УДК 517.5.52

В. В. Грабенко [1]
Н. В. Сачанюк-Кавецька [2]

ПОБУДОВА ЧИСЛОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТІВ ТАНГРАМ ТА ОПИСАНИХ КІЛ

[1] Комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради
[2] Вінницький національний технічний університет

Анотація
Теорія числових рядів широко використовується в різноманітних теоретичних дослідженнях пов'язаних з обчисленням значень функцій, інтегралів, наближеним розв'язуванням диференціальних рівнянь. Дослідницький процес і розвиток логічного мислення, які активізуються при використанні головоломок, стимулюються новими ідеями, таким як можливість візуалізації числових рядів з використанням елементів головоломки. Найбільш цікавою математичною головоломкою є танграм, в основу якого покладено розв'язування геометричних задач на розрізання. В даній роботі розглянуто можливість побудови числових рядів з використанням елементів квадрату танграм.

Ключові слова: танграм, логічне мислення, числові ряди.

Abstract
The theory of numerical series is widely used in various theoretical studies related to the calculation of the values of functions, integrals, and the approximate solution of differential equations. The research process and the development of logical thinking, which are activated when using puzzles, are stimulated by new ideas, such as the possibility of visualizing number series using puzzle elements. The most interesting mathematical puzzle is the tangram, which is based on solving geometrical cutting problems. In this work, the possibility of building numerical series using the elements of the tangram square is considered.

Key words: tangram, logical thinking, numerical series.

Вступ

Теорія числових рядів широко використовується в різноманітних теоретичних дослідженнях пов'язаних з обчисленням значень функцій, інтегралів, наближеним розв'язуванням диференціальних рівнянь [1-2]. Оскільки числові ряди дають можливість за допомогою наближених обчислень прийти до точних результатів, то вони є незамінними при розв'язуванні прикладних задач в архітектурі, економіці, фізиці, хімії, техніці та можуть бути ефективним інструментом наукових математичних досліджень. Найбільш цікавим застосуванням рядів є дослідження логічного аспекту математичного мислення [3]. Аналіз вітчизняних та закордонних джерел показав, що більшість посібників та підручників з теорії рядів не пропонують візуалізації рядів. Тому, побудова числових рядів за допомогою елементів різних геометричних об'єктів є актуальною.

Результати дослідження

Можна стверджувати, що дослідницький процес і розвиток логічного мислення, які активізуються при використанні головоломок, стимулюються новими, нестандартними ідеями. Найбільш цікавою математичною головоломкою є танграм, в основу якого покладено рішення геометричних задач на розрізання. Це китайська головоломка, що існує вже понад 4000 років (див. рис. 1) [4]. Вона містить сім гральних кісток (танів), з яких необхідно створити задану форму (на підставі лише обрису силуету, використовуючи всі елементи не накладаючи їх один на одного). Застосування цієї головоломки дозволяє розвинути різні розумові процеси такі як зіставлення, узагальнення, встановлення послідовності, визначення відношення «ціле-частина».

Якщо обрати одиницю вимірювання таким чином, що всі сім елементів можуть бути зібрані в квадрат зі стороною рівною одиниці, то сім елементів будуть такими:

- паралелограм (сторони $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$) – 1;

- квадрат (сторона $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{8}$) – 2;

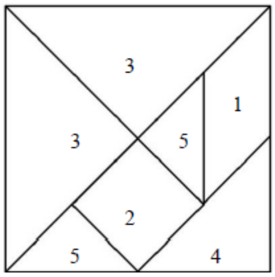

Рисунок 1. Загальний вигляд головоломки танграм

- 2 великих прямокутних трикутника (гіпотенуза 1, катети $\frac{\sqrt{2}}{2}$, площа $\frac{1}{4}$) – 3;
- 1 середній прямокутний трикутник (гіпотенуза $\frac{\sqrt{2}}{2}$, катети $\frac{1}{2}$, площа $\frac{1}{8}$) – 4;
- 2 малих прямокутних трикутники (гіпотенуза $\frac{1}{2}$, катети $\frac{\sqrt{2}}{4}$, площа $\frac{1}{16}$) – 5.

Серед цих семи танів паралелограм є особливим, оскільки він не має осьової симетрії, а має лише симетрію обертальну. Його дзеркальне зображення може бути отримано лише перевертанням цього елемента.

Будемо використовувати елементи квадрата танграм для побудови числових рядів. Розглянемо танграм $T = ABCD$ з описаним навколо нього колом K з центром в точці M і радіусом $r = AM$ (див. рис. 2). В квадрат $LMNK$, що є елементом танграм T, впишемо новий танграм $T_1 = A_1B_1C_1D_1$, навколо якого знову опишемо коло K_1 з центром в точці M_1 і радіусом $r_1 = A_1M_1$. Припускаємо, що дана процедура виконується нескінченну кількість разів.

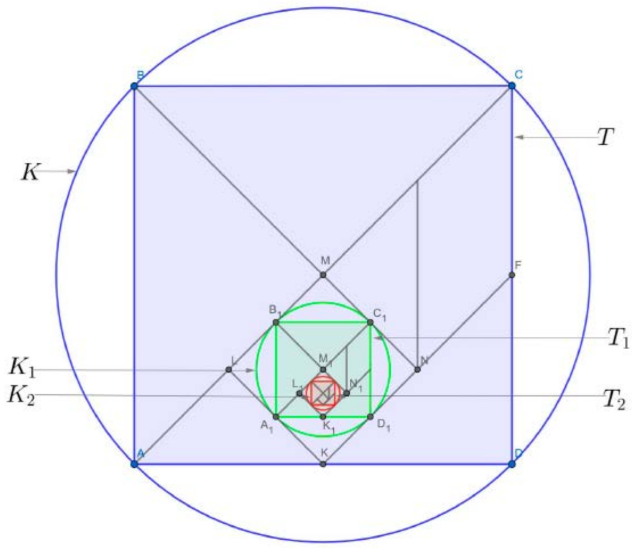

Рисунок 2 Послідовність кіл описаних навколо танграмів

Тоді можна сформувати такі числові ряди:
- сторін танграма;
- діагоналей танграмів;
- радіусів описаних кіл;

- діаметрів описаних кіл;
- довжин описаних кіл;
- площ танграмів;
- відношень відповідних сторін танграмів до радіусів описаних кіл;
- відношень відповідних радіусів описаних кіл до довжин сторін танграмів;
- відношень площ кругів до площ танграмів.

Побудуємо перші три з них. Позначимо сторону квадрата, в який вкладається танграм T $a=1$, тоді його діагональ $d=\sqrt{2}a=\sqrt{2}$. Радіус першого описаного кола K дорівнює $r=\frac{a}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Перші елементи шуканих рядів знайдені. Тепер необхідно знайти залежність між елементами танграма T та T_1. Для цього відшукаємо залежність між стороною a танграма T і стороною a_1 танграма T_1. Очевидно, що $LM=\frac{1}{4}d=\frac{\sqrt{2}a}{4}$, $r_1=\frac{LM}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{8}$. Таким чином сторона нового танграма дорівнює:

$$a_1=A_1B_1=\sqrt{2}A_1M_1=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}a}{8}=\frac{1}{4}a=\frac{1}{4}.$$

Очевидно, що дана залежність буде виконуватись і для решти танграмів T_n. Отже маємо такі дані за кожним танграмом:

- Танграм T : сторона дорівнює 1, діагональ дорівнює $\sqrt{2}$, радіус описаного кола $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Танграм T_1: сторона дорівнює $\frac{1}{4}$, діагональ дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{4}$, радіус описаного кола $\frac{\sqrt{2}}{8}$.
- Танграм T_2 : сторона дорівнює $\frac{1}{16}$, діагональ дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{16}$, радіус описаного кола $\frac{\sqrt{2}}{32}$.
- Танграм T_3: сторона дорівнює $\frac{1}{64}$, діагональ дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{64}$, радіус описаного кола $\frac{\sqrt{2}}{128}$.
- Танграм T_4 : сторона дорівнює $\frac{1}{256}$, діагональ дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{256}$, радіус описаного кола $\frac{\sqrt{2}}{512}$.

Таким чином, можемо записати такі ряди:

- Ряд сторін танграмів:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

- Ряд діагоналей танграмів:

$$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{16}+\frac{\sqrt{2}}{64}+\frac{\sqrt{2}}{256}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

- Ряд радіусів описаних кіл:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{32}+\frac{\sqrt{2}}{128}+\frac{\sqrt{2}}{512}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Математичне моделювання технічних і технологічних процесів на ПЕОМ. Конспект лекцій /О. В. Шебаніна і ін.. – Миколаїв, 2020. – 130 с.

2. Сачанюк-Кавецька Н. В. Теорія рядів. Навчальний посібник /Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І., Ковальчук М. Б. – Вінниця ВНТУ, 2008. – 138 с.
3. Боснюк В. Ф. Математичні методи в психології. Курс лекцій – Харків, 2016. – 56 с.
4. Anno, Mitsumasa. Anno's Math Games (three volumes). New York: Philomel Books, 1987. ISBN 0-399-21151-9 (v. 1), ISBN 0-698-11672-0 (v. 2), ISBN 0-399-22274-X (v. 3).

Грабенко Вадим Валерійович, комунальний заклад «Тиврівський науковий ліцей» Вінницької обласної Ради, учень 11 класу, grvadim11@gmail.com
***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна* -** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com
Науковий керівник: ***Сачанюк-Кавецька Наталія Василівна* -** к. .т. н., доцент, Вінницький національний технічний університет, кафедра вищої математики, skn1901@gmail.com

Grabenko Vadim V., communal institution "Tyvriv Scientific Lyceum" of the Vinnytsia Regional Council, 11th grade student, grvadim11@gmail.com
Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V. Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com
Supervisor: ***Sachaniuk-Kavets`ka Natalia V.* -** Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, skn1901@gmail.com