

ВАРІАНТ КЛАСИФІКАЦІЇ ФРАКТАЛІВ

¹ Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради

² Вінницький національний медичний університет ім. М. І. Пирогова

³ Вінницький національний технічний університет

Анотація

Фрактальні форми, які не мають нічого спільного з класичною евклідовою геометрією, зустрічаються всюди, від мікро- до макросвіту: в мінералах, рослинах і тваринному світі, в структурі ДНК, в природних явищах, людському тілі, планетарних системах і зоряних скупченнях. Розуміння фрактальної побудови спростило багато сфер наукових досліджень, зокрема і такої важливої, як медична. Властивість самоподібності дозволяє, вивчивши малу частину якої-небудь події, явища, системи, органу робити припущення щодо функціонування цілого. Дана робота присвячена одному з можливих варіантів класифікації фракталів.

Ключові слова: самоподібність, фрактал, класифікація, дерево Піфагора, золотий переріз, стохастичні фрактали, концептуальні фрактали.

Abstract

Fractal forms, which have nothing to do with classical Euclidean geometry, are found everywhere, from the micro to the macro world: in minerals, plants and animals, in the structure of DNA, in natural phenomena, the human body, planetary systems and star clusters. The understanding of fractal construction has simplified many areas of scientific research, including such an important one, as medical. The property of self-similarity allows, after studying a small part of any event, phenomenon, system, or body, to make assumptions about the functioning of the whole. This work is devoted to one of the possible options for classifying fractals.

Key words: self-similarity, fractal, classification, Pythagoras tree, golden section, stochastic fractals, conceptual fractals.

Вступ

Фрактали були відкриті якоюсь мірою випадково [1]. Б. Мандельброт працював на комп'ютері з ітерованими функціями, і якогось моменту помітив множину, яку згодом було названо його іменем. Ітерована функція – це, наприклад, процес, який ми створюємо, якщо беремо довільне число, припустимо 3, підносимо його до квадрату і додаємо одиницю. Результат такої операції дорівнює 10. А зараз робимо все те саме з числом 10 – множимо його на себе і додаємо одиницю. Результат дорівнює 101. І так далі. Те, що робив Б. Мандельброт, було дуже схоже на це. Коли комп'ютер видав презентацію результатів, на екрані з'явилася дивна чорно-біла фігура цікавої форми. При її збільшенні виявилось, що лінія межі множини, яка здавалася рівною, насправді складається із множини маленьких цибульних голівок, кожна з яких повторює форму оригінальної фігури.

Математичне визначення фракталу достатньо складне, однак спираючись на дві характерні ознаки, можна дати йому інтуїтивне визначення [2, 3]. По перше, фрактал має структуру самоподібності, тобто складається з множини частин, кожна з яких подібна усій фігурі в цілому. Щоб уявити макет фракталу, можна поставити вертикально гілки дерев – здалеку вони будуть схожі на самі дерева. Друга особливість фракталів полягає в тому, що не дивлячись на скінченність свого об'єму, вони мають нескінченний периметр. Якщо ми спробуємо виміряти довжину цієї кривої, то з'ясуємо, що скільки б ми не збільшували масштаб, намагаючись знайти рівні «вимірювані» ділянки, через фундаментальну властивість самоподібності ми будемо бачити замість цього все нові і нові вигини. Математики до кінця XIX століття називали ці красиві множини «математичними монстрами»; їх характеристики фактично не мають нічого спільного з класичною евклідовою геометрією.

Результати дослідження

Фрактальні форми зустрічаються всюди, від мікро- до макросвіту: в мінералах, рослинах і тваринному світі, в структурі ДНК, в природних явищах (циклони, блискавки, берегові лінії),

планетарних системах і зоряних скупченнях. В людському тілі також присутні фрактальні структури: легені, м'язи, артерії, бронхи, нервові волокна [4]. Легко переконатись, що наведені приклади є фрактальними структурами. Зокрема, в грудній клітині легені розміщені дуже компактно, але якщо розкласти цей важливий орган людського організму на площині, то в такому вигляді він займе площадку площею майже 62,4 м². Наразі також ведуться медичні розробки дослідження фрактальної структури остеопорозу – дегенеративного захворювання кісткової тканини. Можливо це дозволить переривати розвиток хвороби на початковому етапі.

Теорія фракталів застосовується для аналізу електрокардіограм. Оцінка величини і ритмів фрактальної розмірності дозволяють на більш ранній стадії і з більшою точністю і інформативністю судити про порушення гомеостазу і розвитку конкретних захворювань серця. Рентгенівські знімки, оброблені за допомогою фрактальних алгоритмів, дають більш якісну картинку, а відповідно і більш якісну діагностику!

Ще одна область активного застосування фракталів – гастроентерологія. Новий метод дослідження в медицині, електрогастроентерографія – метод дослідження, що дозволяє оцінити біоелектричну активність шлунку, дванадцятипалої кишки та інших відділів шлунково-кишкового тракту.

Розуміння фрактальної побудови спростило багато сфер наукових досліджень. Дивна особливість фракталів — повторення аналогічного в різних масштабах — дозволяє нам, вивчивши малу частину якої-небудь події, явища, системи, органу робити припущення щодо функціонування цілого. Для покращення подальшої роботи з фрактальними структурами потрібно мати варіант їх класифікації. Зокрема, можна таким чином класифікувати фрактали:

- геометричні;
- алгебраїчні;
- стохастичні;
- концептуальні (соціокультурні, непросторові і т. ін.).

З *геометричних* фракталів почалася історія фракталів. Цей тип фракталів отримують шляхом простих геометричних побудов. Зазвичай при побудові цих фракталів чинять так: береться «приманка» – набір відрізків, на підставі яких будуватиметься фрактал. Далі до цієї «приманки» застосовують набір правил, який перетворить її у будь-яку геометричну фігуру. Фрактали цього класу найбільш наочні. У двовірному випадку їх отримують за допомогою деякої ламаної (чи поверхні в тривірному випадку), яка називається генератором. За один крок алгоритму кожен із відрізків, які складають ламану, замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї процедури, отримується геометричний фрактал.

Прикладом геометричного фракталу є дерево Піфагора, яке вперше побудував А. Босман, використовуючи звичайну лінійку та Піфагорові штани (в старих шкільних підручниках наводилось доведення теореми Піфагора через отримання рівності суми площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника та площі квадрата, побудованого на гіпотенузі цього трикутника). Головну властивість такого фракталу можна сформулювати так: якщо площа першого квадрата дорівнює одиниці, то на кожному рівні сума площ квадратів також буде дорівнювати одиниці. В даному випадку отримуємо класичне дерево Піфагора (рис. 1а), в якому кут становить 45°. Використовуючи інше значення кута одержуємо дерево Піфагора обдуване вітром (рис. 1б). Якщо зображувати тільки відрізки, що з'єднують довільним чином обрані «центри» трикутників, то одержимо оголене дерево Піфагора (рис. 1в).

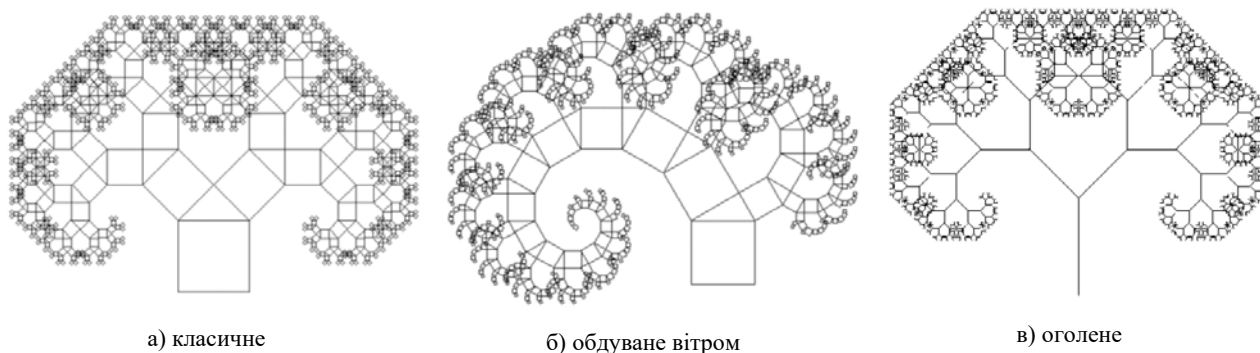


Рисунок 1. Варіанти дерева Піфагора

Ще одним прикладом геометричного фракталу є золотий переріз (спіраль), завдяки якому ми сприймаємо красу і гармонію природи, пропорційність будови людини, древніх архітектурних будівель, класичних творів мистецтва. Золота спіраль будується фрактальним способом: прямокутник із золотою пропорцією 1,618 розбивають на малі квадрати і проводять дугу (рис. 2). Тобто в спіралях велика дуга переходить у подібну меншу і т. д.

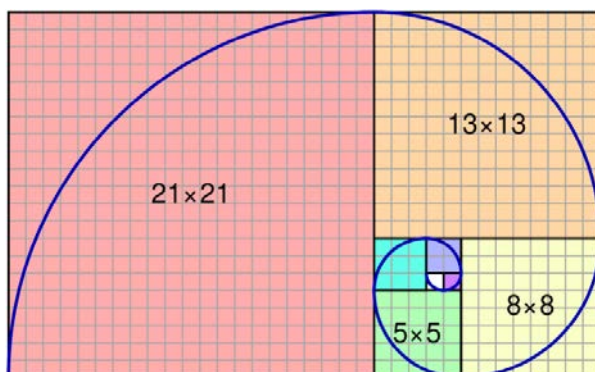


Рисунок 2. Золотий переріз

Спіраль сама по собі є фракталом, в якому кожен новий виток копіює попередні, але в новому масштабі. Прямий взаємозв'язок між світобудовою мікро- і макросвіту та формою спіралі свідчить про фрактальну будову Всесвіту.

Алгебраїчні фрактали – це найбільша група фракталів. Одержують їх за допомогою нелінійних процесів у n -вимірних просторах. Найбільш вивчені двовимірні простори. Якщо нелінійна динамічна система володіє декількома стійкими станами, то кожен стійкий стан має деяку область початкових станів, з яких система обов'язково потрапить у розглянуті кінцеві стани. Таким чином, фазовий простір системи розбивається на області притягання атракторів. Фарбуючи області притягання різними кольорами, можна одержати колірний фазовий портрет цієї системи (ітераційного процесу). Міняючи алгоритм вибору кольору, можна одержати складні фрактальні картини із вигадливими багатобарвними візерунками, які знайшли своє застосування в дизайні та медичній діагностиці (рис. 3). Несподіванкою для математиків стала можливість за допомогою примітивних алгоритмів породжувати дуже складні нетривіальні структури.

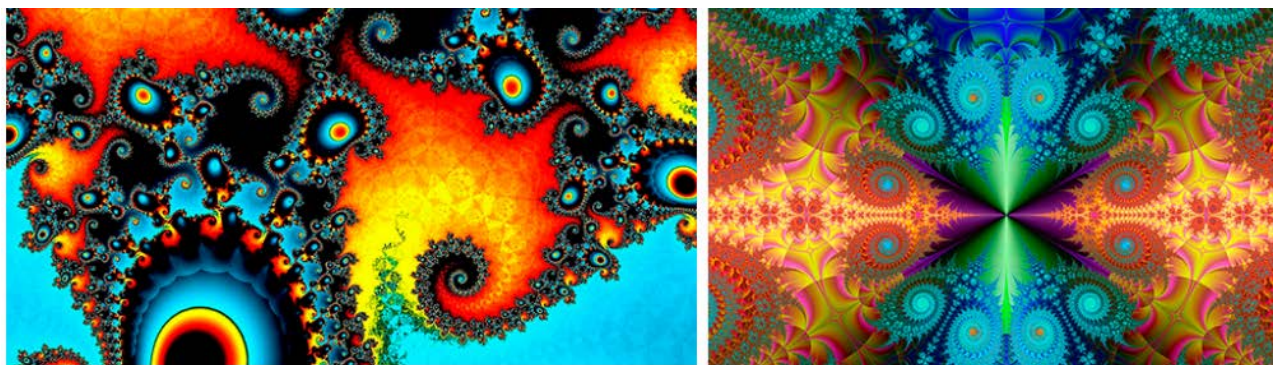


Рисунок 3. Можливі варіанти алгебраїчних фракталів

Стохастичні фрактали будуються шляхом хаотичної зміни деяких параметрів. При цьому утворюються об'єкти дуже схожі на природні – несиметричні дерева, порізані берегові лінії і т. ін. Двовимірні стохастичні фрактали використовуються: при моделюванні рельєфу органів і систем людського організму; під час моделювання різних природних об'єктів (рельєфу місцевості, поверхні моря тощо). Більше того, в природі можна знайти аналогії парних фракталів. Наприклад, блискавка – природний ландшафт, сніжинка – корінь рослини (рис. 4).



Рисунок 4. Фрактальні форми в природі

Концептуальні фрактали – об’єднання непросторових структур, що виходять за рамки геометричної фрактальності. Принцип багаторівневої самоподібності закладений в культурних творах. Зокрема, в художніх текстах (віршах для дітей, народних піснях, у музичних творах і казках) часто зустрічається «оповідання в оповіданні», як наприклад, в казці І. Франка «Ріпка»:

«Пішли вони на город – гуп-гуп! Узяв дід ріпку за чуб, баба діда – за сорочку.»;
 «Пішли вони на город – гуп-гуп! Узяв дід ріпку за чуб, баба діда – за сорочку, дочка бабу – за торочку»;
 «Пішли вони на город – гуп-гуп! Узяв дід ріпку за чуб, баба діда – за сорочку, дочка бабу – за торочку, собачка дочку – за спідничку».

Фрактальність також спостерігається в організації людських поселень (країна — місто — квартал); в організації медичних закладів (лікарня – відділення – палата); у розподілі суспільства на групи (народ — соціокультурна група — сім’я — людина). Сюди ж віднесемо фрактальність взаємовідносин, які починаються з самої людини. Змінюється людина, її сприйняття, внутрішній стан — змінюються взаємовідносини в сім’ї, колективі, в результаті перетворюється все суспільство. Простежується фрактальність і в ієрархічних системах управління.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Szoke, I., Holban, S. (2008). A Short Introduction in the History of Fractals. 9th International Conference on Development and Application Systems, Suceava, Romania, May 22–24, 2008, P. 179–181 <http://www.dasconference.ro/papers/2008/D11.pdf>.
2. The Application of Fractal Geometry to Ecology. Retrieved from: <http://www.fractal.org/Bewustzijns-Besturings-Model/Application-Fractal-Geometry.pdf>
3. Wang, W., Zhang, G., Yang, L. et al. (2019). Research on garment pattern design based on fractal graphics. J Image Video Proc., 29 (2019). Retrieved from: <https://doi.org/10.1186/s13640-019-0431-x>.
4. Свиридчук В. З. Теорія фракталів та її використання в медицині / В. З. Свиридчук // Україна. Здоров’я нації. – 2017. – № 1. – С. 124–132. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Uzn_2017_1_21.

Струк Катерина Олегівна, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учениця 11 класу, katastruk0@gmail.com
Кавецька Анастасія Вячеславівна, Вінницький національний медичний університет, 1-й медичний факультет, 3-й курс, група 13 А, ankavecka@gmail.com
Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com
 Науковий керівник: **Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна** - к. т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Struk Kateryna O. communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, katastruk0@gmail.com

Kavetska Anastasia V. – student, medical faculty, group 13-A, Vinnytsia National Medical University, Vinnytsia, e-mail: ankavecka@gmail.com

Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com

Supervisor: **Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.** - Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com