Volodymyr Derech*, Ph. D.
Alla Barkovska**

*Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine
e-mail: derech@vntu.edu.ua

**Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine
e-mail: barkovska@vntu.edu.ua

ON FINITE STRUCTURALLY UNIFORM SEMIGROUPS

Abstract. A finite semigroup S is called structurally uniform if any two subsemigroup of S are isomorphic whose heights in the partially ordered set of all subsemigroups of S are equal. Note that this class contains the class of all finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is congruence permutable. In these notes, we give a brief overview of results about finite structurally uniform semigroups.

Key words and phrases: inverse monoid of local automorphisms, structurally uniform semigroup, nilsemigroup, congruence permutable semigroup.

Напівгрупа S називається інверсною, якщо для будь-якого елемента a існує єдиний елемент a^{-1} такий, що $a \cdot a^{-1} \cdot a = a$ і $a^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} = a^{-1}$. Добре відомо (див., наприклад [1]), що напівгрупа є інверсною тоді і лише тоді, коли вона регулярна і будь-які два її ідемпотенти комутують. Нехай C – довільна математична структура. Ізоморфізм між двома її підструктурами називається *локальним автоморфізмом*. Множина всіх локальних автоморфізмів відносно звичайної операції композиції утворює *інверсний моноїд локальних автоморфізмів* і позначається через $LAut(C)$. Напівгрупи локальних автоморфізмів математичних структур і їх піднапівгрупи – це основне джерело інверсних напівгруп. Скажімо, якщо C – напівгрупа лівих (або правих нулів), то $LAut(C)$ – це *симетрична інверсна напівгрупа*, яка є основним прикладом інверсної напівгрупи оскільки (згідно з теоремою Вагнера-Престона) будь-яка інверсна напівгрупа (з точністю до ізоморфізму) може розглядатися як піднапівгрупа підходящої симетричної напівгрупи. Зазначимо, що група автоморфізмів (або група симетрій) математичної структури C є підгрупою інверсного моноїда $LAut(C)$. Вивчення взаємозв'язків між властивостями математичної структури і властивостями групи автоморфізмів цієї структури є класичною проблемою в сучасній алгебрі. Аналогічна проблема є актуальною і для інверсного моноїда локальних автоморфізмів математичної структури. Зокрема в статті [2] дано вичерпний список скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставною напівгрупою. Сформулюємо відповідний результат.

Theorem 1 (see [2]). *Assume that S is a finite semigroup. The inverse monoid $L\mathrm{Aut}(S)$ is permutable if and only if S is:*
(1) either an elementary Abelian p-group, where p is any prime number;
(2) or a Heisenberg group over the finite field $\mathrm{Z}p$*, where p is an arbitrary odd prime number;*
(3) or a linearly ordered semilattice;
(4) or a primitive semilattice;
(5) or a semigroup of right zeros;
(6) or a semigroup of left zeros;
(7) or the nilsemigroup $K1$ (see Table 1);
(8) or the nilsemigroup $K2$ (see Table 2);
(9) or the nilsemigroup $B1$ (see Table 3);
(10) or the nilsemigroup $B2$ (see Table 4);
(11) or the nilsemigroup whose structure is described by Structure 0;
(12) or the nilsemigroup whose structure is described by Structure 1;
(13) or the nilsemigroup whose structure is described by Structure 2;
(14) or a nilsemigroup with zero multiplication.

Далі, напівгрупа S називається *структурно однорідною*, якщо будь-які дві її піднапівгрупи однакової висоти (в решітці $Sub(S)$) є ізоморфними. Виявляється (див. [3]), що скінченна напівгрупа є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли її ідеали утворюють ланцюг відносно включення. Оскільки ідеали конгруенц-переставної напівгрупи лінійно впорядковані відносно включення (див. [6]), то всі напівгрупи перелічені в Теоремі 1 є структурно однорідними. В статті [3] доведено, що скінченна група є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли вона є або циклічною групою порядку p^n (де p – просте число), або елементарною Абелевою p-групою, або групою кватерні-онів Q_8, або групою Гайзенберга над полем F_p, де p – непарне просте число. Скінченна в'язка є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли вона є або напівгрупою лівих нулів, або напівгрупою правих нулів, або лінійно впорядкованою напівгратою, або примітивною напіврешіткою (див. [4]). В статті [5] дано вичерпний список скінченних структурно однорідних нільнапівгруп. Для того, щоб завершити класифікацію всіх скінченних структурно однорідних напівгруп нам залишається розглянути напівгрупи, кожна з яких є розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Clifford A.H., Preston G.B. The algebraic theory of semigroups. Vols. 1,2. American Mathematical Society, Providance, RI (1964, 1967)
2. Derech V.D. Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a permutable semigroup. *Ukr. Math.. J.* 2017. Vol. 68, No 11. P. 1820-1828.
3. Derech V.D. Finite structurally uniform groups and commutative nilsemigroups. *Ukr. Math.. J.* 2019. Vol. 70, No 8. P. 1237-1251.
4. Derech V.D. Structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite bundle for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable. *Ukr. Math.. J.* 2012. Vol . 63, No 9. P. 1390-1399.
5. Derech V.D. Classification of finite structurally uniform nilsemigroups. *Semigroup Forum.* 2023. Vol. 106. Issue 2. P. 394-402.
6. Tully E.J. The equivalence, for varieties of semigroups, of two properties concerning congruence relations. *Bull. Am. Math. Soc.* 1964. Vol. 70. No 3. P. 399-400.