(t, t_2, T_2) \wedge \ldots \wedge f_n(t, t_n, T_n) = \min(f_1(t, t_1, T_1), f_2(t, t_2, T_2), \ldots, f_n(t, t_n, T_n)).
$$

Операції ЛЧД та ЛЧК – це є операції порівняння, оскільки ЛЧД – це виділення максимального значення ЛЧФ, а ЛЧК – мінімального значення ЛЧФ. Очевидно, що виділення максимального та мінімального значень ЛЧФ є операціями логіко-часового порівняння.

Операція зсуву визначається як:

$$
f(t - k, t_1, T_1) = \begin{cases} t - k - t_1,\ \textit{якщо}\ t_1 < t - k \le t_1 + T_1, \\ 0,\ \textit{якщо}\ t_1 \ge t - k > t_1 + T_1 \end{cases} \tag{40}
$$

та відповідна операція затримки визначається:

$$
f(t, t_1 + \tau, T_1) = \begin{cases} t - (t_1 + \tau),\ \textit{якщо}\ t_1 + \tau < t \le t_1 + \tau + T_1 \\ 0,\ \textit{якщо}\ t_1 + \tau \ge t > t_1 + \tau + T \end{cases} \tag{41}
$$

Подальший розвиток алгебри ЛЧФ зроблено автором в роботах [137, 138] та введено поняття ЛЧФ k-значної логіки і досліджено деякі її властивості.

Зауваження 14. Недоліком апарату ЛЧФ є його громіздкість і мала наочність.

Зауваження 15. Апарат ЛЧФ Кожем'яко В. П. не враховує дискретність часу. Дана робота є спробою об'єднати викладені вище підходи , запропонувавши новий апарат (алгебру) роботи з ЛЧФ.

Аналітична обробка цифрових сигналів в графічному чи в чисто цифровому представлені практично дещо обмежена. Уявляється доцільною ідея заміни довільного цифрового сигналу (змінної), що змінюється в часі, якоюсь часовою логічною функцією, що може бути представлена, наприклад, поліномом. Це дає можливість полегшити попередню аналітичну обробку цифрових сигналів та змінних, використовуючи властивості таких функцій. Тому актуальною буде розробка математичного апарату, який в простій і доступній формі дозволить здійснювати аналітичну обробку цифрових сигналів, що змінюються в часі та здійснювати прогнозування змін параметрів сигналів суто засобами математики [139, 140].

Подальший розвиток алгебра логіко-часових функцій набула в роботах автора [137]. Логіко-часовими функціями (ЛЧФ) будемо називати такі логічні k-значні $(k \geq 2)$ функції, які змінюються в дискретному часі і можуть набувати одне із значень від 0 до k-1 на кожному Δ-інтервалі, що входить до якогось фіксованого кінцевого часового інтервалу існування змінних, за межами цього інтервалу функція дорівнює нулю. При $k > 2$ – k-значну функцію будемо називати логіко-часовою функцією багатозначної логіки (БЛЧФ). Моменти початку часових інтервалів існування t_i та їх тривалість T_i. дискретні. Значення t_i та T_i називають часовими координатами змінних.

Аналіз можливих варіантів БЛЧФ дозволив виділити три основних класи функцій (повна система):

1) клас БЛЧФ, що між двома нулями приймають стале значення (елементарні ЛЧФ);
2) клас БЛЧФ, які мають n часових координат, відрізки існування яких не перетинаються;
3) клас монотонних функцій.

Наприклад, елементарна ЛЧФ (рис.2), область визначення якої складається лише з одного відрізка існування, в загальному вигляді має вид:

$$f(t,t_1,T_1,a_1)=\begin{cases} a_1, & якщо\ t_1 \le t \le t_1+T_1 \\ 0, & якщо\ \ t_1+T_1 < t < t_1 \end{cases}, \tag{42}$$

де t – поточне дискретне значення параметру;

T_1 – інтервал існування функції;

a_1 – одне із k значень функції

t_1 – початок часового інтервалу

t_1+T_1 – кінець часового інтервалу.

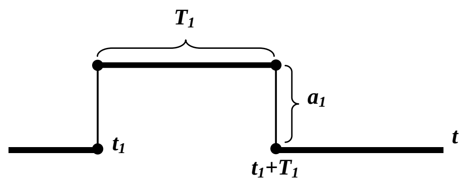


Рисунок 2. Елементарна логіко-часова функція

В загальному вигляді БЛЧФ з n відрізками існування можна записати так:

$$f(t,t_1,...,t_n,T_1,...,T_n,a_1,...,a_n)\,. \tag{43}$$

Зауважимо, що запис (43) ЛЧФ не використовує значення $a_i \le 0$ і така форма подання є досить громіздкою та незручною для обробки.

На рис. 3 наведено можливий варіант ЛЧФ, що має m часових координат відрізки існування яких не перетинаються, а на рис. 4 можливий варіант монотонної БЛЧФ (а – зростаючої, б – спадної).

Можна показати, що функції другого та третього класів можна подати у вигляді накладання (суперпозиції, логічного додавання) ЛЧФ першого класу.

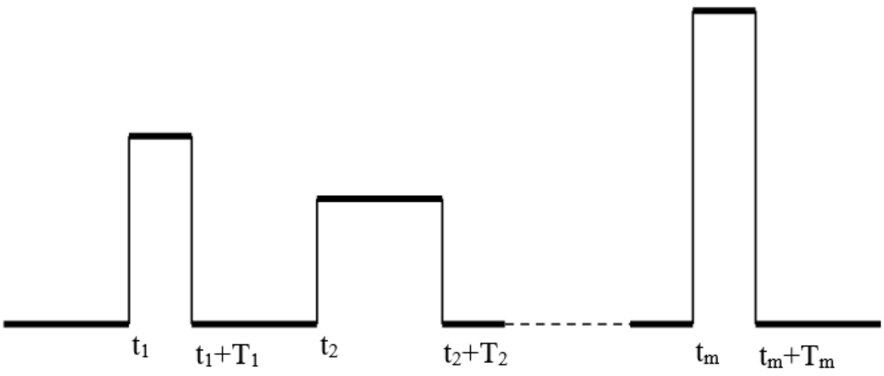
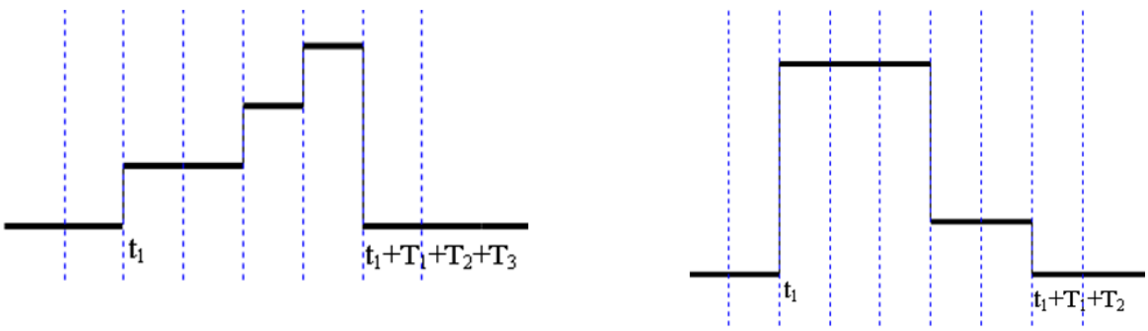


Рисунок 3. Можливий варіант ЛЧФ, що має m часових координат відрізки існування яких не перетинаються



а) б)

Рисунок 4. Можливі варіанти монотонної ЛЧФ : а) зростаюча ЛЧФ, б) спадна ЛЧФ

Тоді, для позначення таких функцій доцільно використати модифікований плюс: «⌖» [126]. Крім того, дискретизація часу дозволяє координати початку часового інтервалу і інтервал існування конкретної функції задавати числом Δ - інтервалів (тактів). Пропонується вказувати ці значення відповідно як нижній та верхній індекси змінної. Для БЛЧФ, зображених на рис. 1, записуючи всі інтервали існування в порядку зростання початкового часового інтервалу, отримуємо:

$$x(t) = x_1^3 \oplus x_{10}^1,$$

$$y(t) = y_1^1 \oplus 2y_2^1 \oplus y_3^2 \oplus y_9^2.$$

Вираз типу $2y_2^1$ (або $a_{t_i} z_{t_i}^{T_i}$) традиційно сприймається як множення 2 на y_2^1, хоча 2 – це значення змінної амплітуди. Для виключення подвійного трактування логічні значення a_i записуємо у верхньому попередньому індексі:

$$y(t) = {}^1y_1^1 \oplus {}^2y_2^1 \oplus {}^1y_3^2 \oplus {}^1y_9^2 \tag{44}$$

попередньому індексі:

$$y(t) = {}^1y_1^1 \oplus {}^2y_2^1 \oplus {}^1y_3^2 \oplus {}^1y_9^2 \tag{45}$$

В загальному вигляді для індексів використовуємо прийняті раніше позначення T і тоді маємо:

$$z(t) = {}^{a_1} z_{t_1}^{T_1} \oplus {}^{a_2} z_{t_2}^{T_2} \oplus \cdots \oplus {}^{a_{t_i}} z_{t_i}^{T_i} \oplus \cdots \oplus {}^{a_{t_n}} z_{t_n}^{T_n} \tag{46}$$

Запис (46) назвемо *індексним*. Фактично індексний запис тривалості амплітуд a_i, k-значних функцій, разом з початком інтервалів існування t_x, повністю характеризують ЛЧФ.

Для подальшого спрощення символьного позначення ЛЧФ введемо поняття *продукуючого слова.* Одномірним продукуючим словом A логіко-часової функції називається сукупність упорядкованої за часом множини одномісних аргументів тривалістю Δ типу $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{T-1}\}$ довжиною T:

$$A = {}^{z}A_{t_z}^{T_z} = \mathop{W_{t_z}^{T_z}}_{i=0}^{T_z-1} a_i, \tag{47}$$

де W – оператор впорядкування за часом та розбиття значень аргументів ЛЧФ на одиничні Δ -інтервали $T_z = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots T_{N-1}$;

i – порядковий номер інтервалу.

Правий нижній та верхній індекси t_z і T_z , що записується у разі усунення неоднозначного трактування, вказує на початок та довжину слова, i -показує положення аргументу в слові та пробігає всі значення $0,1,2,\ldots,(T-1)$. Тепер в найбільш загальному вигляді, маємо повну форму запису ЛЧФ k -значної логіки

$$ {}_k z(t_i) = {}_k z_{t_z}^{T_z}(t_i) = \left(\mathop{W}_{i=0}^{T_z-1} a_i \right) \Bigg| {}_k z_{t_z}^{T_z} \tag{48} $$

де t_i , як часова координата a_i , визначається співвідношенням $t_i = t_z + i$ $t_i \in \{t_z + 0, t_z + 1, t_z + i, \cdots, t_z + T_z - 1\}$, $a_i \in \{0, 1, \cdots k-1\}$;

індекс k вказує значність ЛЧФ.

За замовчуванням $a_i = 0$ за межами інтервалу існування БЛЧ функції. Але це не є обов'язковою умовою для БЛЧФ. За межами інтервалу існування БЛЧФ може приймати значення константи $0,1,\ldots,k-1$. Більше того, значення a_i може бути також від'ємним. Але це вже буде інший клас k-значних функцій (який тут не розглядається), відмінний від класичного і з своїми особливими правилами виконання тих чи інших операцій.

Якщо необхідно вказати значення БЛЧФ за межами інтервалу існування, то ці значення a_b при $t < t_x$ та a_e при $t > (t_x + T_x)$ ставимо за дужками:

$$ {}_k x(t) = a_b \left(a_t \right) a_e \Big| {}_k x_{t_x}^{T_x} = a_b \left(\mathop{W}_{i=0}^{T_x} a_i \right) a_e \Big| {}_k x_{t_x}^{T_x}. \tag{49} $$

Продукуюче слово може бути отримане також із матриці. Наприклад, для матриці $B_{M\times N}$,

$$B_{M\times N}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & b_{11} & \cdots & b_{1N} \\ \cdots & \cdots & b_{mn} & \cdots \\ b_{M1} & b_{M2} & \cdots & b_{MN} \end{pmatrix},$$

де $m\in\{1,2,3,\ldots,M\}$, $n\in\{1,2,3,\ldots,N\}$, продукуюче слово $\left(\underset{n=1}{\overset{N}{W}}\underset{m=1}{\overset{M}{W}}b_{mn}\right)$ впорядковує зліва направо зверху вниз матричний двомірний масив в одномірний масив за індексами n та m.

Тоді для матриці $B_{M\times N}$, як БЛЧФ маємо:

$$_{k}z(t_i)=B_{M\times N}\big|_{k}z_{t_z}^{T_{M\times N}}=\left(\underset{n=1}{\overset{N}{W}}\underset{m=1}{\overset{M}{W}}b_{mn}\right)\big|B_{M\times N}\big|_{k}z_{t_z}^{T_{M\times N}} \qquad (49')$$

Для конкретної 4-значної ЛЧФ (рис. 5) використання оператора впорядкування одномісних аргументів має такий вигляд:

$$_{4}x(t)={}_{4}x_{t_x}^{T_x}=W\left(1^1,2^2,1^1,3^4\right)\big|_{4}x_{t_x}^{8}=\left(12213333\right)\big|_{4}x_{t_x}^{8}. \qquad (50)$$

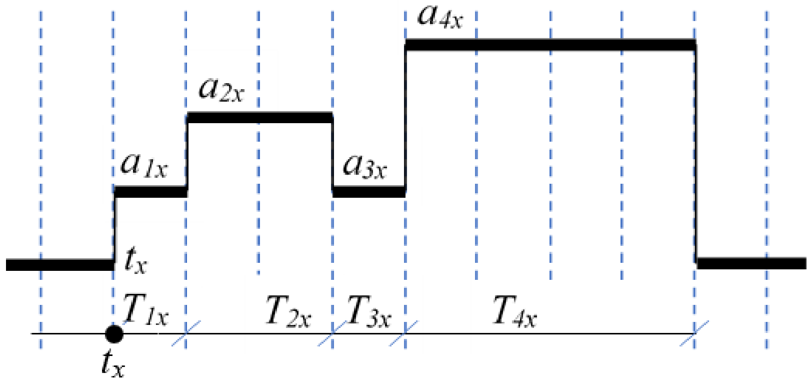


Рисунок 5. Можливий варіант 4-значної ЛЧФ

В цілому, значення a_i - це логічні змінні, а числові змінні - це значення тривалості інтервалу існування і час його початку. З цього можна зробити висновок, що БЛЧФ допускають як логічні, так і арифметичні (алгебраїчні) операції.

Розглянемо, наприклад, функцію заперечення Лукасевича (інверсії), що для звичайної k-значної змінної визначається формулою: $\tilde{x}=(k-1)-x$. Для БЛЧФ в інтервалі існування (t_x, t_x+T_x), це описується в загальному вигляді таким виразом:

$$\tilde{x}=\left(\left(k-1\right)-a_0^{T_0},\left(k-1\right)-a_1^{T_1},\ldots,\left(k-1\right)-a_N^{T_N}\right)\Big|_k x_{t_x}^{T_x}, \tag{51}$$

або в повній формі

$$\tilde{z}(t)=\tilde{z}_{t_z}^{T_z}=\underset{i=0}{\overset{T_z-1}{W}}\left(\left(k-1\right)-a_i\right)\Big|_k z_{t_z}^{T_z}. \tag{52}$$

В разі потреби врахування значення функції за межами інтервалу існування потрібно вказати значення БЛЧФ в інтервалах $0-t_0$ та $\left(t_n+T_n\right)-\infty$:

$$\tilde{x}=\left(\left(k-1\right)_0^{t_0},\left(k-1\right)-a_0^{T_0},\left(k-1\right)-a_1^{T_1},\ldots,\left(k-1\right)-a_N^{T_N},\left(k-1\right)_{t_N+T_N}^{\infty}\right)\Big|_k x_{t_x}^{T_x}. \tag{53}$$

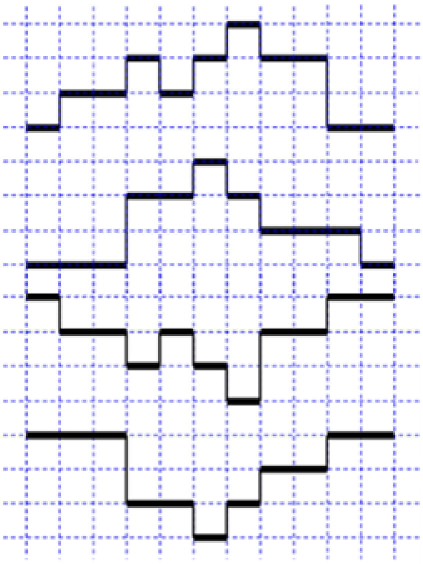
Приклади графіків заперечень Лукасевича для чотиризначної ЛЧФ наведено на рис. 6.

Для k-значних функцій часто використовується циклічне заперечення або заперечення Поста, що визначається формулою:

$$\vec{z}(t)=\vec{z}_{t_z}^{T_z}=\left(\underset{i=0}{\overset{T_z-1}{W}}\left(a_i+1\right)\bmod k\right)\Bigg|_k \vec{z}_{t_z}^{T_z}, \tag{52^1}$$

а також функція мінус x:

$$-x = (k - x)\operatorname{mod} k. \tag{54}$$



$$ {}_4x(t) = \left(1^2 2^1 1^1 2^1 3^1 2^2\right)\Big|\, {}_4x_1^8 $$

$$ {}_4y(t) = \left(2^2 3^1 2^1 1^3\right)\Big|\, {}_4y_3^7 $$

$$ {}_4\tilde{x}(t) = \left(3^1 2^2 1^1 2^1 0^1 2^2 3^\infty\right)\Big|\, {}_4x_0^\infty $$

$$ {}_4y(t) = \left(3^3 1^2 0^1 1^1 2^2 3^\infty\right)\Big|\, {}_4y_0^\infty $$

Рисунок 6. Приклади реалізації заперечення Лукасевича

Для позначення зсуву вліво чи вправо (випередження або затримка) використаємо оператор

$$D_t^s : D^s x_{t_x}^{T_x} = \left\{ \forall t : D^s x_{t_x}^{T_x} = x_{t_x+s}^{T_x} = \left(\mathop{\mathbf{W}}_{i=0}^{T_x-1} a_i \right)\Bigg|\, {}_k x_{t_x+s}^{T_x} \right\}, \tag{55}$$

де s вказує на величину зсуву в Δ-інтервалах.

Якщо s зі знаком «+», то маємо зсув вправо, а зі знаком «-» – зсув вліво. Даний оператор може мати параметри, що вказуються у відповідних індексах. Наявність нижнього індексу t вказує на час, від якого починається зсув. В такому випадку, символ D_t^s оператора зсуву може знаходитись в будь-якому місці виразу БЛЧФ, але раніше за t. Якщо нижній індекс відсутній, то зсув починається від значення функції, що слідує за оператором D^s від початкового

Δ - інтервалу. Дія оператора D_t^s поширюється на весь інтервал існування функції, що знаходиться під знаком оператора справа від t до $t+s$. Просто D без індексів вказує на одиничний зсув. Як правило, значеннями функції, що при зсуві опинились за межами інтервалу існування або інтервалу зсуву, ігнорують. Якщо зсув починається з t_i, тоді отримаємо:

$$D_{t_i}^{-R} z(t) = D_{t_i}^{-R} z_{t_1}^{T} = z_{t_1}^{T_1} \boxplus z_{t_2}^{T_2} \boxplus \cdots \boxplus z_{t_i - R}^{T_i} \boxplus \cdots \boxplus z_{t_n - R}^{T_n}. \tag{56}$$

Наприклад, для функції $y(t) = y_1^1 \boxplus 2y_2^1 \boxplus y_3^2 \boxplus y_9^2$, при $s=-2$ БЛЧФ функція зсуву така: $D^{-2}{}_4 y = y_{-1}^1 \boxplus {}^2y_0^1 \boxplus y_1^2 \boxplus y_7^2$.

Для можливості опису швидкості зміни функції автором було введено операцію нерівнозначного віднімання, що визначалась різницею по модулю значень та була досить громіздкою при використанні. Враховуючи індексне подання БЛЧФ та узагальнюючи логіко-часові функції (ЛЧФ) двійкової та багатозначної логіки таку операцію більш доцільно вважати логічною операцією нерівнозначності, а модуль різниці амплітуд змінних є мірою цієї нерівнозначності.

Для позначення нерівнозначності $\left| {}_k^x a_t - {}_k^y d_t \right|$ використаємо символ «$\ominus$» і запишемо нерівнозначність БЛЧФ у вигляді [141]:

$$\left({}_k x_{t_x}^{T_x} \ominus {}_k y_{t_y}^{T_y} \right) = \mathop{W}_{i=0}^{T_{\max}-1} \left({}^x a_i \ominus {}^y c_i \right) \Big|_k \left(x \ominus y \right)_{\min(t_x, t_y)}^{T_{\max}}. \tag{57}$$

де W – оператор впорядкування за часом та розбиття значень аргументів БЛЧФ на одиничні Δ-інтервали.

Можна показати, що дана операція не має властивості асоціативності: $(x \ominus y) \ominus z \neq x \ominus (y \ominus z)$, і також немає властивості дистрибутивності кон'юнкції (диз'юнкції) відносно операції нерівнозначності. Зокрема, $\left(x_t \triangle \left(y_t \ominus z_t\right)\right) \neq \left(x_t, \triangle y_t\right) \ominus \left(x_t \triangle z_t\right)$, де «$\triangle$» – операція кон'юнкції БЛЧФ:

$$\left({}_k x_{t_x}^{T_x} \triangle {}_k y_{t_y}^{T_y}\right) = \\ = \mathop{W}_{i=0}^{\substack{\min(t_x+T_x,\, t_y+T_y)- \\ -\max(t_x,\, t_y)-1}} \min\left({}^x a_i, {}^y c_i\right)\Big|_k \left(x \triangle y\right)_{\max(t_x,\, t_y)}^{\min(t_x+T_x,\, t_y+T_y)-\max(t_x,\, t_y)}. \tag{58}$$

Індекси типу $\min, \max$ з параметрами, визначають інтервали існування функції, а значення власне самої функції, кон'юнкцію ${}^x a_t$ та ${}^y c_t$, потрібно вираховувати для кожного t з кроком рівним одиниці від $\max\left(t_x, t_y\right)$ до $\left(\min\left(t_x + T_x, t_y + T_y\right) - \max\left(t_x, t_y\right)\right)$.

На рис. 7 наведено графічні результати операції додавання по модулю 2 або нерівнозначності.

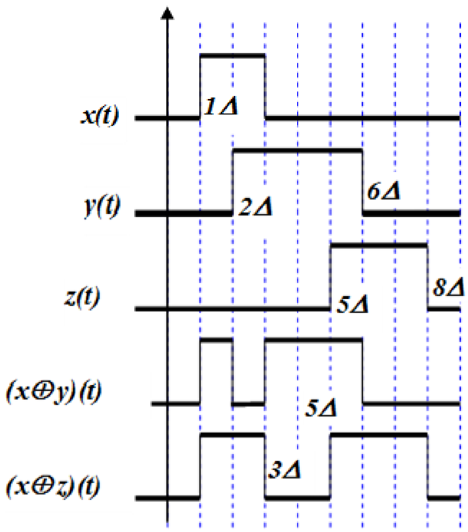


Рисунок 7. Двійкова нерівнозначність

Тоді аналітичне обчислення відповідних функцій, зображених на рис. 7:

$$x_1^2 \oplus y_2^4 = (x \oplus y)_2^{-1} \vee (x \oplus y)_3^3 \vee (x \oplus y)_1^1 \vee (x \oplus y)_6^{-3} =$$
$$= (x \oplus y)_1^1 \vee (x \oplus y)_3^3;$$

$$x_1^2 \oplus z_5^3 = (x \oplus z)_5^{-4} \vee (x \oplus z)_5^3 \vee (x \oplus z)_1^2 \vee (x \oplus z)_8^{-5} =$$
$$= (x \oplus z)_1^2 \vee (x \oplus z)_5^3.$$

Операцію нерівнозначності можна застосувати при побудові так званих індикаторних операцій. Зокрема, для оцінки інтенсивності зміни БЛЧФ введемо поняття *жвавості.* Жвавість (V) це число, що показує сумарно як інтенсивно змінюється значення функції протягом всього відрізку її існування, який може включати нульові підінтервали і визначається за формулою:

$$V\left(a_0, a_1, \ldots, a_N \middle| {}_k x_{t_x}^{T_x}\right) = \sum_{i=0}^{N+1}\left(a_i \ominus a_{i+1}\right). \tag{59}$$

Для функції ${}_4 x(t) = 1^2 2^1 1^1 2^1 3^1 2^2 \Big| {}_4 x_1^8$ жвавість $V = 8$. Максимальне значення жвавості на відрізку існування обчислюється за формулою:

$$V_{\max}\left({}_k x_{t_x}^{T_x}\right) = \left[\left(k-1\right) \times \left(T_x + 1\right)\right] \tag{60}$$

де T_x – тривалість відрізку існування функції.

Відповідно мінімальне значення жвавості $V_{\min} = 1$ і описує перехід БЛЧФ з однієї константи на сусідню вверх або вниз на логічну одиницю, а при $V = 0$ маємо справу з константою.