https://doi.org/10.31649/1997-9266-2022-165-6-75-81

УДК 517.95:519.86:539.3

К. В. Двірничук[1]

КОМП'ЮТЕРНЕ РІШЕННЯ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ПОПЕРЕЧНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗМІЩЕНЬ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

[1]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Поставлено задачу знаходження функції динамічних поперечних зміщень товстих пружних плит під дією осесиметричних зовнішньо-динамічних збурень, що діють на поверхні таких плит. У постановці задачі вказано, що про стан плити відомі деякі початково-граничні спостереження, але їхня кількість недостатня для розв'язання цієї задачі класичними методами математичної фізики чи чисельного інтегрування. Тому вважається можливим застосування до цієї задачі методики математичного моделювання зовнішньо-розподілених динамічних процесів за умов невизначеності, тобто за недостатньої кількості початково-граничних умов. Для такої методики необхідно мати інтегральну математичну модель та її основні складові — ядра, тобто підінтегральні функції, для яких існує методика знаходження. Або ж їх можна визначити чисельними методами за допомогою систем комп'ютерної алгебри.

За побудованої інтегральної моделі динаміки товстих пружних плит, враховуючи її ядра, використовуючи методику математичного моделювання динаміки просторово-розподілених процесів, отримано множину розв'язків, які точно, задовольняючи інтегральній і диференціальній моделям, з початково-граничними умовами, узгоджуються за певним критерієм.

Вибрано один з множини розв'язків задачі знаходження функції поперечних динамічних зміщень, який знайдено, обчислюючи підінтегральну функцію математичної інтегральної моделі, за методикою математичного моделювання динаміки просторово-розподілених процесів. Для задачі зафіксовано пружні характеристики і густину плити, які відповідають деякому матеріалу, визначено деякі конкретні зовнішньо-динамічні збурення та початково-граничні спостереження. За таких припущень побудовано графіки функцій поперечних динамічних зміщень для різних значень z — поперечної координати та зі значенням 0 радіальної координати r циліндричної системи координат.

***Ключові слова**: динаміка плит, пружні тверді тіла, математичне моделювання, пружні характеристики, неповні спостереження, умови невизначеності, збурення, навантаження, просторово-розподілений процес, динамічні поперечні зміщення, диференціальна система, інтегральна модель, товстий пружний шар, практична реалізація.*

Вступ

Задачі функціонування динамічних систем з розподіленими параметрами, якими описуються процеси навколишнього середовища, постійно досліджуються вітчизняними та зарубіжними науковцями. До розв'язання таких задач зводяться задачі електродинаміки та електростатики, екології та гідрометеорології, теорії пружності, газової, аеро- та гідродинаміки, соціології та економіки, біофізики та біомеханіки, біології та медицини, психології та політології. Дослідження таких важливих для практики галузей науково-господарської діяльності людини з використанням різних математичних моделей стає дедалі актуальнішим. Використовувані при цьому математичні моделі здебільшого подаються звичайними диференціальними рівняннями або рівняннями з частинними похідними.

Серед класичних методів розв'язання задач динаміки систем з розподіленими параметрами можна відмітити метод інтегральних перетворень, метод потенціалів, метод функції Гріна, які успішно використовуються для розв'язання рівнянь еліптичного, параболічного та гіперболічного вигляду. З появою та розвитком обчислювальної техніки дослідження динамічних систем з розподіленими параметрами систем все ширше проводяться із застосуванням чисельно-аналітичних підходів. Одними з найпоширеніших поміж них є методи скінченних елементів та скінченних різниць.

Актуальними для практики є підходи дослідження розподілених просторово-часових систем за умов невизначеності (неповноти даних) про стан останніх. Це пов'язано з тим, що не завжди можна коректно чи повно описати початково-граничний стан розглядуваної системи. Одним з таких підходів є методика дослідження названих систем, запропонована В. А. Стояном, В. В. Скопецьким в [1]—[3]. Основою для неї є класична теорія псевдообернення матриць, розвинена в роботах М. Ф. Кириченка та поширена [1] на розв'язання задач середньоквадратичного обернення лінійних інтегральних та функціональних рівнянь, а також ідеї математичного моделювання початково-граничних збурень динамічних систем з розподіленими параметрами, що викладені в [2], [3].

Особливістю викладеної в [1]—[3] методики розв'язання некоректно за кількістю та якістю початково-граничних умов задач динаміки просторово-розподілених динамічних систем є те, що ця методика дає можливість знайти точний розв'язок диференціальної моделі процесу, який з початковими та граничними спостереженнями за процесом погоджений згідно з середньоквадратичним критерієм без особливих обмежень на останні.

При цьому актуальною залишається практична реалізація цієї методики до конкретного просторово-розподіленого динамічного процесу. В [4], [5] побудовано диференціальна та інтегральна моделі динамічних поперечних зміщень товстого пружного шару, а в [6] сформульовані умови для розв'язання задач динаміки товстих пружних плит за неповних початково-граничних умов останніх. В [7] описані особливості методики знаходження підінтегральних функцій в інтегральних моделях динаміки товстого пружного шару — ядер інтегральних моделей на основі класичної теорії інтегральних лишків. В практичній реалізації ця методика [7] не була успішною, тому вирішено спробувати знайти ядра інтегральної моделі за допомогою методів чисельного інтегрування, зокрема системами комп'ютерної алгебри (Wolfram Mathematica, Matlab …). Це і продемонстроване в , де показана практична реалізація ядер інтегральної моделі за деяких обмежень і особливостей та з певним аналізом підінтегральних функцій ядер. На основі такого аналізу та названої методики можна графічно побудувати функцію поперечних динамічних зміщень товстої пружної плити, що і показано в цій статті. Для цього розглянуто загальну постановку задачі.

Постановка задачі

Розглянемо товстий пружний шар, який у циліндричній системі координат $r,\ \theta,\ z$ обмежений площинами $z=\pm h$. Пружні властивості шару будемо визначати постійними Ляме λ і μ. Зупинимося на задачах дослідження динаміки такого шару за умови, що поверхні шару знаходяться під дією зовнішньо-динамічних сил, нормальних

$$q_1^{\pm}(r,t),\ \text{якщо}\ z=\pm h$$

та дотичних до них $\qquad q_2^{\pm}(r,t),\ \text{якщо}\ z=\pm h$.

Введемо позначення диференціальних операторів, які визначені в [7]

$$\bar{Q}^{(1)}\left(\Delta,\partial_t^2\right)=\left(\Delta+D_2^2\right)^2\cos\left(hD_1\right)\frac{\sin\left(hD_2\right)}{D_2}-4\Delta D_1^2\frac{\sin\left(hD_1\right)}{D_1}\cos\left(hD_2\right);$$

$$\bar{Q}^{(2)}\left(\Delta,\partial_t^2\right)=\left(\Delta+D_2^2\right)^2\frac{\sin\left(hD_1\right)}{D_1}\cos\left(hD_2\right)-4\Delta D_2^2\cos\left(hD_1\right)\frac{\sin\left(hD_2\right)}{D_2};$$

$$\bar{d}_1^{(1)}\left(\Delta,z,\partial_t^2\right)=D_1^2\left[\left(\Delta+D_2^2\right)\frac{\sin\left(zD_1\right)}{D_1}\frac{\sin(hD_2)}{D_2}-2\Delta\frac{\sin\left(hD_1\right)}{D_1}\frac{\sin\left(zD_2\right)}{D_2}\right];$$

$$\bar{d}_2^{(1)}\left(\Delta,z,\partial_t^2\right)=\Delta\left[\left(\Delta+D_2^2\right)\cos\left(hD_1\right)\frac{\sin\left(zD_2\right)}{D_2}-2D_1^2\frac{\sin\left(zD_1\right)}{D_1}\cos\left(hD_2\right)\right];$$

$$\bar{d}_1^{(2)}\left(\Delta,z,\partial_t^2\right)=-\left(\Delta+D_2^2\right)\cos\left(zD_1\right)\cos\left(hD_2\right)+2\Delta\cos\left(hD_1\right)\cos\left(zD_2\right);$$

$$\bar{d}_2^{(2)}\left(\Delta,z,\partial_t^2\right)=\Delta\left[\left(\Delta+D_2^2\right)\frac{\sin\left(hD_1\right)}{D_1}\cos\left(zD_2\right)-2D_2^2\cos\left(zD_1\right)\frac{\sin\left(hD_2\right)}{D_2}\right],$$

якщо $\Delta = d\partial_r$; $D_m^2 = \Delta - \frac{1}{c_m^2}\partial_t^2$ $\left(m = \overline{1,2}\right)$; $d = \partial_r + \frac{1}{r}$.

А через $$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}};\ c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

позначимо швидкості поширення пружних хвиль розширення та зсуву в розглядуваному середовищі.

В [7] показано, що

$$\bar{w}_k^{(l)}(r,z,t) = \int_0^{+\infty} r' \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}_k^{(l)}(r,r',z,t-t')\bar{q}_k^{(l)}(r',t')dt'dr'; \tag{1}$$

$$\bar{G}_k^{(l)}(\cdot) = \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi\mu i}\int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\bar{d}_k^{(l)}\left(-\sigma^2, z, p^2\right)}{\bar{Q}^{(l)}\left(-\sigma^2, p^2\right)} e^{p(t-t')} dp d\sigma$$

або $$\bar{G}_k^{(l)}(\cdot) = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi\mu}\int_0^{+\infty} \sigma^{2-k} J_0(\sigma r) J_{k-1}(\sigma r') \int_0^{+\infty} \frac{\bar{d}_k^{(l)}\left(-\sigma^2, z, -p^2\right)}{\bar{Q}^{(l)}\left(-\sigma^2, -p^2\right)} \cos\left(p(t-t')\right) dp d\sigma, \tag{2}$$

де $\left(k,l = \overline{1,2}\right)$; $J_k(\sigma r)$ — функція Бесселя k-го порядку та

$$\bar{q}_1^{(1)}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\bar{q}_1^+(r,t) + \bar{q}_1^-(r,t)\right);\quad \bar{q}_2^{(1)}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\bar{q}_2^+(r,t) - \bar{q}_2^-(r,t)\right);$$

$$\bar{q}_1^{(2)}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\bar{q}_1^+(r,t) - \bar{q}_1^-(r,t)\right);\quad \bar{q}_2^{(2)}(r,t) = \frac{1}{2}\left(\bar{q}_2^+(r,t) + \bar{q}_2^-(r,t)\right).$$

Функція (2) у разі розкладання в ряди функцій косинуса і синуса дозволяє отримати функції конкретного порядку, та відповідно конкретної точності. До прикладу, у разі розкладання до перших трьох членів ряду (h^3-розкладання) побудовано функції $\bar{G}_k^{(l)}(\cdot)$ $\left(k,l = \overline{1,2}\right)$ чисельними методами системи комп'ютерної алгебри Mathematica.

Розглянемо товсту пружну плиту згідно з вищерозглянутою математичною моделлю товстого пружного шару. Для цього вважатимемо, що за її станом можуть бути відомі деякі неперервно визначені початково-граничні спостереження

$$L_r^0(\partial_t)\bar{w}(r,z,t)\Big|_{\substack{t=0\\(r,z)\in\Sigma_0}} = W_r^0(r,z)\quad \left(r = \overline{1,R_0}\right);$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_r,\partial_z)\bar{w}(r,z,t)\Big|_{(r,z,t)\in\Sigma_\Gamma} = W_\rho^\Gamma(r,z,t)\quad \left(\rho = \overline{1,R_\Gamma}\right) \tag{3}$$

або дискретні

$$L_r^0(\partial_t)\bar{w}(r,z,t)\Big|_{\substack{t=0\\(r,z)=\left(r_j^0,\ z_j^0\right)\in\Sigma_0}} = W_{rj}^0\quad \left(j = \overline{1,J_r};\ r = \overline{1,R_0}\right);$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_r,\partial_z)\bar{w}(r,z,t)\Big|_{(r,z,t)=\left(r_j^\Gamma z_j^\Gamma, t_j^\Gamma\right)\in\Sigma_\Gamma} = W_{\rho j}^\Gamma\quad \left(j = \overline{1,J_\rho};\ \rho = \overline{1,R_\Gamma}\right), \tag{4}$$

де α — радіус плити; $\Sigma_0 \subseteq S_0 = [0,\alpha]\times[-h,h]$; $\Sigma_\Gamma \subseteq S_\Gamma^T = \alpha\times[-h,h]\times[0,\mathrm{T}]$; $\Sigma \subseteq S_0^T = S_0\times[0,\mathrm{T}]$; ∂_r, ∂_z — похідні за просторовими координатами r, z, а $L_r^0(\partial_t)$ $\left(r = \overline{1,R_0}\right)$; $L_\rho^\Gamma(\partial_r,\partial_z)$ $\left(\rho = \overline{1,R_{\Gamma_0}}\right)$; $L_i(\partial_r,\partial_z,\partial_t)$ $\left(i = \overline{1,I}\right)$ — лінійні диференціальні оператори. На кількість початкових R_0 та граничних R_Γ спостережень за зміщеннями $\bar{w}(r,z,t)$, як і на структуру лінійних диференціальних операторів $L_r^0(\partial_t)$ $\left(r = \overline{1,R_0}\right)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_r,\partial_z)$ $\left(\rho = \overline{1,R_{\Gamma_0}}\right)$ та областей Σ_0, Σ_Γ ніяких обмежень накладати не будемо.

Функції $\bar{w}_k^{(l)}(r,z,t)$ $\left(k,l = \overline{1,2}\right)$ подамо такими співвідношеннями [7]:

$$\overline{w}_k^{(l)}(r,z,t)=\overline{w}_{\infty k}^{(l)}(r,z,t)+\overline{w}_{0k}^{(l)}(r,z,t)+\overline{w}_{\Gamma k}^{(l)}(r,z,t)\ \left(k,l=\overline{1,2}\right);\tag{5}$$

$$\overline{w}_{\infty k}^{(l)}(r,z,t)=\int\limits_S \overline{G}_k^{(l)}\left(r,r',z,t-t'\right)\overline{q}_k^{(l)}\left(r',t'\right)dr'dt';$$

$$\overline{w}_{0k}^{(l)}\left(r,z,t\right)=\int\limits_{S^0} \overline{G}_k^{(l)}\left(r,r',z,t-t'\right)\overline{q}_{0k}^{(l)}\left(r',t'\right)dr'dt';\tag{6}$$

$$\overline{w}_{\Gamma k}^{(l)}(r,z,t)=\int\limits_{S^\Gamma} \overline{G}_k^{(l)}\left(r,r',z,t-t'\right)\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}\left(r',t'\right)dr'dt'\ \left(k,l=\overline{1,2}\right),$$

функції $\overline{q}_{0k}^{(l)}\left(r',t'\right)$; $\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}\left(r',t'\right)$ $\left(k,l=\overline{1,2}\right)$ яких визначатимуться в областях

$$S^0=[0,\alpha]\times\left(\{z=h\}\cup\{z=-h\}\right)\times\left(-\infty,0\right);\ S^\Gamma=[\alpha,+\infty)\times\left(\{z=h\}\cup\{z=-h\}\right)\times[0,\mathrm{T}],$$

імітують початково-граничні збурення області S_0^{T}, а

$$S=[0,\alpha]\times\{z=h\}\cup\{z=-h\}\times[0,\mathrm{T}].$$

У випадку представлення функцій $\overline{q}_k^{(l)}\left(r',t'\right)$; $\overline{q}_{0k}^{(l)}\left(r',t'\right)$; $\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}\left(r',t'\right)$ $\left(k,l=\overline{1,2}\right)$ векторами їхніх значень

$$\overline{q}_k^{(l)}=col\left(q_{km}^{(l)}=q_k^{(l)}\left(\xi_{km}^{(l)}\right),\ m=\overline{1,M_k^{(l)}}\right)\ \left(\xi_{km}^{(l)}\in S\right);$$

$$\overline{q}_{0k}^{(l)}=col\left(q_{0km}^{(l)}=q_{0k}^{(l)}\left(\xi_{km}^{0(l)}\right),\ m=\overline{1,M_{0k}^{(l)}}\right)\ \left(\xi_{km}^{0(l)}\in S^0\right);$$

$$\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}=col\left(q_{\Gamma km}^{(l)}=q_{\Gamma k}^{(l)}\left(\xi_{km}^{\Gamma(l)}\right),\ m=\overline{1,M_{\Gamma k}^{(l)}}\right)\ \left(\xi_{km}^{\Gamma(l)}\in S^\Gamma\right)$$

маємо

$$\overline{w}_{\infty k}^{(l)}\left(r,z,t\right)=\sum_{m=1}^{M_k^{(l)}}\overline{G}_k^{(l)}\left(r,r_{km}^{(l)},z,t-t_{km}^{(l)}\right)q_{km}^{(l)}\ \left(\xi_{km}^{(l)}\in S\right);$$

$$\overline{w}_{0k}^{(l)}\left(r,z,t\right)=\sum_{m=1}^{M_{0k}^{(l)}}\overline{G}_k^{(l)}\left(r,r_{km}^{0(l)},z,t-t_{km}^{0(l)}\right)q_{0km}^{(l)}\ \left(\xi_{km}^{0(l)}\in S^0\right);\tag{7}$$

$$\overline{w}_{\Gamma k}^{(l)}\left(r,z,t\right)=\sum_{m=1}^{M_{\Gamma k}^{(l)}}\overline{G}_k^{(l)}\left(r,r_{km}^{\Gamma(l)},z,t-t_{km}^{\Gamma(l)}\right)q_{\Gamma km}^{(l)}\ \left(\xi_{km}^{\Gamma(l)}\in S^\Gamma\right)\ \left(k,l=\overline{1,2}\right).$$

За такого представлення функцій $\overline{w}_k^{(l)}(r,z,t)$ $(k,l=1,2)$ задачі математичного моделювання (задачі знаходження функції поперечних динамічних зміщень) осесиметрично завантаженої товстої пружної плити зводяться до побудови функцій $\overline{q}_{0k}^{(l)}\left(r',t'\right)$; $\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}\left(r',t'\right)$ $(k,l=1,2)$, або їхніх дискретних еквівалентів $\overline{q}_{0k}^{(l)}$; $\overline{q}_{\Gamma k}^{(l)}$ $(k,l=1,2)$ [7].

Функції $\overline{w}_k^{(l)}(r,z,t)$ $(k,l=1,2)$, побудовані у результаті розв'язання прямих задач математичного моделювання осесиметрично завантаженої товстої пружної плити, точно задовольнятимуть моделі (1) і (2), а їхня сума — початково-граничним (3), (4) спостереженням за деяким середньоквадратичним критерієм [7].

Розв'язання цих же задач зводиться до псевдообернення лінійних функціональних, інтегральних та алгебраїчних рівнянь вигляду $A(r,z,t)\overline{q}=\overline{W}\left(r,z,t\right)$; $\int B(r,t)q(r,t)drdt=\overline{W}$; $C\overline{q}=\overline{W}$.

Практична реалізація задачі знаходження функції поперечних динамічних зміщень товстої пружної плити

Розв'язання задачі знаходження функції поперечних динамічних зміщень товстої пружної плити за некоректно та неповно поставлених початково-граничних умов можна звести до задач математичного моделювання просторово-розподілених динамічних процесів в умовах невизначеності [1]—[3]. При цьому методика дозволяє знайти розв'язок задачі, який, точно задовольняє співвідношення (1), (2) та є збіжним з початково-граничними умовами (3), (4) за середньо-квадратичним критерієм. Важливо розуміти, що розв'язок не один, а множина розв'язків, тому візьмемо один з них для демонстрації результатів моделювання засобами пакета прикладних програм Matlab. За знайденими ядрами інтегральної моделі, без використання яких не було б можливості практичної реалізації задачі за методикою математичного моделювання [7].

Розглянемо детальніше особливості конкретизації постановки та розв'язання цієї задачі. Для цього зафіксуємо значення

$$\lambda = 10684111 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}; \; \mu = 8361540 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}; \; \rho = 7{,}85 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \tag{8}$$

що відповідають матеріалу «сталь» та вважатимемо $h = 0{,}1$ м.

Вважатимемо, що на товсту пружну плиту зі сталі радіусу $R = 5$ м діють поверхнево розподілені зовнішньо-динамічні зусилля

$$\overline{q}_1^{+}(r,t) = \begin{cases} (\cos r + 1)\left(e^{-t} - e^{-10}\right), \; r \in [0, \pi] \\ 0, \; r > \pi \end{cases}, \; t \in [0,10]. \tag{9}$$

При цьому $\overline{q}_1^{(l)}(r,t) = \frac{1}{2}\overline{q}_1^{(+)}(r,t) \; \left(l = \overline{1,2}\right)$.

За відсутності дотичних до поверхонь розглядуваної плити зовнішньо-динамічних зусиль $\overline{q}_2^{\pm}(r,t)$ функція $\overline{w}(r,z,t)$ визначається сумою

$$\overline{w}(r,z,t) = \overline{w}_1^{(1)}(r,z,t) + \overline{w}_1^{(2)}(r,z,t),$$

знаходження якої здійснимо завдяки знайдених в ядрах $\overline{G}_1^{(l)}(r,r',z,t-t') \; \left(l = \overline{1,2}\right)$ інтегральної моделі (1), (2) та методиці математичного моделювання динаміки розглядуваної плити запропонованої в [7].

Початкові умови визначимо співвідношеннями

$$\overline{w}(r,z,0) = 0 \; \forall r \in [0,5], \; z \in [-0{,}1; 0{,}1].$$

Вважатимемо теж, що краї плити зафіксовані, тобто граничні умови матимуть вигляд

$$\overline{w}(5,z,t) = 0 \; \forall \; t \in [0,10], \; z \in [-0{,}1; 0{,}1]. \tag{10}$$

Останнє дає можливість для моделювання розв'язку задачі брати довільну кількість початково-граничних умов. Для спрощення обчислень в нашому випадку взято по 5 граничних та початкових умов для кожного випадку $z = 0, 1, 2$.

Результат математичного моделювання розглядуваної плити, тобто функція $\overline{w}(r,z,t)$ поперечних динамічних зміщень показана на рис. 1—4.

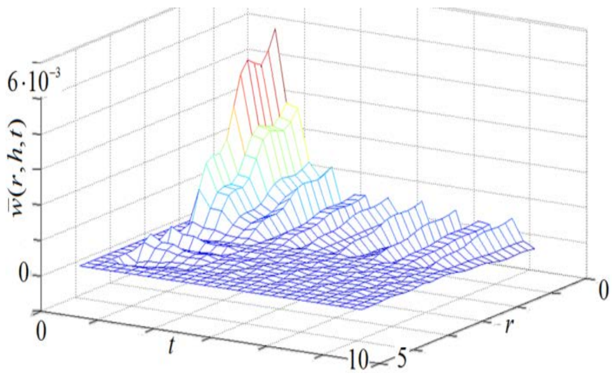

Рис. 1. Графік функції $\overline{w}(r,z,t)$, коли $z = 0{,}1$

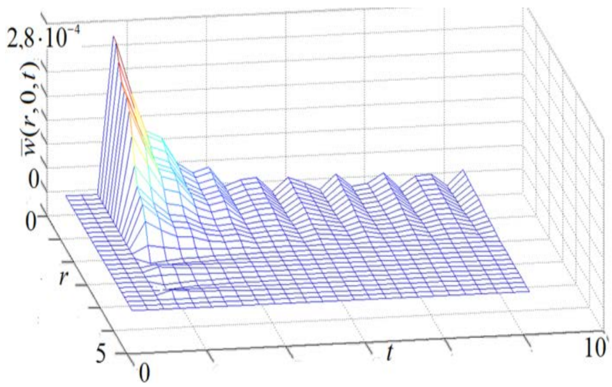

Рис. 2. Графік функції $\overline{w}(r,z,t)$, коли $z = 0$

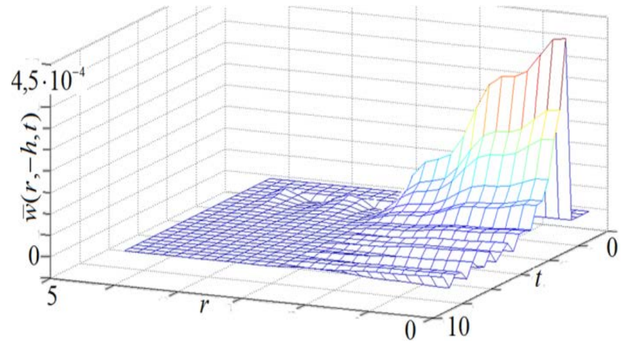

Рис. 3. Графік функції $\overline{w}(r,z,t)$, коли $z=-0{,}1$

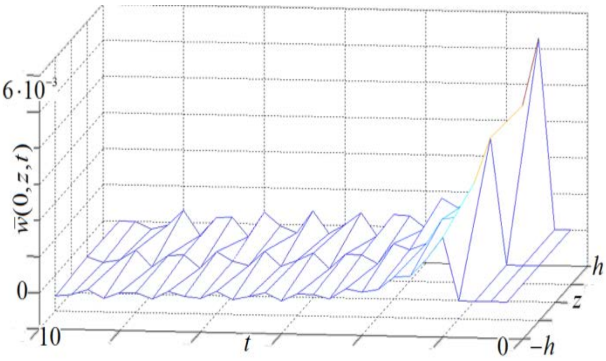

Рис. 4. Графік функції $\overline{w}(0,z,t)$

Висновки

З побудованою інтегральною моделлю динаміки товстих осесиметрично-завантажених пружних плит, враховуючи її ядра, методика математичного моделювання динаміки просторово-розподілених процесів [1], [2] дає результат, а саме множину розв'язків, які, точно задовольняють співвідношення (1), (2) та з початково-граничними умовами узгоджуються за середньо-квадратичним критерієм.

Вибрано один з розв'язків задачі знаходження функції поперечних динамічних зміщень, який знайдений згідно з методикою математичного моделювання динаміки просторово-розподілених процесів та обчисленої підінтегральної функції (2) математичної моделі (1). Для задачі зафіксовано пружні характеристики та густина плити (8), що відповідають деякому матеріалу, визначені деякі конкретні зовнішньо-динамічні збурення (9) та початково-граничні спостереження (10), які визначені певними умовами в конкретних точках. За таких припущень побудовано графіки функцій поперечних динамічних зміщень для різних значень поперечної координати *z* та зі значенням 0 радіальної координати *r* циліндричної системи координат.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] В. В. Скопецький, В. А. Стоян, і В. Б. Зваридчук, *Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів*, моногр. Київ Україна: Сталь, 2009, 316 с.

[2] В. В. Скопецький, В. А. Стоян, і Ю. Г. Кривонос, *Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами*, моногр. Київ, Україна: Наукова думка, 2001, 361 с.

[3] В. А. Стоян, *Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем*, моногр. Київ, Україна: ВПЦ Київський університет, 2011, 320 с.

[4] V. A. Stoyan, and K. V. Dvirnychuk, "On construction of differential model of transversal dynamic displacements of thick elastic layer," *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 44, issue 8, pp. 44-54, 2012.

[5] V. A. Stoyan, and K. V. Dvirnychuk, "On an integral model of the transverse dynamic displacements of a thick elastic layer," *Journal of Automation and Information Sciences*, vol. 45, issue 1, pp. 16-29, 2013.

[6] V. A. Stoyan, and K. V. Dvirnychuk, "Mathematical modeling of three-dimensional fields of transverse dynamic displacements of thick elastic plates," *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 49, issue 6, pp. 852-864, 2013.

[7] В. А. Стоян, *Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит*, моногр. Київ, Україна: ВПЦ Київський університет, 2016, 277 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 12.12.2022

Двірничук Костянтин Васильович — канд. фіз.-мат. наук, асистент кафедри комп'ютерних систем та мереж, e-mail: k.v.dvirnychuk@gmail.com

K. V. Dvirnychuk[1]

Computer Solution for Determining Transverse Dynamic Displacements of Thick Elastic Plates Under Uncertainty Conditions

[1]Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

The article poses the task of finding the function of dynamic transverse displacements of thick elastic plates under the action of axisymmetric external dynamic disturbances acting on the surface of such plates. When setting the problem, it is indicated that some initial-boundary observations are known for the state of the plate, but their number is insufficient to solve this problem by classical methods of mathematical physics or numerical integration. Therefore, it is possible to apply to this problem the method of mathematical modeling of externally distributed dynamic processes under conditions of uncertainty, i.e. under insufficient number of initial and boundary conditions. For such a method, it is necessary to have an integral mathematical model and its main components - kernels, that is, integral functions for which there is a finding method. Or they can be calculated using numerical methods of computer algebra systems.

With the built integral model of the dynamics of thick elastic plates, taking into account its kernels, the method of mathematical modeling of the dynamics of spatially distributed processes leads to the result - a set of solutions that accurately satisfy the integral and differential models and agree with the initial boundary conditions according to a certain criterion.

The article selects one of the many solutions to the problem of finding the function of transverse dynamic displacements, which is found according to the methodology of mathematical modeling of the dynamics of spatially distributed processes and thanks to the calculation of the integral function of the mathematical integral model. For the problem, the elastic characteristics and density of the slab corresponding to some material are fixed, some specific external dynamic disturbances and initial-at-the-edge observations are determined, which are represented by certain conditions at specific points. Under such assumptions, graphs of the functions of transverse dynamic displacements are constructed at different values of the transverse coordinate z and at the value 0 of the radial coordinate r of the cylindrical coordinate system.

Keywords: plate dynamics, elastic solids, mathematical modeling, elastic characteristics, incomplete observations, uncertainty conditions, disturbance, load, spatially distributed process, dynamic transverse displacements, differential system, integral model, thick elastic layer, practical implementation.

Dvirnychuk Kostiantyn V. — Cand. Sc. (Phys.-Math.), Assistant of the Chair of Computer Systems and Networks, e-mail: k.v.dvirnychuk@gmail.com