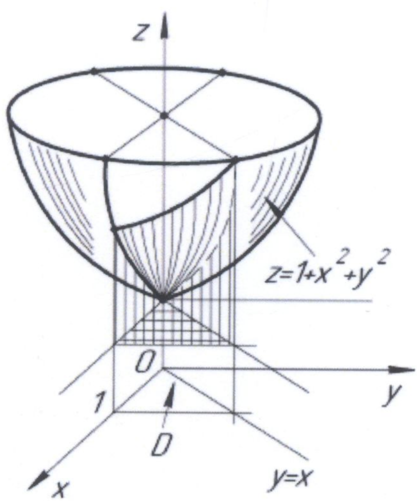
В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ



Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Вінниця
ВНТУ
2022

УДК 517
К-77

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України (протокол № 5 від 23.12.2021 р.)

Рецензенти:

Т. Л. Годованюк, доктор педагогічних наук, професор

О. М. Джеджула, доктор педагогічних наук, професор

В. Х. Касіяненко, доктор фізико-математичних наук, професор

Краєвський, В. О.

К-77 Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та елементи теорії поля: навчальний посібник / В. О. Краєвський, Ю. В. Добранюк, А. А. Коломієць. – Вінниця : ВНТУ, 2022. – 142 с.

ISBN 978-966-641-907-4

У навчальному посібнику містяться основні формули, теореми, означення теорії кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів, а також приведено елементи теорії поля. З цією метою розроблено значну кількість покрокових алгоритмів, які стануть у пригоді студентам під час розв'язання практичних завдань. В підручнику підібрано достатню кількість завдань для розв'язання на практичних заняттях по кожній темі та для самостійної роботи студентів. Розглянуто розв'язання основних прикладів з кожної теми, надається 80 варіантів завдань для типових розрахунків та контрольних робіт.

Посібник розрахований для студентів технічних спеціальностей.

УДК 517

ISBN 978-966-641-907-4

ЗМІСТ

1 КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1 Подвійні інтеграли та їх обчислення

На площині Oxy розглянемо деяку замкнену область D, що обмежена кривою L. Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в області D. Довільними лініями розіб'ємо D на n елементарних ділянок S_i, площі яких позначимо ΔS_i $(i = \overline{1,n})$ (рис. 1). Діаметром d_i ділянки S_i називається довжина найбільшої з хорд, що з'єднує граничні точки S_i. В кожній ділянці S_i (всередині або на межі – неважливо) оберемо довільну точку $P_i(x_i y_i)$ і складемо суму добутків виду

$$I_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \,. \quad (1)$$

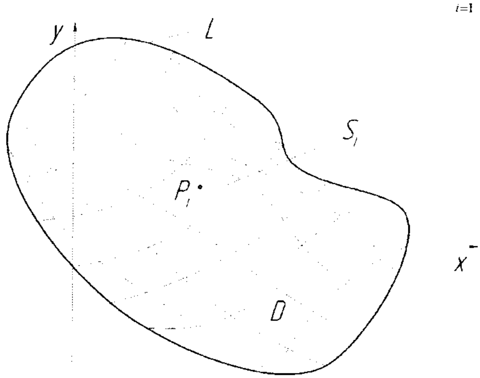


Рисунок 1

Ця сума називається n-ою інтегральною сумою для функції $z = f(x, y)$ в області D. Внаслідок довільного розбиття області D на елементарні ділянки S_i та випадкового вибору в них точок P_i можна скласти нескінченну кількість вказаних сум.

Розглянемо довільну послідовність n-них інтегральних сум, що складені для функції $z = f(x, y)$ по області D:

$$I_{n_1}, I_{n_2}, \ldots, I_{n_k}, \ldots \quad (2)$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій області D, то існує границя послідовності n-их інтегральних сум (2) при прямуванні максимального діаметра $d_{i\max}$ до 0 і вона єдина, тобто не залежить ні від способу розбиття області D на ділянки S_i, ні від вибору точок P_i.

Ця границя називається подвійним інтегралом функції $z = f(x, y)$ по області D. Позначається подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dS$, при цьому $f(x,y)$ називається підінтегральною функцією, а D – областю інтегрування. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \lim_{d_{i\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i \qquad (3)$$

Основні властивості подвійного інтегралу та його геометричний та фізичний зміст

1. $\iint\limits_D dS = S_D$, де S_D – площа області інтегрування D.

2. Якщо підінтегральна функція $z = f(x,y) = \mu(x,y)$ – поверхнева густина матеріальної пластини, яка займає область D, то маса цієї пластини визначається за формулою

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dS. \qquad (4)$$

Це фізичний зміст подвійного інтегралу.

3. Якщо $f(x,y) \ge 0$ в області D, то подвійний інтеграл (3) чисельно дорівнює об'єму V циліндричного тіла, яке знаходиться над площиною Oxy, нижньою основою якого є область D, верхньою – частина поверхні $z = f(x,y)$, яка проектується в D, а бічна поверхня – циліндрична, прямолінійні твірні якої паралельні осі Oz і проходять через межу L області D (рис. 2). Якщо $f(x,y) \le 0$ в області D, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму циліндричного тіла, яке знаходиться під площиною Oxy (рис. 3), що взятий із знаком «–» $(-V)$. Якщо ж функція $f(x,y)$ в області D змінює знак, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює різниці об'ємів циліндричних тіл, які знаходяться над площиною Oxy та під нею, тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = V_1 - V_2 \qquad (5)$$

(рис. 4). Ця властивість визначає геометричний зміст подвійного інтеграла.

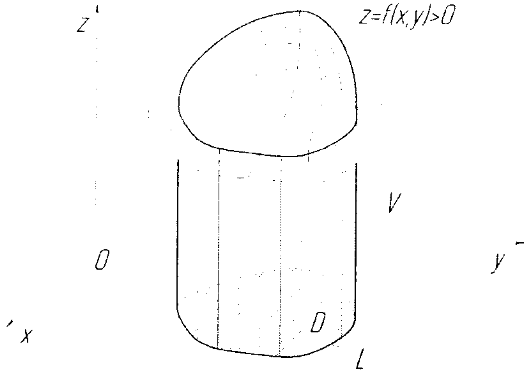


Рисунок 2

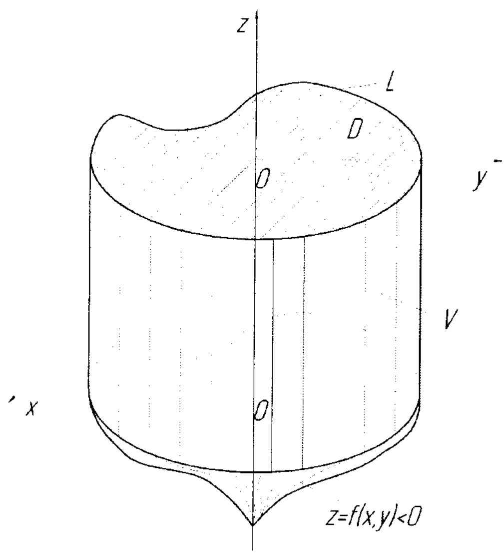


Рисунок 3

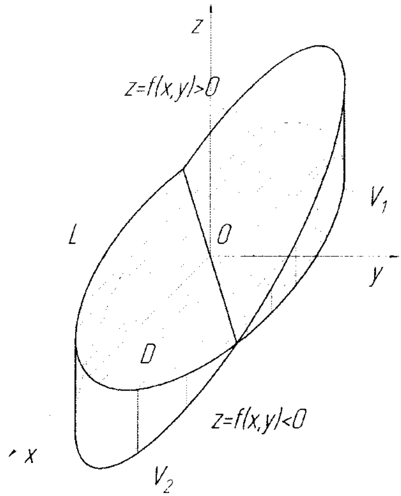


Рисунок 4

4. Якщо функція $z = f_i(x,y)$ $(i=\overline{1,k})$ неперервні в області D, то

$$\iint_D \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x,y) \right) dS = \sum_{i=1}^{k} \iint_D f_i(x,y) dS . \tag{6}$$

5. Сталий множник C підінтегральної функції можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D Cf(x,y)dS = C\iint_D f(x,y)dS . \tag{7}$$

Поєднавши формули (6) та (7) отримаємо властивість лінійності подвійного інтеграла

$$\iint_D \left(\sum_{i=1}^{k} C_i f_i(x,y) \right) dS = \sum_{i=1}^{k} C_i \iint_D f_i(x,y) dS , \tag{8}$$

де $C_i = const$, $i=\overline{1,k}$.

6. Властивість адитивності. Якщо область D розбити на скінченну кількість областей $D_1, D_2, ..., D_k$, які не мають спільних внутрішніх точок, то інтеграл по області D дорівнює сумі інтегралів по областям D_k :

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS + ... + \iint_{D_k} f(x,y)dS . \tag{9}$$

7. Теорема про середнє. Для неперервної функції $z = f(x,y)$ в області D, площа якої S_D, завжди знайдеться хоча б одна точка $P(x_c, y_c) \in D$, така що

$$\iint_D f(x,y)dS = f(x_c, y_c)S_D. \qquad (10)$$

Число $f(x_c, y_c)$ називається середнім значенням функції $z = f(x,y)$ в області D.

8. Якщо в області D для неперервних функцій $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ виконуються нерівності $f_1(x,y) \le f(x,y) \le f_2(x,y)$, тоді

$$\iint_D f_1(x,y)dS \le \iint_D f(x,y)dS \le \iint_D f_2(x,y)dS. \qquad (11)$$

9. Теорема про оцінку подвійного інтеграла. Якщо функція $z = f(x,y) \ne const$ і неперервна в області D, M і m – максимальне та мінімальне значення функції в області D відповідно, то

$$mS_D < \iint_D f(x,y)dS < MS_D. \qquad (12)$$

Обчислення подвійного інтеграла

Так як границя n-ї інтегральної суми I_n не залежить від способу розбиття області D на елементарні області S_i, то в декартовій системі координат область D зручно розбивати на елементарні області S_i прямими, що паралельні осям координат. Отримані при такому розбитті елементарні області S_i, які належать області D, є прямокутниками. Отже, $dS = dxdy$, тоді

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy. \qquad (13)$$

Область інтегрування D називається правильною відносно осі Ox (осі Oy), якщо будь-яка пряма, що паралельна осі Ox (осі Oy), перетинає границю L області D не більше двох раз (рис. 5, а). Область D вважається також правильною, якщо частина її границі або вся границя L складається з відрізків прямих, що паралельні осям координат (рис. 5, б).

Розглянемо методи обчислення подвійного інтеграла по областям, які є правильними в напрямку координатних осей. Так як практично будь-яку область можна представити у вигляді об'єднання правильних областей (рис. 5, в), тоді згідно властивості 6 подвійних інтегралів, ці методи придатні для обчислення подвійних інтегралів по будь-яким областям.

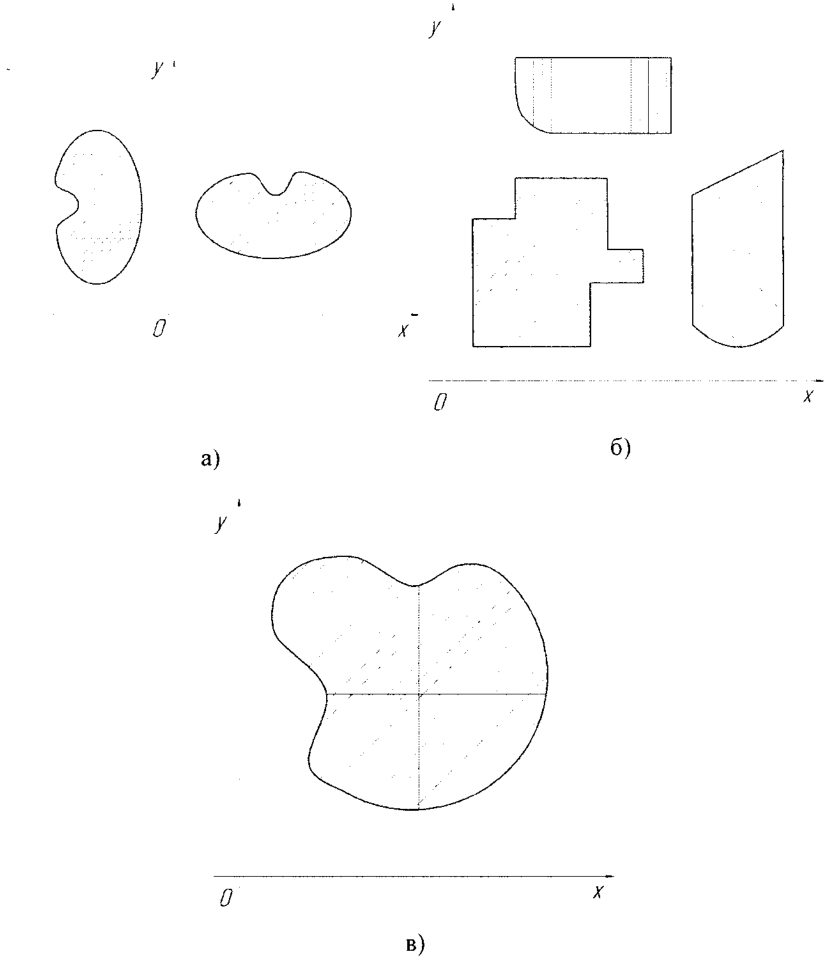


Рисунок 5

Розглянемо правильну відносно Oy область D, яка проектується на вісь Ox у відрізок $[a;b]$. AB – верхня межа області, яка описується рівнянням $y=\varphi_2(x)$, AC – нижня межа $y=\varphi_1(x)$ (рис. 6). Тоді

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \tag{14}$$

називається повторним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D із зовнішньою змінною інтегрування x. При цьому $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$ – називається внутрішнім інтегралом, а y – внутрішньою змінною інтегрування.

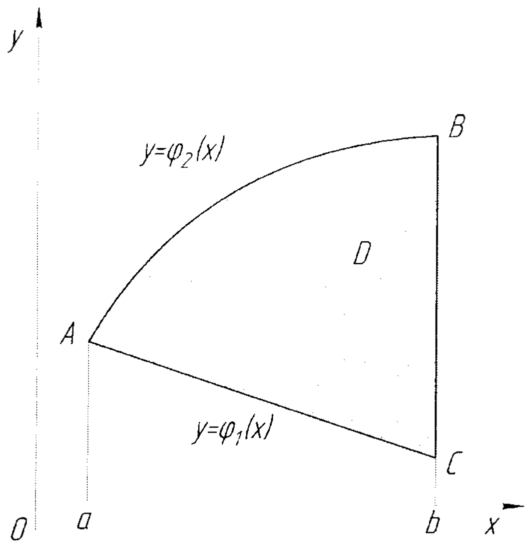


Рисунок 6

Розглянемо область, яка є правильною відносно Ox, яка проектується на вісь Oy у відрізок $[c;d]$. ClD – ліва межа області, яка описується рівнянням $x=\psi_1(y)$, CkD – права межа $x=\psi_2(y)$ (рис. 7). У цьому випадку вираз

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \tag{15}$$

називається повторним інтегралом функції $f(x,y)$ по області D із зовнішньою змінною інтегрування y. При цьому $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$ – внутрішній інтеграл, а x – внутрішня змінна інтегрування.

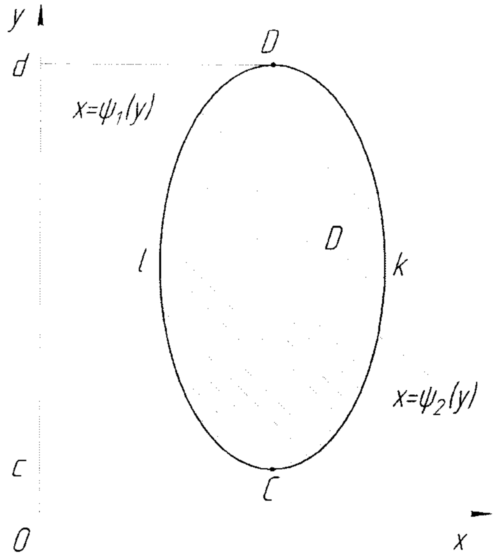


Рисунок 7

Може трапитись так, що для області D одна з функцій $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ не може бути задана одним аналітичним виразом при $x\in[a;b]$. Нехай,

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi_1'(x), a\le x\le c;\\ \varphi_1''(x), c<x\le b,\end{cases} \tag{16}$$

де $\varphi_1'(x)$ і $\varphi_1''(x)$ - функції задані аналітично (рис. 8). За допомогою прямої $x=c$ розділимо область D на дві області, в яких і верхня і нижня межа визначаються однією аналітичною функцією. Тоді повторний інтеграл для області D набуде вигляду

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int_a^c dx\int_{\varphi_1'(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int_c^b dx\int_{\varphi_1''(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \tag{17}$$

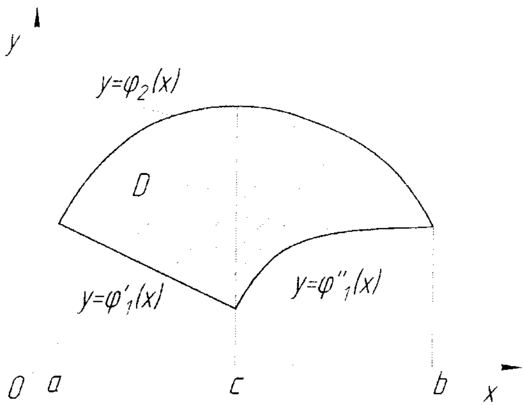


Рисунок 8

Алгоритм знаходження повторного інтеграла

Визначаємо внутрішній інтеграл (у загальному випадку інтеграл зі змінними межами інтегрування) за умови, що зовнішня змінна інтегрування є сталою.

Обчислюємо визначений інтеграл від отриманого виразу по зовнішній змінній інтегрування.

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy$.

$$\int\limits_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy = \left| x = const \right| = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{x^2} = x^4 + \frac{x^6}{3}.$$

$$\int\limits_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} \left(x^2 + y^2\right) dy = \frac{26}{105}.$$

Теорема. Подвійний інтеграл від неперервної функції $f(x,y)$ по правильній області D дорівнює повторному інтегралу від цієї функції по області D, тобто

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \qquad (18)$$

або

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{19}$$

Враховуючи рівність лівих частин виразів (18) та (19) отримаємо

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx. \tag{20}$$

Перехід від лівої частини рівності (20) до правої його частини та навпаки називається зміною порядку інтегрування у повторному інтегралі.

Алгоритм зведення подвійного інтеграла до повторного

1. Будуємо область інтегрування.
2. Визначаємо зовнішню змінну інтегрування.

а) якщо зовнішня змінна інтегрування x:

3а. Якщо область інтегрування неправильна відносно Oy, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо на сукупність правильних відносно Oy областей. Далі інтеграл по неправильній області дорівнює сумі інтегралів по правильних областях, що входять в область інтегрування.

4а. Визначаємо абсциси кінців відрізка a та b, в який проектується (правильна відносно Oy!) область інтегрування на вісь Ox.

5а. Проводимо вертикальні лінії $x = a$ та $x = b$ до перетину із областю і визначаємо верхню та нижню межі області та рівняння, якими вони описуються: $y = \varphi_1(x)$ та $y = \varphi_2(x)$ відповідно.

6а. Якщо верхня або нижня межа (або обидві) не визначаються однією аналітичною функцією, то вертикальними лініями всю область інтегрування розбиваємо на дві або більшу кількість областей, в кожній з яких і верхня і нижня межі визначаються однією аналітичною функцією.

Далі подвійний інтеграл по області інтегрування розглядаємо як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях. Для кожного з інтегралів виконуємо пункти починаючи з 4а.

7а. Подвійний інтеграл по правильній області з простою верхньою та нижньою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

б) якщо зовнішня змінна інтегрування y:

3б. Якщо область інтегрування неправильна відносно Ox, то горизонтальними та вертикальними лініями розбиваємо на сукупність правильних відносно Ox областей. Далі інтеграл по неправильній області дорівнює сумі інтегралів по правильних областях, що входять в область інтегрування.

4б. Визначаємо ординати кінців відрізка c та d, в який проектується (правильна відносно Ox!) область інтегрування на вісь Oy.

5б. Проводимо горизонтальні лінії $y = c$ та $y = d$ до перетину із областю і визначаємо ліву та праву межі області, а також рівняння, якими вони описуються: $x = \psi_1(y)$ та $x = \psi_2(y)$ відповідно.

6б. Якщо ліва або права межа (або обидві) не визначаються однією аналітичною функцією, то горизонтальними лініями всю область інтегрування розбиваємо на дві або більшу кількість областей, в кожній з яких і ліва і права межі визначаються однією аналітичною функцією.

Далі подвійний інтеграл по області інтегрування розглядаємо як суму подвійних інтегралів по отриманих шляхом розбиття областях, для кожного з інтегралів виконуємо пункти починаючи з 4б.

7б. Подвійний інтеграл по правильній області з простою лівою та правою межами обчислюється як повторний інтеграл

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy.$$

Будуємо область інтегрування. Спочатку побудуємо смугу, що визначається граничними значеннями зовнішньої змінної інтегрування, тобто смугу, що обмежена прямими $x=0$ та $x=1$. Далі будуємо нижню $y = x^2$ та верхню межі $y = 2-x$.

Отримали область D, для якої потрібно побудувати повторний інтеграл із зовнішньою змінною y. Для цього можна використовувати алгоритм зведення подвійного інтеграла до повторного починаючи з пункту 3а або 3б в залежності від зовнішньої змінної інтегрування.

На пункті 3б ми не зупиняємось, тому що область правильна відносно Ox.

Згідно з пунктом 4б координати відрізка, у який проектується область D: c=0 та d=2.

Згідно пункту 5б визначаємо рівняння лівої та правої меж області D. Ліва межа описується одним рівняння $x=0$. Права межа описується двома рівняннями $x = \sqrt{y}$ та $x = 2-y$.

Через вузлову точку, в якій відбувається зміна рівняння, згідно з пунктом 6б проводимо горизонтальну пряму y = 1. У результаті область D розбили на дві області D_1 та D_2, для кожної з яких повторюємо пункти алгоритму починаючи з 4б.

Для області D_1: $c=0$, $d=1$, ліва межа $x=0$, права – $x=\sqrt{y}$.

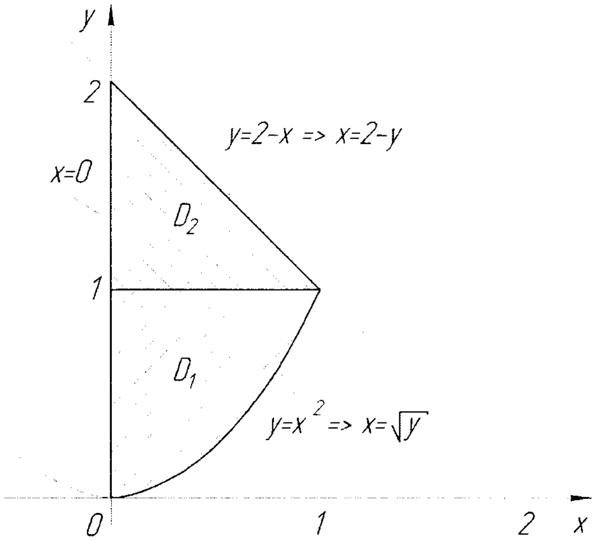


Рисунок 9

Для області D_2: $c=1$, $d=2$, ліва межа $x=0$, права – $x=2-y$

У результаті отримаємо (пункт 7б)

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x+y+3)dxdy$, якщо область D обмежена лініями $x + y = 2$, $x=0$, $y=0$.

Будуємо область інтегрування D (рис. 10).

Нехай x - зовнішня змінна інтегрування. Область правильна відносно Oy та проектується на вісь Ox у відрізок, що обмежений координатами: x-0 та x=2. Нижня межа визначається рівнянням $y = 0$, верхня – відрізок прямої y=2–x. Тому

$$\iint_D (x+y+3)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x+y+3)dy.$$

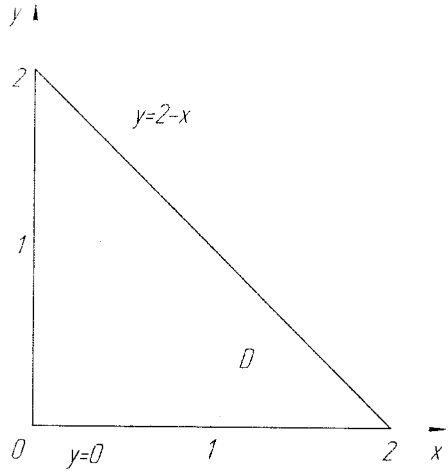


Рисунок 10

$$\int_0^{2-x}(x+y+3)dy=\int_0^{2-x}\left(\left(x+3\right)+y\right)dy=\left.\left((x+3)y+\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^{2-x}=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}\left(2y(x+3)+y^2\right)\right)\right|_0^{2-x}=\left.\left(\frac{1}{2}y\left(2(x+3)+y\right)\right)\right|_0^{2-x}=$$

$$=\left.\left(\frac{1}{2}y\left(2x+6+y\right)\right)\right|_0^{2-x}=\frac{1}{2}\left(2-x\right)\left(2x+6+2-x\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(2-x\right)\left(x+8\right)=\frac{1}{2}\left(2x+16-x^2-8x\right)=\frac{1}{2}\left(-x^2-6x+16\right),$$

$$\int_0^2\frac{1}{2}\left(-x^2-6x+16\right)dx=\left.\frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{3}-3x^2+16x\right)\right|_0^2=\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{3}-12+32\right)=\frac{26}{3}.$$

Отже, $\iint\limits_D(x+y+3)dxdy=\dfrac{26}{3}.$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити повторний інтеграл:

1) $\int_0^1 dx\int_0^2 xydy.$ 2) $\int_0^1 dx\int_0^1\frac{x^2}{1+y^2}dy.$

3) $\int_0^1 dx\int_0^1 e^{x+y}dy.$ 4) $\int_1^2 dy\int_0^{\ln y}e^x dx.$

2. Визначити межі інтегрування в інтегралі $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy$ для заданої області інтегрування D.

1) D – прямокутник: $2 \le x \le 5$, $0 \le y \le 3$

2) D – трикутник: $x + y \le 1$, $x - y \le 1$, $x \ge 0$

3) D – чверть круга: $x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1$

4) D – область, обмежена параболами: $y = x^2, y = \sqrt{x}$.

5) D: $y^2 \le 2x, y \ge 0, x \ge 0, x \le 2$

3. Обчислити подвійний інтеграл:

1) $\iint\limits_{D} \left(x^3 + y^3\right) dxdy,\ D: y = \frac{1}{2}x,\ y = x,\ x = 2.$

2) $\iint\limits_{D} xydxdy,\ D: x \ge 0, y \ge 0,\ x^2 + y^2 = 1.$

3) $\iint\limits_{D} \frac{y}{x} dxdy,\ D: y = x, y = 2x,\ y = 3 - x.$

4) $\iint\limits_{D} \left(y + x\right) dxdy,\ D: y = x^2, y = \frac{1}{x^2},\ x = 2.$

5) $\iint\limits_{D} 4x^2 \sin\left(xy\right) dxdy,\ D: y = 0, y = x,\ x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$

1.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай змінні x, y зв'язані зі змінними u, v співвідношеннями

$$x = \varphi(u,v),\ \ y = \psi(u,v), \tag{21}$$

де $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ – неперервні та диференційовані функції, що взаємно однозначно відображають область D площини Oxy на область D' площини Ouv.

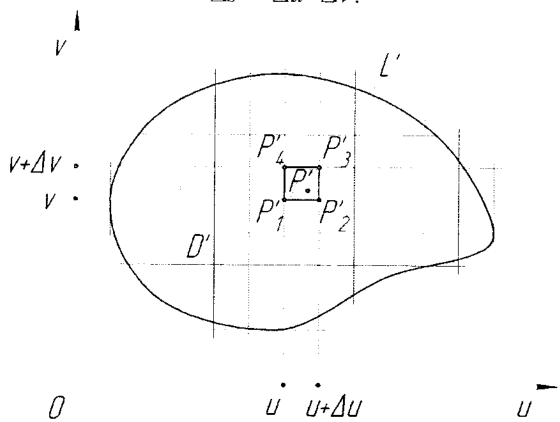
Розглянемо прямокутну систему координат Ouv (рис. 11, а). Тоді кожній точці $P(x,y)$ на площині Oxy (рис. 11, б) однозначно відповідає точка $P'(u,v)$ на площині Ouv із координатами u та v, які визначаються за формулами (21). Числа u та v називаються криволінійними координатами точки P.

Розглянемо в області D' лінію $u = const$. Згідно формул (21) їй в загальному випадку відповідатиме деяка крива на площині Oxy. Аналогічно кожній прямій $v = const$ площини Ouv буде відповідати деяка лінія у площині Oxy.

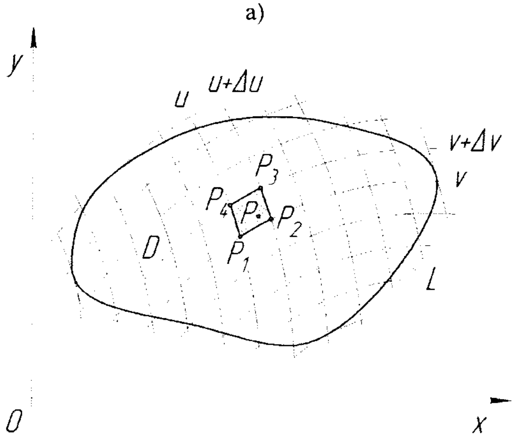
Розіб'ємо область D' прямими $u = const$ та $v = const$ на n прямокутних ділянок S_i'. Відповідними кривими область D розіб'ється на n криволінійних чотирикутники S_i (рис. 11, б).

Розглянемо на площині Ouv прямокутну ділянку S', що обмежена прямими $u = const$, $u + \Delta u = const$, $v = const$, $v + \Delta v = const$, та відповідну їй криволінійну ділянку S в площині Oxy. Площі цих ділянок $\Delta s'$ та Δs. Тоді

$$\Delta s' = \Delta u \cdot \Delta v. \tag{22}$$



а)



б)

Рисунок 11

Нехай в області D задана неперервна функція $z = f(x, y)$. Кожному значенню функції $z = f(x, y)$ в області D відповідає те ж саме значення функції $z = F(u, v)$ в області D', де

$$F(u,v) = f\left[\varphi(u,v), \psi(u,v)\right]. \tag{23}$$

Тоді інтегральну суму від функції $z = f(x,y)$ по області D можна подати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i)\Delta s_i\,, \tag{24}$$

де u_i та v_i визначаються із співвідношень (21) для заданих x_i та y_i.

Обчислимо Δs, тобто площу криволінійного чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ (див. рис. 11а). Координати його вершин визначаються співвідношеннями

$$\begin{cases} P_1(x_1, y_1) \Rightarrow x_1 = \varphi(u,v), y_1 = \psi(u,v); \\ P_2(x_2, y_2) \Rightarrow x_2 = \varphi(u+\Delta u, v), y_2 = \psi(u+\Delta u, v); \\ P_3(x_3, y_3) \Rightarrow x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v), y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v); \\ P_4(x_4, y_4) \Rightarrow x_4 = \varphi(u, v+\Delta v), y_4 = \psi(u, v+\Delta v). \end{cases} \tag{25}$$

При обчисленні площі криволінійного чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ вважатимемо лінії P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 попарно паралельними прямими, крім того, прирости функцій замінимо відповідними диференціалами. Таким чином нехтуватимемо нескінченно малими вищого порядку малості порівняно із Δu, Δv. Тоді координати вершин чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$ визначатимемо як

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi(u,v), && y_1 = \psi(u,v); \\ &x_2 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u, && y_2 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u; \\ &x_3 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, && y_3 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v; \\ &x_4 = \varphi(u,v) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\Delta v, && y_4 = \psi(u,v) + \frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta v. \end{aligned} \tag{26}$$

При зроблених припущеннях криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ можна розглядати як паралелограм, площу якого Δs знайдемо за відомою формулою

$$\Delta s \approx \left|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4}\right| = \left|(x_2 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_2 - y_1)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}\Delta u\Delta v - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\Delta u\Delta v\right| = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v =$$

$$= |J|\Delta u\Delta v,$$

де

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}$$ – визначник Якобі (якобіан) функцій $\varphi(u,v)$ та $\psi(u,v)$. (27)

Отже,

$$\Delta s\approx|J|\Delta s'. \tag{28}$$

Рівність (28) є наближеною, так у процесі обчислення площі ми нехтували нескінченно малими більшого порядку малості. Однак, чим менше будуть розміри ділянок S та S', тим дана рівність буде точніше. Рівність стає точною при розгляді границі, коли діаметри ділянок S та S' прямують до нуля:

$$\lim_{diam\,S\to0}\Delta s=|J|\lim_{diam\,S'\to0}\Delta s'. \tag{29}$$

Рівність (29) діє для усіх ділянок S_i у формулі (24), тому

$$\lim_{diam\,S\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta s_i=\lim_{diam\,S'\to0}\sum_{i=1}^{n}F(u_i,v_i)|J|\Delta s_i'. \tag{30}$$

Тоді з (30), якщо якобіан J зберігає знак в області D, отримаємо формулу заміни змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J|dudv. \tag{31}$$

Подвійні інтеграли в полярних координатах

Прямокутні декартові (x,y) та полярні (ρ,φ) координати зв'язані між собою такими співвідношеннями:

$$\begin{cases}x=\rho\cos\varphi;\\ y=\rho\sin\varphi;\end{cases} \tag{32}$$
$$(\rho\ge0, 0\le\varphi<2\pi).$$

Тоді згідно (31), враховуючи, що якобіан

$$J=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho, \tag{33}$$

отримаємо формулу переходу від декартових до полярних координат у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \tag{34}$$

В узагальнених полярних координатах, для яких

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi; \\ y = b\rho\sin\varphi; \end{cases} \tag{35}$$

$$(\rho \ge 0, 0 \le \varphi < 2\pi).$$

маємо (так як якобіан $J = ab\rho$):

$$\iint_D f(x,y)dxdy = ab\iint_{D'} f(a\rho\cos\varphi, b\rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi \tag{36}$$

Представлення отриманих у праві частині формул (34) та (36) подвійних інтегралів у виді повторних відбувається залежно від того, де знаходиться полюс O полярної системи координат відносно області інтегрування: поза, всередині чи на границі області D.

1. Якщо полюс O полярної системи координат знаходиться поза областю D, що обмежена променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ та лініями AmB, AnB (їх рівняння відповідно $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\rho_1(\varphi) \le \rho_2(\varphi)$ – функції задані на відрізку $[\alpha, \beta]$) (рис. 12), то подвійний інтеграл в полярних координатах зводиться до повторного інтеграла за правилом

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,. \tag{37}$$

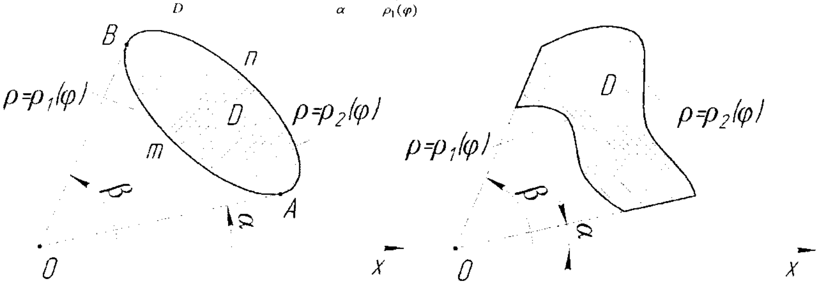


Рисунок 12

2. Якщо полюс O знаходиться всередині області D і рівняння границі області D в полярній системі координат має вигляд $\rho = \rho(\varphi)$ (рис. 13), тоді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,. \tag{38}$$

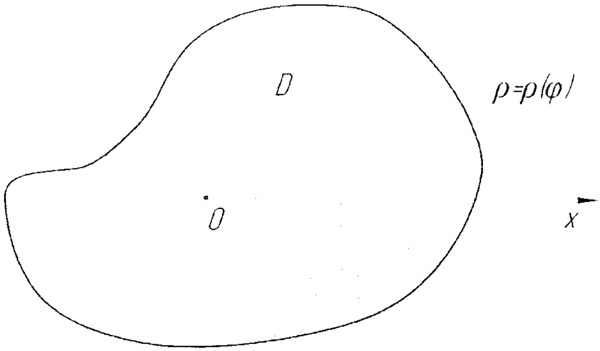


Рисунок 13

3. Якщо полюс O знаходиться на границі області D (рис. 14), і рівняння її границі в полярній системі координат має вигляд $\rho = \rho(\varphi)$ значення α та β визначають граничні кути променів, що перетинають область, то подвійний інтеграл представляється у вигляді

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{0}^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho \qquad (39)$$

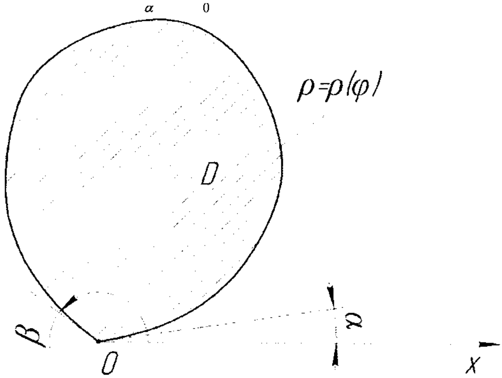


Рисунок 14

Аналогічні формули мають місце також і для випадку узагальнених полярних координат.

Зауваження. До полярної системи координат варто переходити, якщо область інтегрування є кругом або частиною круга, до узагальненої полярної – якщо область інтегрування обмежена еліпсом.

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy$*, якщо область* D *– круг радіусом* R *з центром в початку координат.*

Враховуючи, що область D *– круг, то згідно із зауваженням доцільно перейти до полярної системи координат. Так як полюс полярної системи координат лежить у середині області, отримаємо:*

$$\iint\limits_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{(\rho^2\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\varphi)^3}\,\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \iint\limits_D \rho^4 d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = 2\pi\frac{R^5}{5}.$$

Завдання для розв'язання

1. Змінити порядок інтегрування:

1) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{y^4}^4 f(x,y)\,dx.$

2) $\int\limits_{-1}^4 dx \int\limits_{-x-1}^{1+x} f(x,y)\,dy.$

3) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

4) $\int\limits_{-1}^4 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{x+3} f(x,y)\,dy.$

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)\,dy.$

6) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_2^8 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{4} f(x,y)\,dy.$

2. Обчислити подвійний інтеграл по заданій області D:

1) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, де D – область, яка обмежена параболою $y=x^2$ та прямими $x=0, x=1, y=0$.

2) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, де D – область, яка обмежена параболою $y=4-(x-1)^2$ та прямими $x=0,\ y=\dfrac{3x}{2}$.

3) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$, де D – область, яка обмежена параболою $y^2=x$ та прямими $x=0,\ y=1$.

4) $\iint\limits_D \left(6xy^2-12x^2y\right)dxdy$, де D – прямокутник $0\le x\le 1,\ 2\le y\le 3$.

3. Обчислити подвійний інтеграл за допомогою переходу до полярної

системи координат:

1) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – коло радіусом $R=2$ з центром у початку координат: $x^2+y^2\le 4$.

2) $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, де область D обмежена лемніскатою Бернуллі $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$, $\left(x\ge 0, a>0\right)$.

3) $\iint\limits_D arctg\dfrac{y}{x}\,dxdy$, де D – частина кільця: $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 9$, $y\ge\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y\le x\sqrt{3}$.

4) $\iint\limits_D \ln\left(x^2+y^2\right)dxdy$, де D – кільце: $x^2+y^2=1, x^2+y^2=e^2$.

5) $\iint\limits_D \dfrac{\arcsin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, де D: $x^2+y^2\le 1, \left(x, y\ge 0\right)$.

1.3. Застосування подвійних інтегралів

Обчислення площ плоских фігур

Згідно з властивістю 1 подвійного інтеграла, площа області D обчислюється за формулою

$$S_D=\iint\limits_D dS. \qquad (40)$$

В декартовій системі координат формула (40) запишеться у вигляді

$$S_D=\iint\limits_D dx\,dy. \qquad (41)$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2x$, $y=x$.

Відповідно до рівнянь границі області D *будуємо дану фігуру (рис. 15).*

Отже, шукана площа

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{x^2-2x}^{x} dy=\int\limits_0^3 (x-x^2+2x)dx=\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.$$

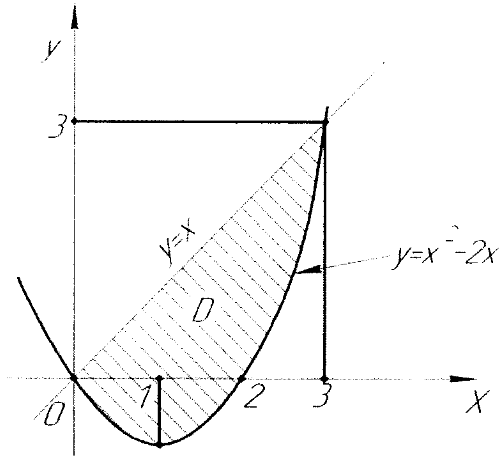


Рисунок 15

Приклад 6. Обчислити площу фігури, що обмежена лінією $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ a>0$.

Перейдемо до полярної системи координат, в якій рівняння даної кривої має вигляд:

$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

$\rho^2 = a^2\cos(2\varphi),\ \rho = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$

Останнє рівняння задає криву, яка називається лемніскатой Бернуллі (рис. 16).

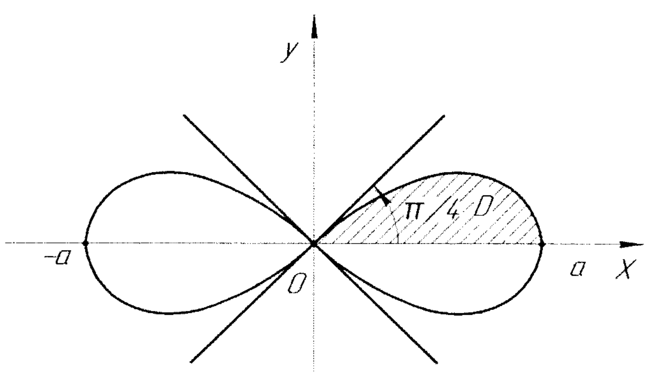


Рисунок 16

Як видно з рис. 16, крива симетрична відносно координатних осей і площа S фігури, що обмежена цією кривою, виражається подвійним інтегралом

$$S = 4\iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi,$$

де D – область, яка знаходиться в першому квадранті. Тоді ,

$$S = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \rho d\rho = 4\int_0^{\pi/4} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos(2\varphi)d\varphi = a^2 \sin(2\varphi)\Big|_0^{\pi/4} = a^2$$

Обчислення об'ємів тіл

Для обчислення об'ємів тіл використовують властивість 3 подвійного інтеграла, яка відображає його геометричний зміст.

Приклад 7. Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$ $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Дане тіло обмежено координатними площинами, площиною $x + y = 1$, яка паралельна осі Oz, і параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$ (рис. 17).

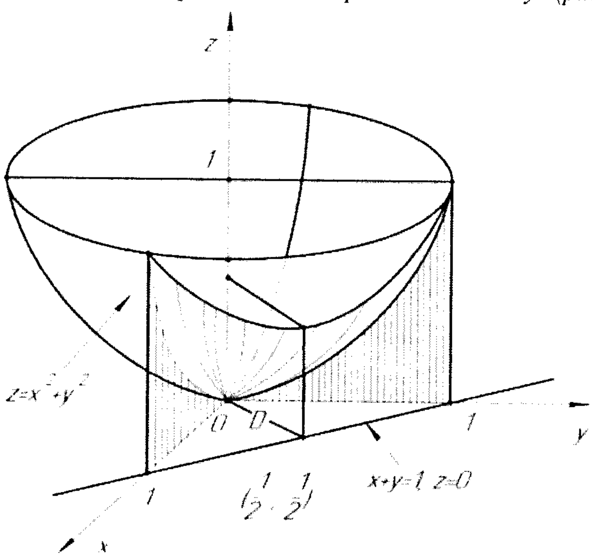


Рисунок 17

Тоді

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy,$$

де область D *обмежена трикутником, який лежить в площині* Oxy. *Тому*

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{(1-x)^3}{3} \right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{(1-x)^4}{12} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла обмеженого поверхнями $y = 1 + x^2 + z^2$, $y = 5$.

Тіло, що розглядається, обмежено параболоїдом обертання з віссю Oy *та площиною* $y = 5$, *що перпендикулярна до осі* Oy *(рис. 18). Його проекція на площину* Oxz *– круг, який обмежений колом* $x^2 + z^2 = 4$. *Тоді шуканий об'єм тіла*

$$V = \iint_D (5 - 1 - x^2 - z^2)dxdz = \iint_D (4 - x^2 - z^2)dxdz.$$

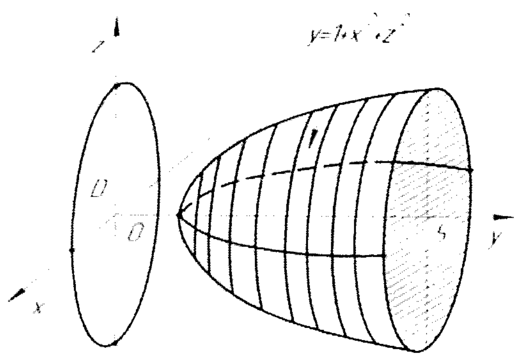


Рисунок 18

Перейдемо в отриманому інтегралі до полярних координат за допомогою рівностей $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$. *Тоді*

$$4-x^2-z^2=4-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi=4-\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4-\rho^2;$$

$$x^2+z^2=4\Rightarrow\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\Rightarrow\rho=2;$$

$$dxdz=\rho d\rho d\varphi;$$

$$V=\iint\limits_D(4-\rho^2)\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(4\rho-\rho^3)d\rho=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi.$$

Обчислення площ поверхонь

Нехай в області D_z площини Oxy задана неперервна функція $z=f(x,y)$, що має неперервні частинні похідні. Поверхня, яка визначається такою функцією називається гладенькою. Очевидно, що область D_z є проекцією поверхні, що розглядається, на площину Oxy. Площа Q_z поверхні $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D_z$ обчислюється за формулою

$$Q_z=\iint\limits_{D_z}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad (42)$$

У випадку, коли гладенька поверхня задана функцією $x=f(y,z)$ (в області D_x) або функцією $y=f(x,y)$ (в області D_y), площа цієї поверхні обчислюється за формулою

$$Q_x=\iint\limits_{D_x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz \qquad (43)$$

або

$$Q_y=\iint\limits_{D_y}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz \qquad (44)$$

Приклад 9. Обчислити площу частини конуса $y=2\sqrt{x^2+y^2}$, *яка розташована всередині циліндра* $x^2+y^2=4x$.

Так як поверхня задана функцією виду $y=f(x,z)$, *то її площу* Q_y *потрібно обчислювати за формулою (44), де область* D_y *– проекція даної поверхні на площину* Oxz, *тобто круг, що обмежений колом* $(x-2)^2+z^2=4$ *(рис. 19).*

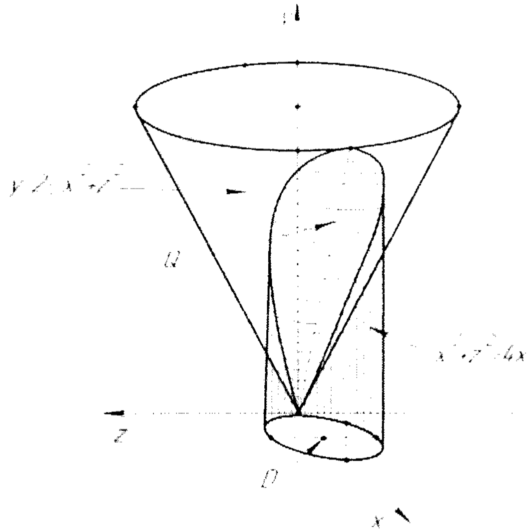


Рисунок 19

Оскільки

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, \; \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{2z}{\sqrt{x^2 + z^2}},$$

то шукана площа

$$Q_y = \iint\limits_{D_y} \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2 + z^2} + \frac{4z^2}{x^2 + z^2}}\, dxdz = \sqrt{5} \iint\limits_{D_y} dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z = \rho\cos\varphi, \\ x = \rho\sin\varphi, \\ dxdz = \rho d\rho d\varphi \\ (x-2)^2 + z^2 = 4 \Rightarrow (\rho\sin\varphi - 2)^2 + \rho^2\cos^2\varphi = 4 \Rightarrow \\ \rho = 4\sin\varphi \end{array} \right| = \sqrt{5}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{4\sin\varphi} \rho d\rho =$$

$$= 8\sqrt{5}\int\limits_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = 4\sqrt{5}\int\limits_0^{\pi}(1 - \cos 2\varphi)d\varphi = 4\sqrt{5}\int\limits_0\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 4\pi\sqrt{5}.$$

Обчислення маси матеріальної пластинки

Маса матеріальної пластинки шукається виходячи із фізичного змісту подвійного інтеграла (властивість 2, формула (4)).

Приклад 10. Обчислити масу матеріальної пластинки, яка лежить у площині та обмежена лініями $x=(y-1)^2$, $y=x-1$, якщо її поверхнева густина $\mu=y$.

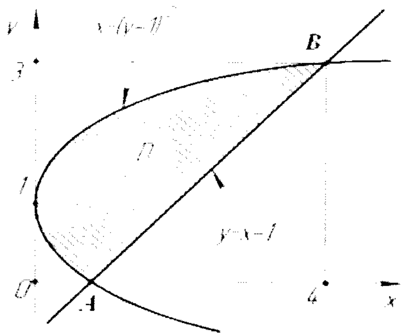


Рисунок 20

Згідно з рис. 20 та формули (4) шукана маса

$$m=\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_{(y-1)^2}^{y+1} ydx=\int\limits_0^3 yx\Big|_{(y-1)^2}^{y+1}dy=\int\limits_0^3 y(y+1-(y-1)^2)dy=$$

$$=\int\limits_0^3(3y^2-y^3)dy=\left(y^3-\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^3=\frac{27}{4}$$

Обчислення статичних моментів та координат центра мас матеріальної пластинки

Якщо на площині Oxy задана матеріальна пластинка D з неперервною поверхневої густиною $\mu(x,y)$, то координати її центра мас $C(x_c,y_c)$ визначається за формулами:

$$\begin{cases} x_c=\dfrac{\iint\limits_D x\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}, \\ y_c=\dfrac{\iint\limits_D y\mu(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \mu(x,y)dxdy}. \end{cases} \qquad (45)$$

Величини

$$M_x = \iint_D y\mu(x,y)dxdy, \tag{46}$$

$$M_y = \iint_D x\mu(x,y)dxdy \tag{47}$$

називаються статичними моментами пластинки D відносно осей Ox та Oy відповідно.

Приклад 11. Знайти координати центра мас пластинки D, що лежить у площині Oxy та обмежена лініями $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$ (рис. 21), якщо її густина $\mu = xy$.

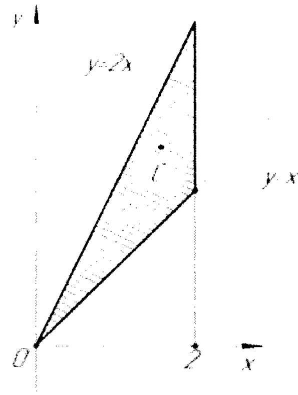


Рисунок 21

Спочатку визначимо масу пластинки D:

$$m = \iint_D xydxdy = \int_0^2 xdx \int_x^{2x} ydy = \int_0^2 x \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x(4x^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8}x^4\Bigg|_0^2 = 6.$$

Згідно формул (45), координати центра мас:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint_D x^2 ydxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2 dx \int_x^{2x} ydy = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2 \frac{1}{2}(4x^2 - x^2)dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx = \frac{x^5}{20}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{5},$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iint_D xy^2 dxdy = \frac{1}{6}\int_0^2 xdx \int_x^{2x} y^2 dy = \frac{1}{6}\int_0^2 x \cdot \frac{y^3}{3}\Bigg|_x^{2x} = \frac{7}{18}\int_0^2 x^4 dx = \frac{7}{18}\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2 = \frac{112}{45}.$$

Обчислення моментів інерції матеріальної пластинки

Моменти інерції відносно початку координат та осей координат Ox, Oy матеріальної пластинки D із неперервно розподіленою поверхневою густиною $\mu(x.y)$, яка лежить в площині Oxy, обчислюються за формулами:

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\mu(x,y)dxdy, \tag{48}$$

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)dxdy, \tag{49}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)dxdy. \tag{50}$$

Приклад 12. Обчислити моменти інерції відносно точки границі однорідного кола та його діаметру, якщо радіус кола R, *а його вага* P.

Візьмемо декартову систему координат, початок якої лежить на границі кола, а центр кола визначається координатами $(R;0)$ *(рис. 22). Тоді задача зведеться до знаходження моментів інерції кола відносно початку координат та осі* Ox.

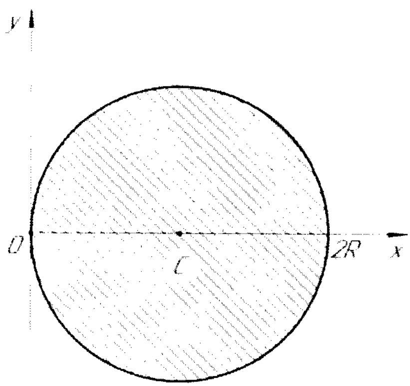


Рисунок 22

Так як коло однорідне, то його густина μ *стала і визначається за формулою*

$$\mu = P/(g\pi R^2).$$

Рівняння кола у вибраній системі координат має вигляд $(x-R)^2 + y^2 = R^2$, *а в полярній –* $\rho = 2R\cos\varphi$. *Тоді згідно з формулами (48) -(50) отримаємо*

$$I_0=\mu\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\begin{bmatrix} x=\rho\cos(\varphi); & x^2+y^2=\rho^2; & -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2} \\ y=\rho\sin(\varphi); & J=\rho; & 0\le\rho\le 2R\cos(\varphi)\end{bmatrix}=$$

$$=\mu\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2R\cos(\varphi)}\rho^3d\rho=\mu\cdot 4R^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4(\varphi)d\varphi=8\mu R^4\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=2\mu R^4\int_0^{\pi/2}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=2\mu R^4\left(\varphi+\sin 2\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{3}{2}\mu\pi R^4=\frac{3}{2}\frac{P}{g}R^2.$$

$$I_x=\mu\iint_D y^2dxdy=\mu\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}\rho^3\sin^2(\varphi)d\rho=4\mu R^4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4(\varphi)\sin^2(\varphi)d\varphi=$$

$$=2\left(4\mu R^4\int_0^{\pi/2}\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\cos^2(\varphi)d\varphi\right)=\begin{bmatrix}\sin(2\varphi)=2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\\ \cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)=\dfrac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\\ \cos^2(\varphi)=\dfrac{1+\cos(2\varphi)}{2}\end{bmatrix}=$$

$$=8\mu R^4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\cdot\frac{1+\cos(2\varphi)}{2}d\varphi=\mu R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\varphi)d\varphi+$$

$$+\mu R^4\int_0^{\pi/2}\sin^2(2\varphi)\cos(2\varphi)d\varphi=\mu R^4\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(1-\cos 4\varphi)d\varphi+\mu R^4\frac{\sin^3 2\varphi}{6}\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{2}\mu R^4\left(\varphi-\frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}\mu R^4=\frac{1}{4}\frac{P}{g}R^2.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити площу плоскої фігури, яка обмежена лініями:

1) $2x-y=0,\ 2x-y-7=0,\ x-4y+7=0,\ x-4y+14=0.$

2) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ y=x,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0).$

3) $x+y+5=0,\ x-y-1=0,\ x+3y+7=0.$

4) $y=-2,\ y=x+2,\ y=2,\ y^2=x.$

5) $y=1-x^2,\ y=x-1.$

2. Обчислити об'єми тіл, які обмежені поверхнями:

1) $z=0, z=y^2, 2x+3y=6, x=0.$

2) $z=x^2, x-2y+2=0, x+y-7=0, z\geq 0.$

3) $z=2x^2+y^2, x+y=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$

4) $z=y^2, x+y=1, x\geq 0, z\geq 0.$

5) $z=x, y=4, x=\sqrt{25-y^2}, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.$

3. Обчислити площу плоскої фігури. Обчислення проведіть у полярній системі координат.

1) $x^4-y^4=\left(x^2+y^2\right)^3.$

2) $\left(x^2+y^2\right)^3=4a^{2xy}\left(x^2-y^2\right).$

3) $\rho=a\sin(3\varphi).$

4) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2.$

5) $x^2+y^2+4y\leq 0, y\geq\sqrt{3}x, x\leq 0.$

4. Обчислити масу неоднорідної пластинки, яка обмежена заданими лініями, якщо поверхнева густина в кожній точці описується функцією μ.

1) $x=0, y^2=1-x, \mu=2-x-y.$

2) $x=0, y=0, x+y=1, \mu=x^2+y^2.$

3) $x=0, y=0, x+y=2, \mu=x^2+y^2.$

4) $x=2, y=x, y=3x, \mu=2x^2+y^2.$

5) $x=0, y=1, y=x, \mu=x^2+2y^2.$

5. Обчислити статичний момент однорідної пластинки, яка обмежена заданими лініями, відносно вказаної вісі, застосувавши перехід до полярної системи координат.

1) $x^2+y^2-2ay\leq 0, x^2+y^2-2ax\geq 0, x\geq 0, 0x.$

2) $x^2+y^2-2ax=0, y-x\leq 0, x+y\geq 0, 0y.$

3) $x^2+y^2-2ay=0, x-y\leq 0, 0x.$

4) $x^2+y^2-2ay=0, x+y\geq 0, x\leq 0, 0x.$

5) $x^2+y^2-2ay=0, x^2+y^2-ay=0, x\leq 0, 0x.$

1.4. Потрійний інтеграл та його обчислення

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в замкнутій області V, яка обмежена деякою замкненою кусково-гладенькою поверхнею S. З допомогою будь-яких гладеньких поверхонь розіб'ємо область V на n елементарних областей $V_i (i = \overline{1,n})$, об'єми яких позначимо через Δv_i. В кожній елементарній області V виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ та побудуємо суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i \tag{51}$$

Через d_i позначимо максимальний діаметр елементарної області V_i.

Сума (51) називається n-ою інтегральною сумою функції $f(x,y,z)$ по області V.

Границя сум (51) знайдених при умові що $d_i \to 0$ називається **потрійним інтегралом** функції $f(x,y,z)$ по області V і позначається $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv$. Таким чином за означенням

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim_{d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x,y,z)\Delta v_i \tag{52}$$

Якщо підінтегральна функція $f(x,y,z)$ неперервна в області V то інтеграл (52) існує та не залежить від способу розбиття V на елементарні області V_i та вибору точок M_i.

Більшість відмічених в п. 1.1 властивостей подвійних інтегралів (лінійності, адитивності, теореми про середнє значення, оцінку інтеграла) справедливі також і для потрійних інтегралів, тому приведемо лише ті властивості потрійних інтегралів, які дещо відрізняються від властивостей подвійних

Якщо в області V $f(x,y,z) \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_V dv = v. \tag{53}$$

де v - об'єм області V.

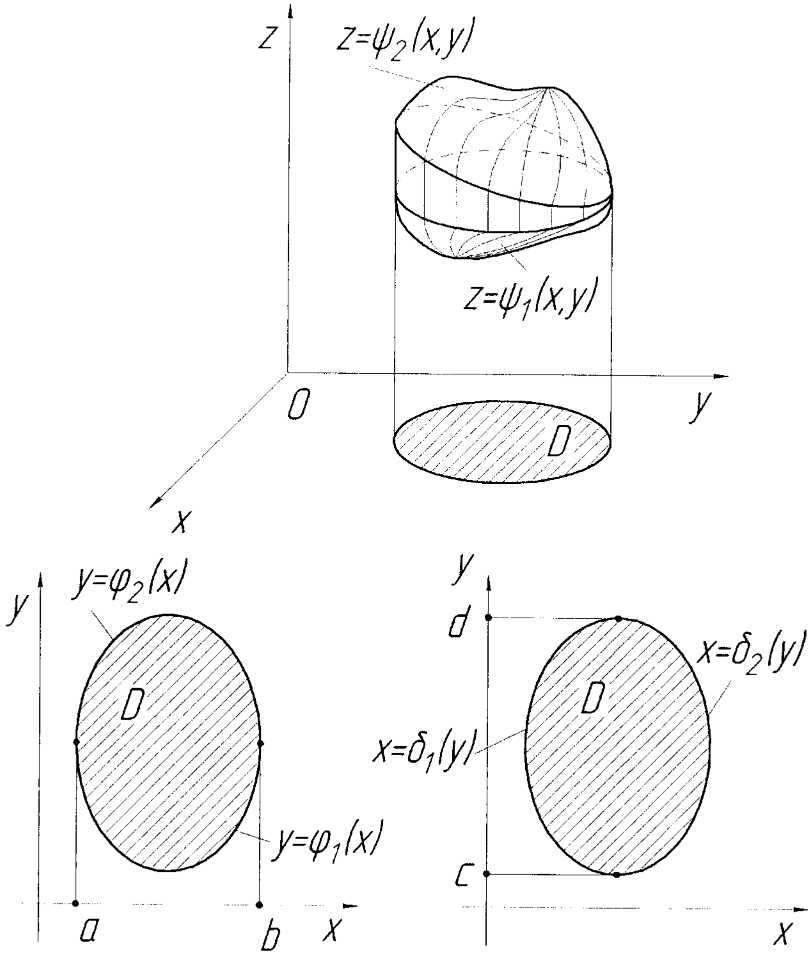
У випадку коли підінтегральна функція $f(x,y,z)$ визначає густину $\delta(x,y,z)$ тіла, що займає область V, то

$$m = \iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv, \tag{54}$$

де m – маса тіла.

В декартові системі координат область V зручно розбивати на елементарні області площинами, які паралельні координатам площинам; при цьому елемент об'єму $dv = dxdydz$.

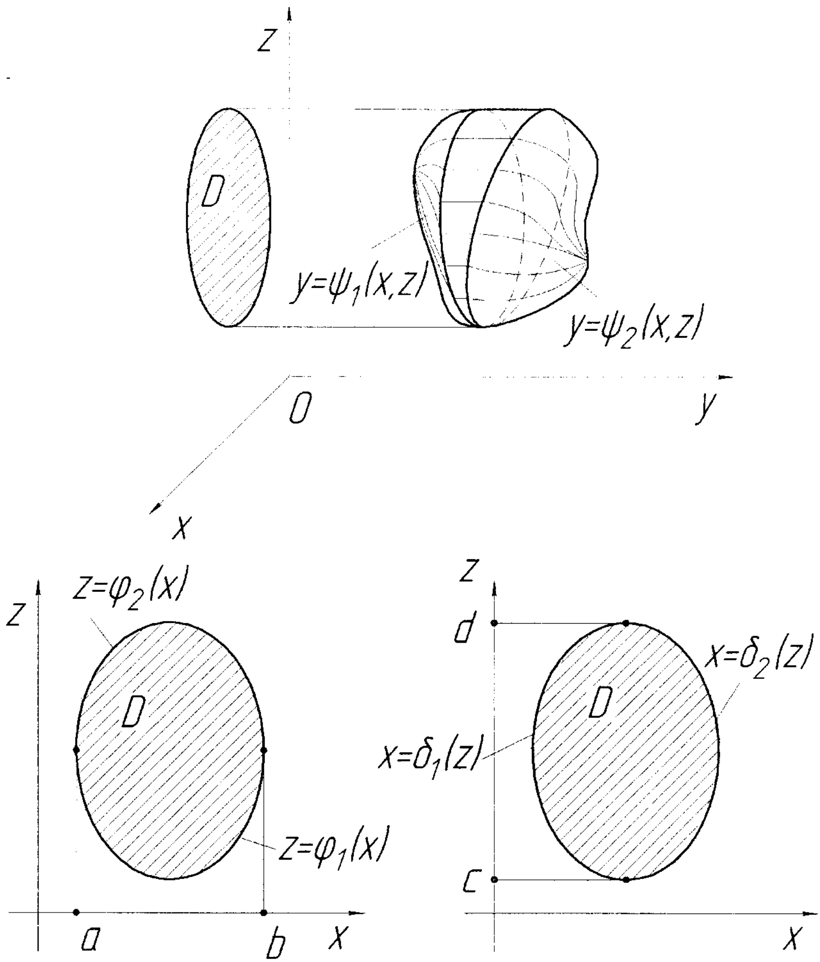
Розглянемо правильну область V (довільні прямі паралельні осям координат, перетинають границю області V не більше ніж у двох точках). Схема зведення потрійного інтеграла $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ до трикратного приведена на рис. 23–25.



$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (55)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\delta_1(y)}^{\delta_2(y)} dx \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \qquad (56)$$

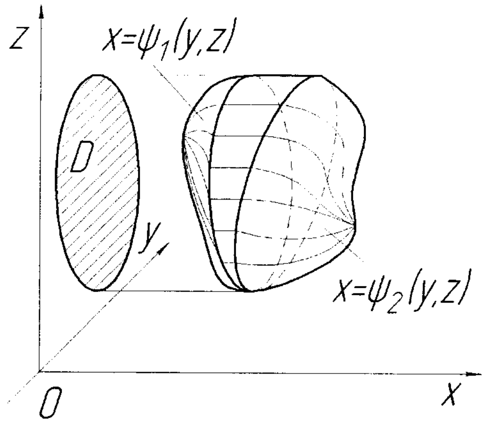
Рисунок 23

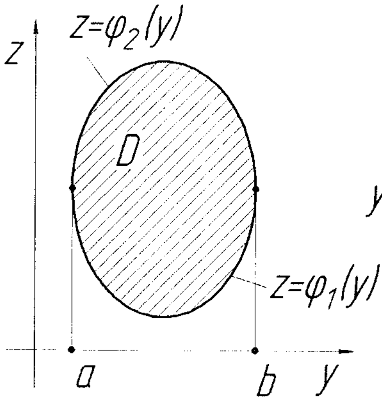


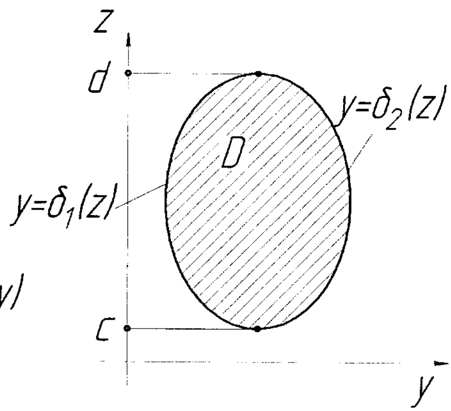
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dz \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy \qquad (57)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dx \int\limits_{\psi_1(x,z)}^{\psi_2(x,z)} f(x,y,z)dy \qquad (58)$$

Рисунок 24







$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dz \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \qquad (59)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_c^d dz \int\limits_{\delta_1(z)}^{\delta_2(z)} dy \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \qquad (60)$$

Рисунок 25

Таким чином, для знаходження значення потрійного інтеграла потрібно знайти відповідний йому трикратний інтеграл.

Правило знаходження трикратного інтеграла: спочатку інтегрують функцію $f(x,y,z)$ по внутрішній змінній інтегрування при умові, що дві інші є константами, потім результат інтегрують по проміжній змінній при сталій зовнішній змінній. У результаті отримаємо визначений інтеграл, який знаходимо. Одержане число є шуканим значенням трикратного інтеграла.

Більш складні (неправильні) області інтегрування розбивають на скінченну кількість правильних областей і, згідно властивості адитивності, результати обчислення по цим областях підсумовуються.

Приклад 13. Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint\limits_V (2x+y)dxdydz$, *де* V *обмежена поверхнями:* $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 1$, $z = 1 + x^2 + y^2$.

По заданим поверхням будуємо область інтегрування та визначаємо область D (рис. 26).

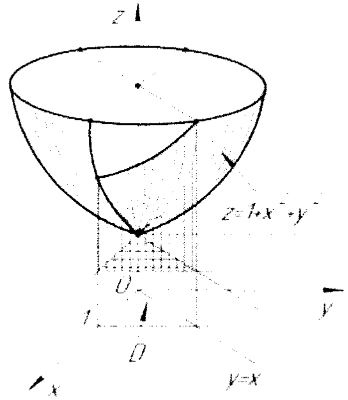


Рисунок 26

Згідно із схемою на рис. 23 та формулою (55), отримаємо

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_1^{1+x^2+y^2} (2x+y)dz = \int_0^1 dx \int_0^x (2x+y)z \Big|_1^{1+x^2+y^2} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x (2x+y)(x^2+y^2)dy = \int_0^1 dx \int_0^x \left(2x^3 + 2xy^2 + x^2y + y^3\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^3y + \frac{2}{3}xy^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4\right)\Bigg|_0^x dx = \int_0^1 \frac{41}{12}x^4dx = \frac{41}{12}\frac{x^4}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{41}{60}.$$

Нехай функції

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v,w), \\ y = \psi(u,v,w), \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases} \tag{61}$$

неперервні та мають неперервні частинні похідні, якобіан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{62}$$

та зберігають знак в області V' зміни змінних u,v,w. Якщо функції (61) відображають взаємнооднозначно область V в область V', то тоді справедлива формула переходу до нових змінних u,v,w у потрійному інтегралі

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))|J|dudvdw. \tag{63}$$

Для циліндричних координат ρ,φ,z згідно з рис. 27 маємо:

$$\begin{aligned} & x = \rho\cos(\varphi),\ y = \rho\sin(\varphi),\ z = z, \\ & 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho < \infty, -\infty < z < \infty, \\ & J = \rho,\ dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz. \end{aligned} \tag{64}$$

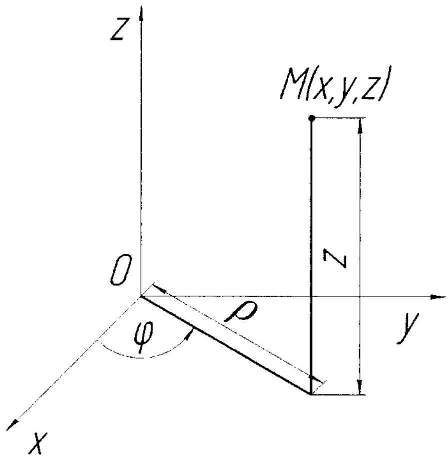


Рисунок 27

Для сферичних координат r, φ, θ (r - радіус-вектор, φ - довгота, θ - широта) (рис. 28) отримуємо:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi),\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z = r\cos(\theta),$$
$$0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi, \tag{65}$$
$$J = r^2\sin(\theta),\ dx\,dy\,dz = r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

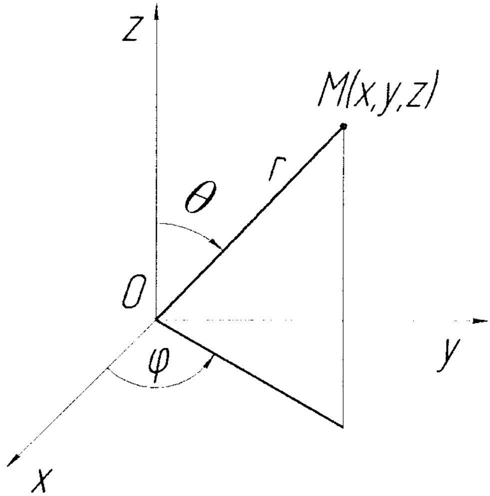


Рисунок 28

В узагальнених сферичних координатах

$$x = ar\sin(\theta)\cos(\varphi),\ y = br\sin(\theta)\sin(\varphi),\ z = cr\cos(\theta),$$
$$0 \le r \le \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi, \tag{66}$$
$$J = abcr^2\sin(\theta),\ dx\,dy\,dz = abcr^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Підставивши (64) – (66) в формулу (63) отримаємо формули переходу в потрійних інтегралах від декартових до циліндричних, сферичних чи узагальнених сферичних координат.

Приклад 14. Обчислити $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\,dxdydz$, *якщо область інтегрування обмежена поверхнями* $x^2 + y^2 = 4,\ z = 1,\ z = 2 + x^2 + y^2$.

Згідно заданих поверхонь побудуємо область V *(рис. 29).*

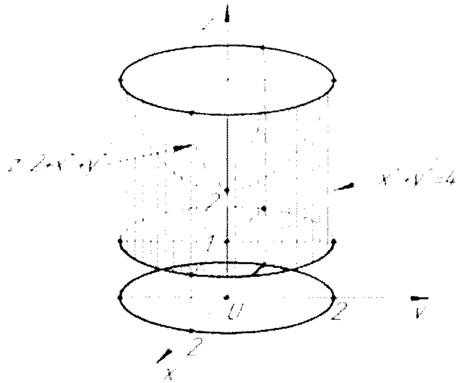


Рисунок 29

Перейдемо у заданому інтегралі до циліндричної системи координат:

$$I = \iiint\limits_{V'} \rho\rho d\rho d\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 d\rho \int\limits_1^{2+\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2(1+\rho^2)d\varphi =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \int\limits_0^2 \left(\rho^2+\rho^4\right)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^3}{3}+\frac{\rho^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{272}{15\pi}.$$

Завдання для розв'язання

1. Розставити границі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$, якщо область інтегрування V обмежена поверхнями. Виконати рисунок області інтегрування.

1) $x \geq 0, y = 2x, y = 1, z \geq 0, x + y + z = 3.$

2) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + 3y = 6, z = 3 + x^2 + y^2.$

3) $y = x, y = -x, y = 2, z \geq 0, z = 3\left(x^2 + y^2\right).$

4) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 3x + 4y = 12, z = 6 - x^2 - y^2.$

5) $x = 2, y = 4x, y = 3\sqrt{x}, z \geq 0, x = 4.$

2. Обчислити потрійний інтеграл.

1) $\iiint\limits_V \left(2x - y^2 - z\right)dxdydz, V: 1 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 0.$

2) $\iiint\limits_V 5xyz^2 dxdydz, V: -1 \leq x \leq 0, 2 \leq y \leq 3, 1 \leq z \leq 2.$

3) $\iiint\limits_V \left(x + 2y + 3z^2\right)dxdydz, V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2.$

4) $\iiint\limits_V (x-y-z)dxdydz, V: 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1, -2 \le z \le 1.$

5) $\iiint\limits_V \frac{1}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^2}dxdydz, V: x=0, y=0, z=0, \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1.$

3. Обчислити потрійний інтеграл з допомогою циліндричних або сферичних координат.

1) $\iiint\limits_V z^2 dxdydz, V: 1 \le x^2+y^2 \le 36, y \ge x, x \ge 0, z \ge 0.$

2) $\iiint\limits_V ydxdydz, V: 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 16, y \le \sqrt{3}x, y \ge 0, z \ge 0.$

3) $\iiint\limits_V \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}dxdydz, V: x \ge 0, z \ge 0, y \ge \sqrt{3}x, 4 \le x^2+y^2+z^2 \le 36.$

4) $\iiint\limits_V \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz, V: x^2+y^2=16y, y+z=16, x \ge 0, z \ge 0.$

5) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz, V: x^2+y^2+z^2=1, z=3x^2+y^2+z^2=4.$

1.5 Застосування потрійних інтегралів

Обчислення об'ємів тіл

Об'єм тіла обчислюється відповідно до властивості 1 потрійного інтеграла та формули (53).

Приклад 15. Обчислити об'єм тіла, що обмежений поверхнями $z=1$, $z=5-x^2-y^2$.

За заданими рівняннями поверхонь в декартових координатах будуємо область V *(рис. 30).*

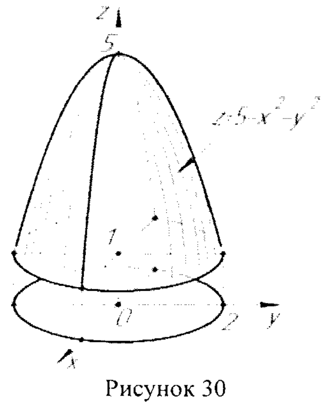


Рисунок 30

Тоді

$$v=\iiint\limits_V dx\,dy\,dz.$$

Перейдемо до циліндричної системи координат

$$dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz,$$

$$x=\rho\cos(\varphi),y=\rho\sin(\varphi),z=z,$$

$$z=1\Rightarrow z=1,$$

$$z=5-x^2-y^2\Rightarrow z=5-\rho^2.$$

$$v=\iiint\limits_V \rho d\rho d\varphi dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_1^{5-\rho^2}dz=$$

$$=2\pi\int\limits_0^2\rho(5-\rho^2-1)d\rho=2\pi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=8\pi.$$

Приклад 16. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Перейдемо до узагальненої сферичної системи координат (66)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\cos^2(\theta)=1\Rightarrow r=1.$$

Тоді

$$v=\iiint\limits_{V'}abcr^2\sin\theta dr d\varphi d\theta,$$

де V' - область, в яку відображається внутрішність еліпсоїда при переході до узагальнених сферичних координат. Рівняння поверхні, обмежуючі область V', в узагальнених сферичних координатах отримуються шляхом підстановки в рівняння еліпсоїда значень x,y,z з формул (66):

$$r^2\sin^2(\theta)\cos^2(\varphi)+r^2\sin^2(\theta)\sin^2(\varphi)+r^2\cos^2(\theta)=1, r=1.$$

Отже,

$$v=\iiint\limits_V abc\,r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta=abc\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\sin(\theta)d\theta\int\limits_0^1 r^2dr=$$

$$=abc(\varphi)\Big|_0^{2\pi}\left(-\cos(\theta)\right)\Big|_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=abc(2\pi-0)\left(-\left(\cos(\pi)-\cos(0)\right)\right)\frac{1}{3}=$$

$$=\frac{2}{3}\pi abc\left(-(-1-1)\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Обчислення маси тіла

Маса матеріальної об'ємної області V обчислюється, виходячи із фізичного змісту потрійного інтеграла (54).

Приклад 17. Обчислити масу тіла, що обмежене поверхнею конуса $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ та площиною $z = 0$, якщо густина тіла $\delta(x,y,z) = z$.

Вершина конуса знаходиться в точці $O_1(0;0;2)$. Проекція частини конуса, що обмежена площиною $z = 0$, на площину Oxy – круг що обмежений колом $x^2 + y^2 = 4$ (рис. 31).

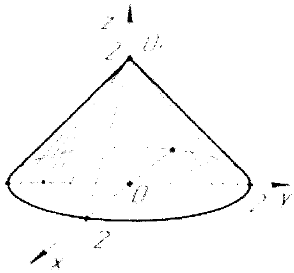


Рисунок 31

Тоді маса

$$m = \iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{l} dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\ (z-2)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = 2-\rho \\ x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_0^{2-\rho} z\rho\,dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \left(\frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{2-\rho} d\rho = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4\rho - 4\rho^2 + \rho^3 \right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{4}{3}\rho^3 + \frac{1}{4}\rho^4 \right)\Bigg|_0^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3}.$$

Обчислення координат центра мас та статичних моментів тіла

Нехай у просторі задано деяке тіло V з неперервно розподіленою об'ємною густиною $\delta = \delta(x,y,z)$. Тоді координати центра мас цього тіла визначається за формулами:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}, \quad y_c = \frac{\iiint\limits_V y\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}, \quad z_c = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x,y,z)dv}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)dv}. \quad (67)$$

Величини

$$M_x = \iiint\limits_V x\delta(x,y,z)dv, \; M_y = \iiint\limits_V y\delta(x,y,z)dv, \; M_z = \iiint\limits_V z\delta(x,y,z)dv. \quad (68)$$

називаються статичними моментами тіла відносно координатних площин Oyz, Oxz та Oxy відповідно. Якщо $\delta(x,y,z) = const$, координати центра мас не залежать від щільності тіла V.

Приклад 18. Обчислити координати центра мас однорідного тіла V, яке обмежене поверхнями $x = y^2 + z^2$, $x = 4$.

Будуємо тіло, обмежене даними поверхнями (рис. 32). Область V обмежена поверхнею параболоїда, відсіченого поверхнею $x = 4$. Його проекція на площину Oyz являє собою круг, що обмежений колом $y^2 + z^2 = 4$.

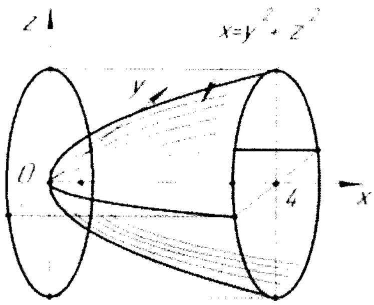


Рисунок 32

Обчислимо спочатку масу тіла в циліндричних координатах, вважаючи, що його щільність $\delta = const$:

$$m = \iiint\limits_V \delta\, dxdydz = \left| \begin{array}{l} x = x, y = \rho\cos(\varphi), z = \rho\sin(\varphi) \\ dx\,dy\,dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dx \\ x = y^2 + z^2 \Rightarrow x = \rho^2 \\ x = 4 \Rightarrow x = 4 \\ y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2 \end{array} \right| = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dx =$$

$$= 2\pi\delta \int\limits_0^2 \rho(4-\rho^2)d\rho = 2\pi\delta\left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi\delta$$

Тоді

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\delta dxdydz = \frac{1}{8\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 xdx = \frac{1}{8\pi}\cdot 2\pi \int\limits_0^2 \rho\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{\rho^2}^4 d\rho =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \rho\left(16-\rho^4\right)d\rho = \frac{1}{8}\left(8\rho^2 - \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Аналогічно визначаються y_c *і* z_c, *але так як тіло – однорідне та симетричне відносно осі Ox, то можна одразу записати, що* $y_c = 0$ *та* $z_c = 0$.

Обчислення моментів інерції тіл

Момент інерції відносно початку координат тіла V густиною $\delta(x, y, z)$ визначається за формулою

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x, y, z)dxdydz; \tag{69}$$

моменти інерції відносно координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)dxdydz, \tag{70}$$

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right)\delta(x, y, z)dxdydz, \tag{71}$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right)\delta(x, y, z)dxdydz. \tag{72}$$

Моменти інерції відносно координатних площин O_{xy}, O_{yz}, O_{xz} відповідно:

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\delta(x, y, z)dxdydz, \tag{73}$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\delta(x, y, z)dxdydz, \tag{74}$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V y^2\delta(x, y, z)dxdydz. \tag{75}$$

Приклад 19. Обчислити моменти інерції однорідної кулі радіусом R *та вагою* P *відносно його центру і діаметру.*

Так як об'єм кулі $v = \frac{4}{3}\pi R^3$, *то його стала густина* $\delta = 3P/\left(4g\pi R^3\right)$. *Помістимо центр кулі в початок координат, тоді його поверхня буде визначатися рівнянням* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. *Момент інерції відносно центра кулі зручно обчислювати в сферичних координатах (65):*

$$I_0=\delta\iiint_V\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=\delta\iiint_{V'}r^4\sin(\theta)\,drd\varphi d\theta=$$

$$=\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\theta\int_0^{R}r^4dr=\delta\cdot 2\pi\cdot 2\frac{R^5}{5}=\frac{3}{5}\frac{P}{g}R^2.$$

Так як внаслідок однорідності і симетрії кулі її моменти інерції відносно будь-якого діаметра рівні, обчислимо момент інерції відносного діаметра, що лежить на осі Oz:

$$I_z=\delta\iiint_V\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\delta\iiint_{V'}r^2\sin^2(\theta)r^2\sin(\theta)\,drd\varphi d\theta=$$

$$=\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3(\theta)\,d\theta\int_0^{R}r^4dr=-2\delta\pi\frac{R^5}{5}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2(\theta)\right)d(\cos\theta)=$$

$$=-2\delta\pi\frac{R^5}{5}\left(\cos(\theta)-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{5}\frac{P}{g}R^2.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити об'єм тіла, яке обмежене вказаними поверхнями використовуючи потрійний інтеграл. Виконати рисунок.

1) $z=y^2,\ x\geq 0, z\geq 0, x+y=2.$

2) $2x-y=0,\ y\geq 0, z\geq 0, x+y=9, z=x^2.$

3) $x^2+y^2=4,\ z=4-x-y, z\geq 0.$

4) $x-y=0,\ y\geq 0, z\geq 0, 2x+y=2, 4z=y^2.$

5) $z\geq 0,\ x^2+y^2=9, z=5-x-y.$

2. Обчислити координати центра маси однорідного тіла, обмежене поверхнями, які утворюють область V.

1) $x=6\sqrt{y^2+z^2},\ y^2+z^2=9, x=0.$

2) $4y=\sqrt{x^2+z^2},\ x^2+z^2=16, y=0.$

3) $x^2+z^2=4y,\ y=9.$

4) $x=6\left(y^2+z^2\right),\ y^2+z^2=3, x=0.$

5) $z=2\sqrt{x^2+y^2},\ z=8.$

3. Обчислити момент інерції однорідного тіла, обмеженого поверхнями які утворюють область V, відносно вказаної осі координат. Під час розрахунків значення густини тіла прийняти рівною 1.

1) $x=y^2+z^2, x=2, 0x.$

2) $x=y^2+z^2, y^2+z^2=1, x=0, 0x.$

3) $y^2=x^2+z^2, y=4, 0y.$

4) $x=y^2+z^2, x=3, 0x.$

2 КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

2.1. Криволінійні інтеграли першого роду (по довжині дуги).

Нехай в просторі задана дуга L_{AB} кривої L, у всіх точках якої визначена неперервна функція $u = f(x,y,z)$. Дугу L_{AB} розбиваємо на n частинок l_i довжиною $\Delta l_i (i = \overline{1,n})$. В кожній елементарній частині l_i вибираємо точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (рис. 33) і складаємо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i . \tag{76}$$

За даних умов існує границя послідовності інтегральних сум $\{I_n\}$ при $\Delta l_{i\max} \to 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta l_{i\max}\to 0} I_n \right)$, яка називається криволінійним інтегралом першого роду або криволінійним інтегралом по довжині дуги L_{AB} від функції $f(x,y,z)$ і позначається $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl$.

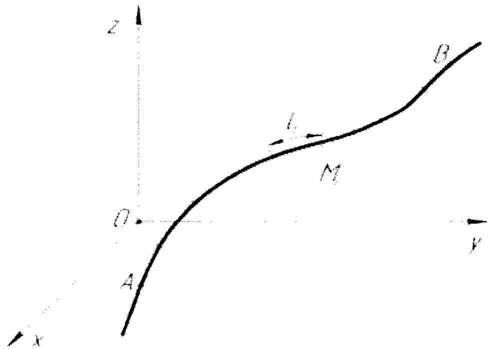


Рисунок 33

Таким чином за означенням

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \lim_{\Delta l_{i\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i . \tag{77}$$

Якщо крива L лежить у площині Oxy і вздовж цієї кривої задана неперервна функція $f(x,y)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl = \lim_{\Delta l_{i\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i . \tag{78}$$

Правила обчислення криволінійних інтегралів першого роду

1. Якщо крива L лежить у просторі.

а) крива L задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \\ z = \gamma(t); \end{cases}$$

і параметр t змінюється монотонно на відрізку $[\alpha;\beta]$ $(\alpha < \beta)$ при переміщенні по кривій L із точки A у точку B, тоді

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\gamma(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\gamma'(t))^2}dt. \quad (79)$$

2. Якщо крива L лежить на площині:

а) крива L задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

$t \in [\alpha;\beta]$ $(\alpha < \beta)$, тоді

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt \quad (80)$$

б) крива L задана неперервною функцією $y = \varphi(x)$, яка має неперервну похідну на відрізку $[x_1;x_2]$, де x_1 та x_2 абсциси точок A та B $(x_1 < x_2)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\, dl = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\varphi(x))\, \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}dx \quad (81)$$

в) крива L задана неперервною функцією $x = \psi(y)$, яка має неперервну похідну на відрізку $[y_1;y_2]$, де y_1 та y_2 ординати точок A та B $(y_1 < y_2)$, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\, dl = \int\limits_{y_1}^{y_2} f(\psi(y),y)\, \sqrt{1 + (\psi'(y))^2}dy\,. \quad (82)$$

г) рівняння кривої L задано в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, функція $\rho(\varphi)$ та її похідна $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\varphi}$ неперервні, то

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\, dl = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(\rho(\varphi)\cos\varphi; \rho(\varphi)\sin\varphi)\, \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\; d\varphi\,, \quad (83)$$

де φ_A та φ_B – значення φ, що визначають на кривій точки A і B $(\varphi_A < \varphi_B)$.

Отже, у всіх випадках обчислення криволінійних інтегралів першого роду зводиться до обчислення відповідних визначених інтегралів.

Приклад 20. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x^2 + y^2)^n dl$, *де* L -

коло $x^2 + y^2 = a^2$

Запишемо рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$ *у параметричному вигляді:* $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$ *тоді*

$$x_t' = -a\sin t,\quad y_t' = a\cos t,\quad dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt,$$

$$dl = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,dt = adt$$

Отже,

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)^n dl = a^{2n+1}\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi a^{2n+1}$$

Приклад 21. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{OB}} xdl$, *де* L_{OB} *- відрізок прямої від точки* $O(0;0)$ *до точки* $B(1;2)$.

Знаходимо рівняння прямої OB по двох точках: $y = 2x$. *Далі отримаємо:*

$$dl = \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx,\quad dl = \sqrt{5}dx,$$

$$\int\limits_{L_{OB}} xdl = \sqrt{5}\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{5}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Приклад 22. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} \frac{1}{x + 2y + 5}dl$, *де* L_{AB} *- відрізок прямої* $y = 2x - 2$ *від точки* $A(0;-2)$ *до точки* $B(1;0)$.

Далі отримаємо:

$$dl = \sqrt{1 + (y_x')^2}\,dx = \sqrt{1+4}dx = \sqrt{5}dx.$$

Отже,

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{5}dx}{x + 2(2x-2) + 5} = \sqrt{5}\int\limits_0^1 \frac{dx}{5x+1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln|5x+1|\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{5}\ln 6.$$

Властивості криволінійних інтегралів першого роду

(C, C_1, C_2 – деякі сталі, $f(x,y)$, $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$– функції, що неперервні на дузі L_{AB})

1. $\int\limits_{L_{AB}} Cf(x,y)dl = C\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)dl.$

2. $\int\limits_{L_{AB}} \left(f_1(x,y) + f_2(x,y)\right)dl = \int\limits_{L_{AB}} f_1(x,y)dl + \int\limits_{L_{AB}} f_2(x,y)dl.$

Властивість 1 та 2 визначають властивість лінійності криволінійного інтеграла першого роду:

$$\int_{L_{AB}} \left(C_1 f_1(x,y) + C_2 f_2(x,y)\right) dl = C_1 \int_{L_{AB}} f_1(x,y) dl + C_2 \int_{L_{AB}} f_2(x,y) dl. \qquad (84)$$

3. $\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_{L_{BA}} f(x,y)dl.$

4. Якщо $f(x,y) \geq 0$ в усіх точках дуги L_{AB}, то $\int_{L_{AB}} f(x,y)dl \geq 0.$

5. Якщо $f_1(x,y) \geq f_2(x,y)$ на дузі L_{AB}, то $\int_{L_{AB}} f_1(x,y)dl \geq \int_{L_{AB}} f_2(x,y)dl.$

6. Властивість адитивності: $\int_{L_{AB}} f(x,y)dl = \int_{L_{AC}} f(x,y)dl + \int_{L_{CB}} f(x,y)dl,$ де $C \in L_{AB}$.

7. Середнє значення функції $z = f(x,y)$ на дузі L_{AB} шукається за формулою:

$$f(x_C, y_C) = \frac{\int_{L_{AB}} f(x,y)dl}{l_{AB}},$$

де $C(x_C, y_C)$ – точка у якій досягається середнє значення, l_{AB} – довжина дуги AB.

8. $\int_{L_{AB}} dl = l_{AB}$, де l_{AB} – довжина дуги AB *(геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду).*

9. Якщо $f(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ – лінійна густина матеріальної дуги L_{AB}, то її маса m знаходиться за формулою:

$$m = \int_{L_{AB}} \delta(x,y,z)\, dl \qquad (85)$$

(механічний зміст криволінійного інтеграла першого роду)

10. Координати центра мас матеріальної дуги L_{AB}, що має лінійну густину $\delta = \delta(x,y,z)$, визначаються за формулами:

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} x\delta\,(x,y,z)\, dl,$$

$$y_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} y\delta\,(x,y,z)\, dl, \qquad (86)$$

$$z_C = \frac{1}{m} \int_{L_{AB}} z\delta\,(x,y,z)\, dl$$

де m - маса дуги L_{AB}.

11. Моменти інерції відносно початку координат O, осей координат Ox, Oy, Oz і координатних площин Oxy, Oxz, Oyz матеріальної дуги L_{AB},

що має лінійну густину $\delta = \delta(x,y,z)$, визначаються відповідно за формулами:

$$I_0 = \int_{L_{AB}} (x^2 + y^2 + z^2)\,\delta\,dl,$$

$$I_x = \int_{L_{AB}} (y^2 + z^2)\,\delta\,dl,$$

$$I_y = \int_{L_{AB}} (x^2 + z^2)\,\delta\,dl,$$

$$I_z = \int_{L_{AB}} (x^2 + y^2)\,\delta\,dl,$$

$$I_{xy} = \int_{L_{AB}} z^2\,\delta\,dl,$$

$$I_{xz} = \int_{L_{AB}} y^2\,\delta\,dl,$$

$$I_{yz} = \int_{L_{AB}} x^2\delta\,dl. \qquad (87)$$

Моменти інерції зв'язані наступними співвідношеннями:

$$2I_0 = I_x + I_y + I_z,$$

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}.$$

Якщо дуга L_{AB} лежить у площині O_{xy}, то розглядаються тільки моменти I_0, I_x, I_y (при умові, що $z = 0$).

12. Нехай функція $z = f(x,y)$ має розмірність довжини і $f(x,y) > 0$ у всіх точках дуги L_{AB}, що лежить у площині Oxy. Тоді

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = S$$

де S - площа циліндричної поверхні із твірними, що паралельні осі Oz і проходять через точки дуги L_{AB}, яка знизу обмежена дугою L_{AB}, зверху – лінією перетину циліндричної поверхні із поверхнею $z = f(x,y)$, а з боків – прямими, що проходять через точки A і B паралельно осі Oz (рис. 34). Якщо $f(x,y) < 0$ у всіх точках плоскої дуги L_{AB} (рис. 35), то

$$\int_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = -S$$

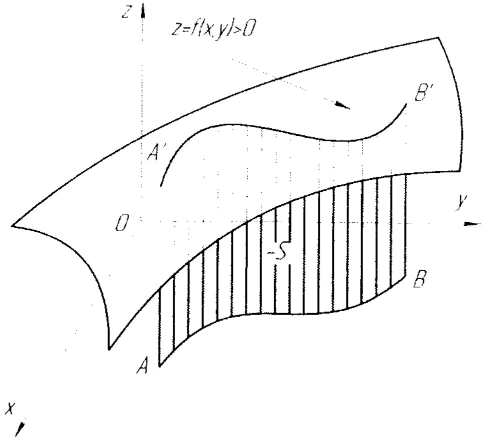


Рисунок 34

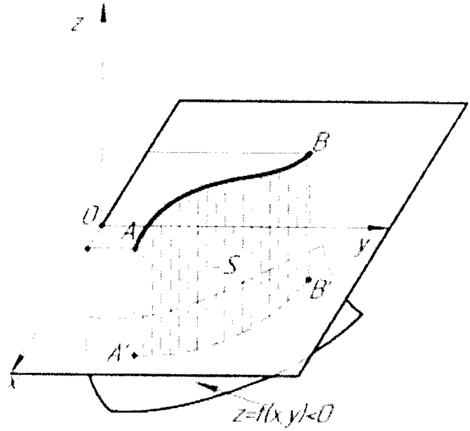


Рисунок 35

І якщо у деяких точках плоскої дуги L_{AB} функція $f(x,y)$ змінює знак, тоді інтеграл $\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl$ виражає різницю площ частин циліндричної поверхні, що знаходяться над площиною Oxy та під нею (рис. 36):

$$\int\limits_{L_{AB}} f(x,y)\,dl = S_1 - S_2 + S_3.$$

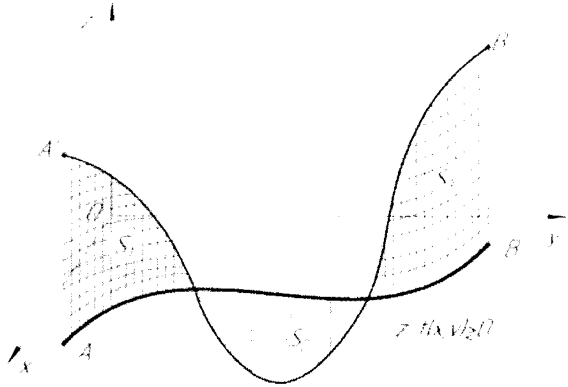


Рисунок 36

Приклад 23. Визначити масу m *та координати центра мас* x_C, y_C *плоскої матеріальної дуги* $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \le x \le 1$, *лінійна густина якої* $\delta(x,y) = y\sqrt{1+x}$.

Згідно з формулами (81) і (85), для випадку плоскої дуги маємо

$$m = \int_0^1 \delta(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 x^{3/2}\sqrt{1+x}\,\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^1 (x^{3/2} + x^{5/2})\,dx = \frac{16}{35}.$$

За формулами (86) знаходимо:

$$x_C = \frac{35}{16}\int_0^1 \frac{2}{3}(x^{5/2} + x^{7/2})\,dx = \frac{20}{27},$$

$$y_C = \frac{35}{16}\int_0^1 \frac{2}{3}x^{3/2}\frac{2}{3}(x^{3/2} + x^{5/2})\,dx = \frac{35}{36}\cdot\int_0^1 (x^3 + x^4)\,dx = \frac{7}{16}.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити криволінійні інтеграли першого роду.

1) $\int_L x^2 dl$, де L – дуга кола $x^2 + y^2 = 1$, яка розміщена між точками $A(0;\,0)$ та $B(1;\,1)$.

2) $\int_L x dl$, де L – дуга параболи $y = x^2$, яка розміщена у першій чверті.

3) $\int_L \frac{x}{y^4} dl$, де L – дуга гіперболи $xy = 1$, яка розміщена між точками $A(1;\,1)$ та $B(2;\,0{,}5)$.

4) $\int\limits_L xy^2 dl$, де L – дуга кола $x = R\cos(t)$, $y = R\sin(t)$, $\left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$.

5) $\int\limits_L \sin^3(x)\cos(x)dl$, де L – дуга кривої $y = \ln(\sin(x))$, $x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

2.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай точка $M(x, y)$ рухається вздовж деякої плоскої лінії L від точки A до точки B (рис. 37). До точки M прикладена сила $\vec{F}$, яка змінюється за величиною та напрямком при переміщенні точки M, тобто є деякою функцією координат точки M:

$$\vec{F} = \vec{F}(M).$$

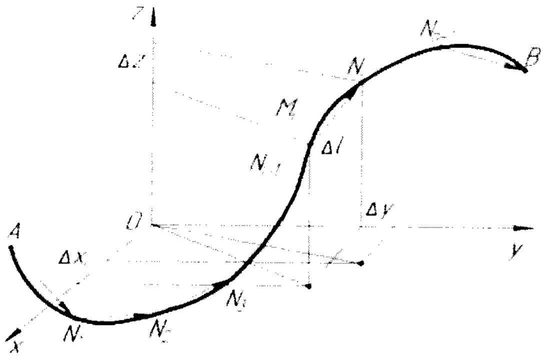


Рисунок 37

Обчислимо роботу сили F при переміщенні точки M із положення A в положення B (рис. 37). Для цього розіб'ємо криву AB на n частин точками $A = N_0, N_1, N_2, \dots, N_n = B$ в напрямку від A до B і позначимо через $\overrightarrow{\Delta l_i}$ вектор $\overrightarrow{N_i N_{i+1}}$ $(i = \overline{1,n})$. На кожному елементарному проміжку вибираємо довільну точку M_1. Величину сили $\vec{F}$ в точці M_i позначимо через $\vec{F_i}$. Тоді скалярний добуток $\vec{F_i}\overrightarrow{\Delta l_i}$ можна розглядати як наближене вираження роботи сили $\vec{F}$ вздовж дуги $N_i N_{i+1}$:

$$A_i \approx \vec{F}_i \overrightarrow{\Delta l_i}$$

Нехай

$$\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j},$$

де $X(x, y)$ і $Y(x, y)$ - проекції вектора $\vec{F}$ на осі Ox і Oy. Позначивши через Δx_i і Δy_i приріст координат x_i та y_i при переході від точки N_i до точки

N_{i+1}, отримаємо:

$$\overrightarrow{\Delta l_i} = \Delta x_i \vec{i} + \Delta y_i \vec{j}.$$

Отже,

$$\vec{F}_i \overrightarrow{\Delta l_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

Наближене значення роботи A сили $\vec{F}$ на всій кривій AB буде

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \overrightarrow{\Delta l_i} = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i] \tag{88}$$

Якщо існує границя виразу, що стоїть в правій частині рівняння при $\overrightarrow{\Delta l_i} \to 0$ (при цьому очевидно, $\Delta x_i \to 0$ та $\Delta y_i \to 0$), то ця границя виражає роботу сили $\vec{F}$ по кривій L від точки A до точки B:

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i] \tag{89}$$

Границю, що знаходиться у правій частині називають **криволінійним інтегралом** від векторної функції $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ по дузі кривої L_{AB} і позначають $\int\limits_{L_{AB}} \vec{F}\vec{dl}$ або $\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$.

Отже, згідно з означенням

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i] \tag{90}$$

Якщо крива L лежить у просторі, то криволінійний інтеграл від векторної функції $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ визначається, як

$$\begin{aligned} &\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ \Delta y_k \to 0 \\ \Delta z_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} P(x_k, y_k, z_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k, z_k)\Delta y_k + R(x_k, y_k, z_k)\Delta z_k \end{aligned} \tag{91}$$

Якщо крива інтегрування L замкнута, криволінійні інтеграл другого роду від векторної функції $\vec{a}$ позначається $\oint\limits_L a\,dl$. В цьому випадку через криву L проводиться орієнтована поверхня і за додатній напрям обходу по L приймається такий напрям, при якому область поверхні, обмежена кривою L, знаходиться зліва, якщо рухатись вздовж L по вибраній стороні вказаної поверхні (тобто обхід контуру L здійснюється проти руху годинникової стрілки).

Правила обчислення криволінійних інтегралів другого роду

1. Якщо крива L лежить у просторі:

а) крива L задана параметричними рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \\ z = \gamma(t) \end{cases}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ та $\gamma(t)$ – диференційовані функції, $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ і $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ – відповідно початкова та кінцева точки цієї кривої, то справедлива наступна формула для визначення криволінійного інтегралу другого роду:

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(\varphi(t),\psi(t),\gamma(t))\,\varphi'(t) + \tag{92}$$

$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\gamma(t))\,\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\gamma(t))\,\gamma'(t) \big] dt.$$

2. Якщо крива L лежить на площині:

а) крива L задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – диференційовані функції, $A(x(\alpha), y(\alpha))$ і $B(x(\beta), y(\beta))$ – початкова та кінцева точки, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(\varphi(t),\psi(t))\,\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\,\psi'(t) \big]\,dt. \tag{93}$$

б) крива L задана неперервною функцією $y = \varphi(x)$, яка має неперервну похідну на відрізку $[x_A; x_B]$, де x_A та x_B абсциси точок A та B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \big[P(x,\varphi(x)) + Q(x,\varphi(x))\varphi'(x) \big]\,dx. \tag{94}$$

в) крива L задана неперервною функцією $x = \psi(y)$, яка має неперервну похідну на відрізку $[y_A; y_B]$, де y_A та y_B ординати точок A та B, то

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \big[P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y) \big]\,dy. \tag{95}$$

Приклад 24. Обчислити

$$I = \int\limits_{L_{AB}} y\,dx + (x+z)\,dy + (x-y)\,dz$$

де L_{AB} *- відрізок прямої, що з'єднує точки* $A(1,-1,1)$ *та* $B(2,3,4)$.

Запишемо параметричне рівняння прямої

$$AB:\begin{cases} x = 1+t, \\ y = -1+4t, \\ z = 1+3t. \end{cases}$$

На відрізку AB *параметр* $0 \le t \le 1$ *Тому, згідно формули (92)*

$$I = \int_0^1 ((-1+4t)+(2+4t)\cdot 4+(2-3t)\cdot 3)\,dt = \int_0^1 (13+11t)\,dt = 18{,}5.$$

Приклад 25. Обчислити $I = \oint_L ydx - x^2dy + (x+y)dz$, *якщо* L *- крива перетину циліндра* $x^2+y^2=4$ *з площиною* $x+y-z=0$, *що проходить у додатному напрямі відносно вибраної верхньої сторони даної площини.*

Знайдемо параметричні рівняння кривої L. *Так як проекція кривої* L *на площину* Oxy *це коло* $x^2+y^2=4$, $z=0$, *тому можна записати*

$$x = 2\cos(t),\ y = 2\sin(t).$$

Тоді із рівняння площини знаходимо, що

$$z = 2(\cos(t)+\sin(t)).$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x = 2\cos(t), \\ y = 2\sin(t), \\ z = 2(\cos(t)+\sin(t)), \\ t \in [0;2\pi]; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -2\sin(t) \\ y' = 2\cos(t) \\ z' = 2(-\sin(t)+\cos(t)) \end{cases}$$

Звідси за формулою (92) маємо:

$$I = \int_0^{2\pi} \left(-4\sin^2(t) - 8\cos^3(t) + 4\left(\cos^2(t)-\sin^2(t)\right)\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-2+2\cos(2t)-8\cos(t)+8\sin^2(t)\cos(t)+4\cos(2t)\right)dt = -4\pi$$

Приклад 26. Обчислити $I = \int_{L_{AB}} xydx + (x^2+y)dy$, *якщо лінія* L_{AB} *- дуга параболи* $y = x^2$, *розміщена між точками* $A(0,0)$ *та* $B(2,4)$.

Так як в даному випадку $\varphi(x) = x^2$, $\varphi'(x) = 2x$, $x \in [0;2]$, *то за формулою (94)*

$$I=\int_0^2 (xx^2+(x^2+x^2)\cdot 2x)dx=\int_0^2 5x^3dx=\frac{5}{4}x^4\Big|_0^2=20.$$

Властивості криволінійних інтегралів другого роду

1. Криволінійний інтеграл визначається підінтегральним виразом, формою кривої інтегрування та вказаним напрямком інтегрування.

При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл змінює знак, так, як при цьому вектор $\overrightarrow{\Delta l}$, а отже, і його проекції Δx та Δy змінюють знаки.

2. Розіб'ємо криву L_{AB} точкою C на частини L_{AC} та L_{CB} так, що $L_{AB}=L_{AC}+L_{CB}$. Тоді із формули (91) випливає:

$$\int_{L_{AB}} \vec{a}\overrightarrow{dl}=\int_{L_{AC}} \vec{a}\overrightarrow{dl}+\int_{L_{CB}} \vec{a}\overrightarrow{dl} \qquad (96)$$

Це співвідношення справедливе для будь-якої кількості доданків.

3. Якщо плоску область D, обмежену кривою L, розбити на частини, що не мають спільних внутрішніх точок та обмежені замкнутими кривими L_1 та L_2, то

$$\oint_L \vec{a}\,\overrightarrow{dl}=\oint_{L_1} \vec{a}\,\overrightarrow{dl}+\oint_{L_2} \vec{a}\,\overrightarrow{dl}, \qquad (97)$$

де напрямок обходу по контурах L, L_1 та L_2 - всюди або додатній, або від'ємний.

4. Теорема Гріна. Якщо функції $P(x,y)$ та $Q(x,y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні в замкнутій однозв'язній області D, що лежить у площині Oxy і обмежена кусково-гладкою кривою L, то

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \qquad (98)$$

де інтегрування по контуру L виконується в додатному напрямку. Формула (98) називається формулою Гріна.

Якщо в деякій області D виконується рівність

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (99)$$

то мають місце наступні твердження:

а) $\oint_L Pdx+Qdy=0$, якщо L – будь-який замкнутий контур, що повністю належить області D.

б) Інтеграл $\int_{L_{AB}} Pdx+Qdy$ не залежить від шляху інтегрування, що з'єднує точки A і B, де $L_{AB}\in D$.

в) $Pdx + Qdy = du(x, y)$, де $du(x, y)$ – повний диференціал функції $u(x, y)$.

Із формули Гріна випливає, що площу області D, яка обмежена замкненим контуром L, можна також обчислити за допомогою криволінійного інтеграла другого роду:

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L -ydx + xdy, \qquad (100)$$

де інтегрування по контуру L виконується в додатному напрямі.

Приклад 27. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею кривої $x^3 + x^2 - y^2 = 0$ *(рис. 38)*

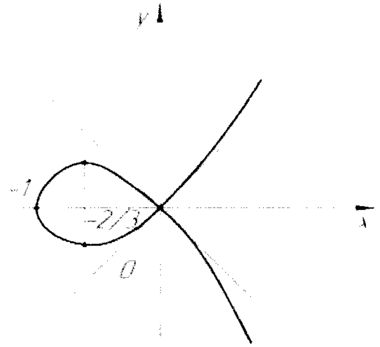


Рис. 38

Із рівняння кривої отримаємо, що $y = \pm x\sqrt{x+1}$, *тобто крива симетрична відносно осі* Ox *і перетинає її в точках* $x = 0$ *і* $x = -1$; *обидві функції* $y = \pm x\sqrt{x+1}$ *визначені при* $x \geq -1$, *а* $y \to \pm\infty$ *при* $x \to \infty$. *Перейдемо до параметричних рівнянь даної кривої, нехай* $y = xt$. *Підставивши* $y = xt$ *у рівняння* $x^3 + x^2 - y^2 = 0$, *отримаємо* $x^3 + x^2 = x^2t^2$, $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, *де для петлі* $-1 \leq t \leq 1$.

Звідки шукана площа

$$S = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}[-(t^3 - t)2t + (t^2 - 1)(3t^2 - 1)]\,dt = \int_0^1 (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = \frac{8}{15}$$

Приклад 28. Обчислити

$$I = \oint_L y(1 - x^2)\,dx + (1 + y^2)\,xdy$$

де контур L *- коло* $x^2 + y^2 = 4$, *проходить в додатному напрямі обходу.*

Для обчислення інтеграла скористаємося формулою Гріна (98):

$$I=\iint_D (1+y^2-1+x^2)\,dxdy=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$$

де D *- коло, визначене нерівністю* $x^2+y^2\le 4$. *Маємо*

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \\ 0\le\varphi\le 2\pi,\,0\le\rho\le 2 \end{array}\right|=\iint_D \rho^3 d\rho d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 \rho^3 d\rho=8\pi.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити криволінійні інтеграли другого роду.

1) $\int_L \left(2y-6x^3y\right)dx+\left(2x-9x^2y^2\right)dy$, де L – кубічна парабола $y=\frac{1}{4}x^3$, яка розміщена між точками A(0; 0) та B(2; 2).

2) $\int_L y^2dx+x^2dy$, де L – перша арка циклоїди $x=a\left(t-\sin(t)\right)$, $y=a\left(t-\cos(t)\right)$.

3) $\int_L \left(x^2-y\right)dx+\left(y^2+2x\right)dy$, де L – ламана, яка поступово сполучає точки A(0; 0), B(1; 1), C(1; 0), D(3; 0).

4) $\int_L \left(x^2-2y\right)dx+\left(y^2-2x\right)dy$, де L: $y=\frac{1}{4}x^3$, $x\in[0;1]$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ по замкненому контуру L, використовуючи формулу Гріна. Обхід контуру виконувати проти руху годинникової стрілки.

1) $\oint_L y^2dx+x^2dy$, де L – контур прямокутника $1\le x\le 2,\,0\le y\le 2$.

2) $\oint_L x^2y^2dx+xydy$, де L – контур, який обмежений параболами $y=x^2$, $y^2=x$.

3) $\oint_L (x+y)dx+x^2dy$, де L – контур, який обмежений параболами $y=x^2$, $y=2-x^2$.

4) $\int\limits_L 2xdy - ydx$, де L – контур, який обмежений частинами параболами $y = x^2$ та прямої $y = x$.

2.3. Застосування криволінійних інтегралів

З допомогою криволінійних інтегралів першого роду можна обчислювати довжину дуги кривої, масу матеріальної дуги, її центр ваги, площі циліндричних поверхонь та ін.

Приклад 29. Обчислити масу m дуги кривої L, що задана параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2}, \\ y = t, \\ z = t^3/3, \\ 0 \le t \le 2, \end{cases}$$

якщо густина в кожній її точці $\delta = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}$.

Згідно з формули (85), шукана маса m

$$m = \int\limits_L \sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dt = \int\limits_0^2 \sqrt{1 + t^4 + t^2}\sqrt{t^2 + 1 + t^4}\,dt = \int\limits_0^2 (1 + t^2 + t^4)dt = \frac{166}{15}.$$

Приклад 30. Обчислити координати центра ваги та моменти інерції I_0, I_x, I_y *однорідної дуги кола* $x^2 + y^2 = R^2$, *розміщеної у першому квадраті.*

Так як пряма $y = x$ *являється віссю симетрії дуги кола, то* $x_c = y_c$. *Для знаходження* x_c *використаємо першу із формул (86):*

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\delta\,dl}{\int\limits_L \delta\,dl} = \frac{\int\limits_L x\,dl}{\int\limits_L dl},$$

оскільки $\delta = const$. *Інтеграл* $\int\limits_L dl = \frac{1}{2}\pi R$ *визначає довжину четвертої частини даного кола. Обчислимо* $\int\limits_L x\,dl$, *де* $x = R\cos(t)$, $y = R\sin(t)$, $0 \le t \le \pi/2$, $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = R\,dt$. *Отже,*

$$\int_L xdl = \int_0^{\pi/2} R\cos(t)\cdot Rdt = R^2\sin(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2.$$

Остаточно маємо,

$$x_c = y_c = \frac{R^2}{\pi R/2} = \frac{2R}{\pi}.$$

Для обчислення I_0, I_x, I_y *використаємо формули (87) для випадку плоскої дуги* $(z=0)$ *і врахуємо, що* $I_x = I_y$:

$$I_0 = \int_L (x^2+y^2)\delta dl = \delta\int_0^{\pi/2} R^2Rdt = \frac{R^3\delta\pi}{2}.$$

$$I_x = \int_L y^2\delta dl = \delta\int_0^{\pi/2} R^2\sin^2 t\cdot Rdt = \frac{R^3\delta}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = \frac{\pi R^3\delta}{4}.$$

Криволінійний інтеграл другого роду (91) у випадку, коли $\vec{a}=\vec{F}$ *– сила, під дією якої пересувається тіло, визначає роботу сили* $\vec{F}$ *на шляху* L_{AB}.

У цьому полягає фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду.

Приклад 31. Обчислити роботу A *сили* $\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ *вздовж відрізка прямої* BC, *якщо* $B(1,1,1)$ *і* $C(2,3,4)$.

Запишемо параметричне рівняння прямої BC:

$$\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 1+2t, \quad \text{де } 0\le t\le 1. \\ z = 1+3t, \end{cases}$$

Тоді робота A *сили* $\vec{F}$ *на ділянці* BC *обчислюється за формулою* (92)

$$A = \int_{L_{BC}} yzdx + xzdy + xydz =$$

$$\int_0^1\big((1+2t)(1+3t) + (1+t)(1+3t)\cdot 2 + (1+t)(1+2t)\cdot 3\big)dt =$$

$$= \int_0^1\left(18t^2+22t+6\right)dt = \left(\frac{18}{3}t^3 + \frac{22}{2}t^2 + 6t\right)\Bigg|_0^1 = 23.$$

За допомогою теорії криволінійних інтегралів другого роду можна розв'язати таку задачу: відомо, що вираз $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$. Необхідно знайти цю функцію.

Розв'язок даної задачі визначається формулами

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C \qquad (101)$$

або

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C \qquad (102)$$

де точки $M_0(x_0,y_0)$ та $M(x,y)$ належать області D, в якій $P(x,y),Q(x,y)$ та їх частинні похідні є неперервними функціями; C - деяка стала.

Приклад 32. Показати, що диференціальний вираз

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy$$

є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ *та знайти цю функцію.*

Так як $P(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, $Q(x,y)=\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}$, *то* $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$ *і* $\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$. *Функції P та Q, а також її частинні похідні неперервні на всій площині x0y, крім точки O(0, 0). Оскільки* $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, *то*

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy=du(x,y).$$

Тобто такий диференціальний вираз буде повним диференціалом функції u(x, y). Для знаходження функції за її повним диференціалом скористаємось формулою (101) *взявши* $M_0(1,1)$ *(якщо б точка O(0, 0) не була точкою розриву, доцільніше було б взяти її).*

Отже,

$$u(x,y)=\int_{1}^{x}P(x,1)dx+\int_{1}^{y}Q(x,y)dy+C=\int_{1}^{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int_{1}^{y}\left(\frac{2}{y}-\frac{x}{y^2}\right)dy+C=$$

$$=\left(\ln|x|+x\right)\Big|_1^x+\left(2\ln|y|+\frac{x}{y}\right)\Big|_1^y+C=\ln|x|+x-1+2\ln|y|+\frac{x}{y}-x+C=$$

$$=\ln|x|+2\ln|y|+\frac{x}{y}-1+C.$$

Включивши мінус одиницю в довільну сталу, отримаємо

$$u(x,y)=\ln|x|+2\ln|y|+\frac{x}{y}+C,$$

де C – деяка стала.

Завдання для розв'язання

1. Обчислити довжину дуги кривої $x=\dfrac{2-t^4}{4}$; $y=\dfrac{t^6}{6}$, яка обмежена точками перетину із координатними осями.

2. Знайти масу четвертої частини еліпса $x=a\cos(t)$, $y=b\sin(t)$, яка розташована в першій чверті, якщо густина в кожній точці дорівнює ординаті цієї точки.

3. Обчислити моменти інерції відносно координатних осей першого витка гвинтової лінії $x=a\cos(t)$, $y=a\sin(t)$, $z=\dfrac{h}{2\pi}t$, якщо густина стала.

4. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}=x^2y\vec{i}+(y-x)\vec{j}$. Обчислити роботу цієї сили при переміщені точки по ламаній, що сполучає точки O(0; 0), A(1; 1), C(1; 0).

5. Показати, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$ та знайти її. $-\left(\dfrac{1}{2}\cos(2y)+y\sin(2x)\right)dx+\left(x\sin(2y)+\cos^2(x)+1\right)dy.$

3 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

3.1. Векторна функція скалярного аргументу. Похідна за напрямом. Градієнт

Якщо кожному дійсному числу $t \in T$ ставиться у відповідність за деяким правилом єдиний вектор $\vec{r}$, то говорять, що на множині T задано векторну функцію або вектор-функцію скалярного аргументу t. Її прийнято позначати $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Множина T називається областю визначення функції $\vec{r}(t)$. В якості T зазвичай беруть деякий відрізок $[a;b]$ або інтервал $(a;b)$ числової осі. Число t називають параметром.

Як і будь-який сталий вектор, вектор-функцію скалярного аргументу $\vec{r}(t)$ при будь-якому фіксованому значенні t можна однозначно розкласти по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (103)$$

Очевидно, що координати x, y, z вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в цьому базисі є функціями $x(t), y(t), z(t)$, область визначення яких співпадає із T. Тому векторне рівняння (103) еквівалентно системі скалярних рівнянь:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (104)$$

Якщо вектор $\vec{r}$ відкладати із однієї точки O при різних значеннях $t \in T$, то його кінець $M(t)$ опише в просторі, лінію, яка називається годографом вектор-функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Точка O називається полюсом годографа. Рівняння (103) називають в цьому випадку векторно-параметричним рівнянням годографа, а рівняння (104) – його параметричними рівняннями (рис. 39).

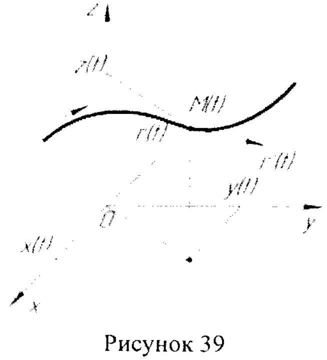


Рисунок 39

Годографом, що заданий векторно-параметричним рівнянням виду $\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t$, де $\vec{r}_0$ – радіус-вектор точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s}$ – деякий заданий вектор, є пряма у просторі, що проходить через точку M_0, з напрямним вектором $\vec{s}$.

У випадку коли t – час, а $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мають розмірність довжини, рівняння (103) та (104) називаються відповідно векторно-параметричним та параметричним рівняннями руху точки, а відповідний їм годограф – траєкторією її руху.

Якщо

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0,$$
$$\lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \tag{105}$$
$$\lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$$

то вектор $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$ називається **границею** вектор-функції $\vec{r}(t)$ в точці $t = t_0$. В цьому випадку записують

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0. \tag{106}$$

Якщо $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$, то векторна функція $\vec{r}(t)$ називається **неперервною** в точці $t = t_0$.

Якщо $\Delta t \neq 0$ – деякий приріст параметра, то $\overrightarrow{\Delta r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ називається **приростом** вектор-функції $\vec{r}(t)$.

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}, \tag{107}$$

то вона називається **похідною** вектор-функції $\vec{r}(t)$ в точці t та позначається $\vec{r}'(t)$, або $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Вектор $\vec{r}'(t)$ завжди направлений по дотичній до годографа функції $\vec{r}(t)$ в бік зростання параметра t. Із механічної точки зору $\vec{r}'(t)$ – це є вектор миттєвої швидкості руху матеріальної точки по траєкторії, що є годографом функції $\vec{r} = \vec{r}(t)$, в момент часу t в точці $M(t)$ (див. рис. 39).

Якщо існують похідні $x'(t)$, $y'(t)$ та $z'(t)$, то існує $\vec{r}'(t)$ і

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k} \tag{108}$$

Так як вектор $\vec{r}'(t_0)$ направлений по дотичній до кривої в точці $M_0(t_0)$, визначеній рівняннями (104), то рівняння дотичної до цієї кривої в точці M_0

запишуться так:

$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)} \tag{109}$$

Площина, яка перпендикулярна до дотичної та проходить через точку дотику $M_0(t_0)$, називається нормальною площиною до кривої в цій точці, а її рівняння має вигляд

$$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0 \tag{110}$$

Для векторних функцій скалярного аргументу справедливі наступні правила диференціювання:

1) $(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))'=\overrightarrow{r_1'}(t)+\overrightarrow{r_2'}(t)$;

2) $(C\vec{r}(t))'=C\vec{r}'(t), C=const$;

3) $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))'=\overrightarrow{r_1'}(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\cdot\overrightarrow{r_2'}(t)$;

4) $(\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t))'=\overrightarrow{r_1'}(t)\times\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\times\overrightarrow{r_2'}(t)$;

Приклад 33. Знайти похідну вектор-функції

$$\vec{r}(t)=\left(\cos(t)-1\right)\cdot\vec{i}+\sin^2(t)\cdot\vec{j}+\mathrm{tg}(t)\cdot\vec{k}$$

в точці $t_0=\dfrac{\pi}{4}$.

Із формули (108) *випливає, що*

$$\vec{r}'(t)=-\sin(t)\cdot\vec{i}+2\sin(t)\cos(t)\cdot\vec{j}+\frac{1}{\cos^2(t)}\cdot\vec{k}.$$

Тому $r'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

Напрям у просторі задається за допомогою вектора. Кожному ненульовому вектору $\vec{s}$ можна поставити у відповідність одиничний вектор (орт) $\overrightarrow{s^0}$

$$\overrightarrow{s^0}=\left(\cos(\alpha),\cos(\beta),\cos(\gamma)\right), \tag{111}$$

де α, β, γ – кути, утворені вектором $\vec{s}$ та осями Ox, Oy, Oz відповідно, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ – напрямні косинуси вектора $\vec{s}(x,y,z)$

$$\cos(\alpha)=\frac{x}{|\vec{s}|},\ \cos(\beta)=\frac{y}{|\vec{s}|},\ \cos(\gamma)=\frac{z}{|\vec{s}|}. \tag{112}$$

Якщо функція $u=f(x,y,z)$, визначена в деякому околі точки

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, радіус-вектор якої $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, то границя

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r_0}+\vec{s^0}t)-f(\vec{r_0})}{t},$$

якщо вона існує, називається **похідною** функції $u = f(x,y,z)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в **напрямі вектора** $\vec{s}$ і позначається $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{s}}$, тобто за означенням

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{s}} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r_0}+\vec{s^0}t)-f(\vec{r_0})}{t} \tag{113}$$

Враховуючи, що

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{r_0}+\vec{s^0}t)-f(\vec{r_0})}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f\big(x_0 + t\cdot\cos(\alpha), y_0 + t\cdot\cos(\beta), z_0 + t\cdot\cos(\gamma)\big) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial u}{\partial x}t\cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}t\cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}t\cos(\gamma) + \gamma_1 t\cos(\alpha) + \gamma_2 t\cos(\beta) + \gamma_3 t\cos(\gamma)}{t} =$$

$$= \left|\begin{matrix}\lim\limits_{t\to 0}\gamma_1 = 0\\ \lim\limits_{t\to 0}\gamma_2 = 0\\ \lim\limits_{t\to 0}\gamma_3 = 0\end{matrix}\right| = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma),$$

отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(\gamma). \tag{114}$$

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ формула (114) спрощується:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial z}{\partial y}\cos(\beta). \tag{115}$$

де $\vec{s^0} = \big(\cos(\alpha), \cos(\beta)\big)$; $\beta = \pi/2 - \alpha$.

Згідно з (114) частинні похідні функції $u = f(x,y,z)$ є похідними цієї функції у напрямі координатних осей. Із фізичної точки зору $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ можна трактувати як швидкість зміни функції u в даній точці у напрямі вектора $\vec{s}$.

Похідною вздовж кривої L називають похідну у напрямі дотичної до кривої L, що визначається у точці дотику.

Будь-якій диференційованій функції $u = f(x,y,z)$ у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$

можна поставити у відповідність вектор із координатами

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \right),$$

який називається **градієнтом** функції u в точці M_0 і позначається $\overrightarrow{\text{grad}\,u}$. Таким чином, за означенням

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}. \qquad (116)$$

Якщо $z = f(x, y)$, то

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}. \qquad (117)$$

З формул (111), (114) та (116) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = \overrightarrow{\text{grad}}\,u \cdot \vec{s^0} \qquad (118)$$

Із цього зв'язку між похідною $\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}$ та $\overrightarrow{\text{grad}}\,u$ випливає:

1) Вектор градієнта направлений в бік найбільшої швидкості зростання функції;

2) У напрямі, що перпендикулярний до вектора градієнта швидкість зростання функції дорівнює нулю.

Властивості градієнта:

1) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1 + u_2) = \overrightarrow{\text{grad}}\,u_1 + \overrightarrow{\text{grad}}\,u_2$;

2) $\overrightarrow{\text{grad}}(Cu) = C\overrightarrow{\text{grad}}\,u,\ C = const$;

3) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1 u_2) = u_2\overrightarrow{\text{grad}}\,u_1 + u_1\overrightarrow{\text{grad}}\,u_2$.

Приклад 34. Знайти похідну функції $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ у точці $M_1(-2,3,6)$ за напрямом до точки $M_2(-1,1,4)$.

Частинні похідні функції u в точці M_1:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_1} = -\frac{2}{7},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_1} = \frac{3}{7},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_1} = \frac{6}{7}.$$

Орт вектора $\overline{M_1M_2}=(1;-2;-2)$

$$s^0=\frac{\overline{M_1M_2}}{|M_1M_2|}=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$$

Тоді за формулою (118) *отримаємо*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{s}}\right|_{M_1}=-\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{6}{7}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{20}{21}.$$

Приклад 35. Задано скалярне поле $u=x^2-\frac{3}{2}y^2+2z^2x$, *точка* $M(1,-1,2)$, *вектор* $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. *Потрібно обчислити:*

а) похідну скалярного поля u в точці M за напрямком l, заданим вектором $\vec{a}$, *тобто* $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M$;

б) напрям та величину градієнта скалярного поля u в точці M, тобто $\left.grad\,u\right|_M$ *та* $\left|\left.grad\,u\right|_M\right|$.

а) похідна за напрямом обчислюється за формулою

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\cos(\alpha)+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\cos(\beta)+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\cos(\gamma),$$

де $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\cos(\gamma)$ *– напрямні косинуси вектора* $\vec{a}$.

Знаходимо

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\left(2x+2z^2\right)\right|_M=10;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.-3y\right|_M=3;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\left.4xz\right|_M=8;$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1}=3;\quad \cos(\alpha)=\frac{2}{3};\quad \cos(\beta)=-\frac{2}{3};\quad \cos(\gamma)=\frac{1}{3}.$$

Тоді

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=10\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+8\cdot\frac{1}{3}=\frac{22}{3};$$

б) враховуємо, що

$$\left.grad\,u\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\vec{i}+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\vec{j}+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M\vec{k}.$$

Маємо

$$\left.grad\,u\right|_M=10\vec{i}+3\vec{j}+8\vec{k}.$$

Тоді величина градієнта скалярного поля u

$$\left|\left.grad\,u\right|_M\right|=\sqrt{10^2+3^2+8^2}=\sqrt{173}.$$

Завдання для розв'язання

1. Задано функцію $u(M)=u(x, y, z)$ та точки M_1 та M_2. Необхідно знайти: а) похідну цієї функції в точці M_1 в напрямку вектора $\overline{M_1M_2}$; б) $\overline{\text{grad}}(u)$.

1) $u(M)=ze^{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(0;0;0)$, $M_2(3;-4;2)$.

2) $u(M)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$, $M_1(-1;1;1)$, $M_2(2;3;4)$.

3) $u(M)=x-=2y+e^z$, $M_1(-4;-5;0)$, $M_2(2;3;4)$.

2. Знайти похідну функції $u=\ln\left(x^2+y^2\right)$ у точці $M_0(1;\ 2)$ параболи $y^2=4x$ за напрямком цієї кривої.

3. Записати канонічне рівняння дотичної прямої та нормальної площини до лінії, яка задана векторно-параметричним рівнянням $\vec{r}=\cos^2(t)\vec{i}+\sin^2(t)\vec{j}+tg(t)\vec{k}$ в точці $t=\dfrac{\pi}{4}$.

3.2. Скалярні та векторні поля

Якщо в кожній точці $M(x,y,z)$ просторової області V визначена скалярна величина $u=f(x,y,z)$, то кажуть, що в області V задано скалярне поле $u=u(M)$. Функція двох змінних $z=f(x,y)$ задає в деякій області D площини Oxy скалярне поле, що називається плоским.

Графічно скалярне поле можна зобразити з допомогою поверхонь рівня $f(x,y,z)=C$ або ліній рівня $f(x,y)=C$.

Якщо в кожній точці $M(x,y,z)$ просторової області V визначений вектор $a=(P,Q,R)$, де $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ – скалярні функції, то говорять, що в області V задано векторне поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$. Якщо функції $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ неперервні, то векторне поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ називається неперервним.

Прикладами векторних полів є поле швидкостей рідини, що тече, поле швидкостей точок твердого тіла, що обертається із кутовою швидкістю ω навколо даної осі, поле магнітної напруженості та ін.

Лінія, в кожній точці M якої вектор $\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ направлений по дотичній до цієї лінії, називається векторною (силовою) лінією поля.

Прикладами векторних ліній можуть служити лінії течії рідини, силові лінії магнітного поля, траєкторії точок простору, що обертається.

Рівняння векторних ліній поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ визначається із системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \tag{119}$$

Приклад 36. Знайти векторну лінію векторного поля $\vec{a}(M)=-y\vec{i}+x\vec{j}+b\vec{k}$, *що проходить через точку* $M_0(1,0,0)$.

На основі формули (119) отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b}$$

Розв'язуємо її:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x},$$

$$xdx+ydy=0,$$

$$x^2+y^2=C_1^2$$

або, у параметричному вигляді,

$$x=C_1\cos(t),\ \ y=C_1\sin(t).$$

Тоді

$$\frac{dy}{x}=\frac{dz}{b},$$

$$\frac{dz}{b}=\frac{C_1\cos(t)\,dt}{C_1\cos(t)},$$

$$dz=bdt,$$

$$z=bt+C_2.$$

Так, як векторна лінія повинна проходити через точку $M_0(1,0,0)$, *то легко знаходимо, що сталі* $C_1=1$, $C_2=0$. *Отже, параметричне рівняння векторної лінії поля* $\vec{a}=\vec{a}(M)$ *мають вигляд*

$$\begin{cases} x=\cos(t), \\ y=\sin(t), \\ z=bt. \end{cases}$$

Векторне поле, породжене градієнтом скалярного поля $u(M)=f(x,y,z)$ (або $z(M)=f(x,y)$), називається **полем градієнта**. Диференціальні рівняння для визначених векторних ліній $\overrightarrow{\text{grad}}\,u(M)$ мають вигляд

$$\frac{dx}{u'_x}=\frac{dy}{u'_y}=\frac{dz}{u'_z} \tag{120}$$

Завдання для розв'язання

1. Знайти похідну скалярного поля $u = x^2 + y^2 + z^2 - x + y + z + 1$ у точці $M_0(1;\ -2;\ 3)$ за напрямком, що утворює однакові кути з координатними осями.

2. Побудувати лінії рівня плоского скалярного поля $z = 2xy$.

3. Знайти найбільшу швидкість зростання скалярного поля $u = \ln\left(x^2 + 4y^2\right)$.

4. Знайти векторні лінії векторного поля, якщо

$$\vec{a} = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + \left(z^2 + x^2\right)\vec{k}.$$

3.3. Поверхневі інтеграли першого роду

Нехай $f(x,y,z)$ – функція, що неперервна в усіх точках гладкої поверхні S. За допомогою кусково-гладких ліній розіб'ємо поверхню S на n елементарних поверхонь S_i, площі яких позначимо через $\Delta S_i (i = \overline{1,n})$, а діаметри – через $\varnothing S_i$. На кожній поверхні S_i виберемо довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, обчислимо $f(x_i, y_i, z_i)$ і складемо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \qquad (121)$$

За даних умов існує границя послідовності інтегральних сум (121), яка називається **поверхневим інтегралом першого роду** від функції $f(x,y,z)$ по поверхні S і позначається

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{\varnothing S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i \qquad (122)$$

Поверхневі інтеграли першого роду є узагальненням подвійних інтегралів, тому їх властивості аналогічні, зокрема, лінійності, адитивності, для них справедлива теорема про середнє, їх величина не залежить від вибору сторони поверхні.

Очевидно, що інтеграл $\iint_S dS$ дорівнює площі поверхні (геометричний зміст поверхневого інтеграла), а якщо $\delta(x,y,z)$ – поверхнева густина поверхні S, то $\iint_S \delta(x,y,z)dS$ – маса поверхні S (фізичний зміст).

Правила обчислення поверхневих інтегралів першого роду

1. Якщо поверхня S задається рівнянням $z = \varphi(x,y)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Oz, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oxy в область D_{xy}, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,\varphi(x,y))\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dxdy \qquad (123)$$

2. Якщо поверхня S задається рівнянням $y=\psi(x,z)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Oy, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oxz в область D_{xz}, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x,\psi(x,z),z)\sqrt{1+(\psi'_x)^2+(\psi'_z)^2}\,dxdz \qquad (124)$$

3. Якщо поверхня S задається рівнянням $x=\gamma(y,z)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Ox, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oyz в область D_{yz}, то

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(\gamma(y,z),y,z)\sqrt{1+(\gamma'_y)^2+(\gamma'_z)^2}\,dydz. \qquad (125)$$

Приклад 37. Обчислити $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, *де* S *- частина конічної поверхні* $x^2+y^2=z^2$, *розміщена між площинами* $z=0$ *і* $z=2$.

Частина поверхні, що розглядається, визначається рівнянням $z=\sqrt{x^2+y^2}$, *а її проекцією на площину* Oxy *є круг* $x^2+y^2\le 4$ *(рис. 40).*

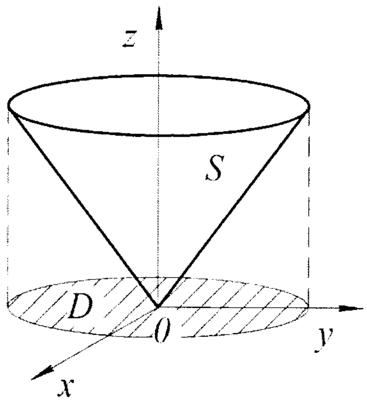


Рисунок 40

Оскільки

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

то із формули (123) отримаємо

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS = \iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} x=\rho\cos(\varphi) \\ y=\rho\sin(\varphi) \end{vmatrix} = \sqrt{2}\iint\limits_D \rho^2 d\rho d\varphi = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{2}\rho^2 d\rho = \sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Приклад 38. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, *де* S *- частина поверхні параболоїда* $z=1-x^2-y^2$, *яка відтинається площиною* $z=0$ *(рис. 41).*

Поверхню S та її проекцію D_{xy} *- коло* $x^2+y^2\le 1$. *Рівняння обмежуючого кола отримаємо, якщо в рівняння поверхні S підставити* $z=0$.

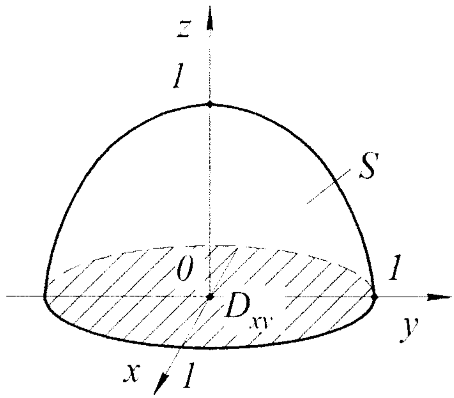


Рисунок 41

Отримуємо: $z'_x=-2x,\ z'_y=-2y.$

За формулою (123) *отримаємо:*

$$\iint\limits_S \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} \left(1+4x^2+4y^2\right)dxdy = \begin{vmatrix} x=\rho\cos\varphi, & D\to D', \\ y=\rho\sin\varphi, & D':0\le\rho\le 1, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le 2\pi. \end{vmatrix} =$$

$$= \iint\limits_{D'} \rho\left(1+4\rho^2\right)d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{1}\rho\left(1+4\rho^2\right)d\rho = \varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}+\rho^4\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\frac{3}{2} = 3\pi.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити поверхневі інтеграли першого роду:

1) $\iint\limits_S (xy - x + 4z)ds$, де S – частина площини $x + y + z = 2$, яка розташована в першому октанті.

2) $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, де S – півсфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

2. Обчислити площу поверхні S за допомогою поверхневого інтеграла першого роду:

1) S – півсфера $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, яка розташована в першому октанті.

2) S – поверхня конуса $z^2 = 2xy$, яка обмежена площинами $x=a$, $y=a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

3. Обчислити масу поверхні S за допомогою поверхневого інтеграла першого роду, якщо його поверхнева густина описується співвідношенням $\mu(x; y; z)$:

1) S – півсфера $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, якщо $\mu = x^2 y^2$.

2) S – поверхня куба $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$, якщо $\mu = xyz$.

3.4. Поверхневі інтеграли другого роду

Сторона поверхні S, в кожній точці якої поставлено вектор нормалі $\vec{n}$, називається додатною, а інша її сторона (якщо вона існує) – від'ємною.

Якщо поверхня S замкнена і обмежує деяку область V, то додатною або зовнішньою стороною поверхні називається та її сторона, нормальні вектори якої направлені від області V, а від'ємною або внутрішньою – сторона, нормальні вектори якої направлені в середину області V.

Поверхня у якої існує додатна (зовнішня) та від'ємна (внутрішня) сторони, називається двосторонньою. Двосторонні поверхні характеризуються такою властивістю: якщо початок вектора нормалі $\vec{n}$ неперервно переміщувати по будь-якому замкнутому контуру L, що лежить на поверхні, то при поверненні в початкову точку напрям $\vec{n}$ співпаде із початковим (рис. 42). Двосторонніми поверхнями являються площини, всі поверхні другого порядку, тор та багато інших. Для односторонніх поверхонь вказане переміщення нормалі $\vec{n}$ при поверненні в початкову точку приводить до «антинормалі», тобто до вектора $-\vec{n}$. Класичним прикладом односторонньої поверхні являється лист Мебіуса (рис. 43).

Поверхня S із вибраною стороною називається о р і є н т о в а н о ю.

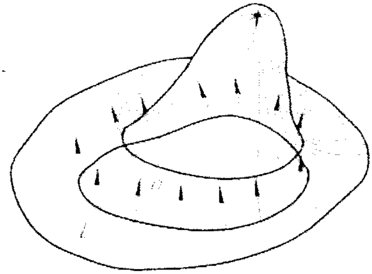


Рисунок 42

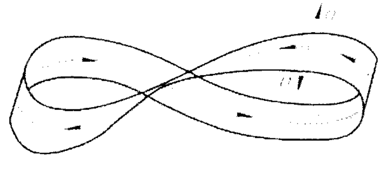


Рисунок 43

Якщо поверхня S задана рівнянням $z = f(x, y)$, то орт вектора нормалі визначається за формулою

$$\overrightarrow{n^0} = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,(z - f(x,y))}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\,(z - f(x,y))\right|}, \tag{126}$$

де знак "+" береться у випадку, коли кут γ гострий і "–" – коли γ тупий.

Якщо поверхня S задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то

$$\overrightarrow{n^0} = \pm \frac{\overrightarrow{\text{grad}}\ F(x,y,z)}{\left|\overrightarrow{\text{grad}}\ F(x,y,z)\right|}, \tag{127}$$

Розглянемо орієнтовану поверхню S, в кожній точці якої визначено вектор-функцію $\vec{a} = \vec{a}(P,Q,R)$, де $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$. Розіб'ємо поверхню S кусково-гладкими лініями, що їй належать, на елементарні ділянки S_i, площі яких $\Delta S_i (i = \overline{1,n})$, і виберемо у кожній із них довільну точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Тоді існує границя

$$\lim_{\varnothing S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{n^0}(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \tag{128}$$

яка називається поверхневим інтегралом другого роду від векторної функції $\vec{a}$ по поверхні S і позначається $\iint\limits_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} dS$. Таким чином, за означенням

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} dS = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS \tag{129}$$

Поверхневі інтеграли другого роду мають властивості лінійності та адитивності. При зміні сторони поверхні на протилежну, тобто при заміні $\overrightarrow{n^0}$ на $-\overrightarrow{n^0}$, інтеграл (129) змінює знак.

Так як $\cos\alpha \cdot dS = dydz$, $\cos\beta \cdot dS = dzdx$, $\cos\gamma \cdot dS = dxdy$, то інтеграл (129) можна записати у вигляді

$$\iint\limits_S \vec{a} \cdot \overrightarrow{n^0} dS = \iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \tag{130}$$

Правила обчислення поверхневих інтегралів другого роду

1. Якщо поверхня S однозначно проектується на координатні площини в області D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} і її рівняння можна записати, як

$$z=f_1(x,y),\ x=f_2(y,z),\ y=f_3(x,z),$$

то

"+" - якщо α гострий

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n^0}dS=\pm\iint\limits_{D_{yz}} P\left(f_2(y,z),y,z\right)dydz\pm$$

"+" - якщо β гострий

$$\pm\iint\limits_{D_{xz}} Q\left(x,f_3(x,z),z\right)dxdz\pm \qquad (131)$$

"+" - якщо γ гострий

$$\pm\iint\limits_{D_{xy}} R\left(x,y,f_1(x,y)\right)dxdy$$

2.1. Якщо поверхня S задається рівнянням $z=\varphi(x,y)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Oz, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oxy в область D_{xy}, то

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n^0}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\vec{a}(x,y,\varphi(x,y))\cdot\vec{n}\cdot dxdy,\\ &\vec{n}=\pm\overrightarrow{\text{grad}}\left(z-\varphi(x,y)\right),\end{aligned} \qquad (132)$$

де знак "+" якщо кут γ гострий і "−" якщо γ тупий.

2.2. Якщо поверхня S задається рівнянням $y=\psi(x,z)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Oy, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oxz в область D_{xz}, то

$$\begin{aligned}&\iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n^0}dS=\iint\limits_{D_{xz}}\vec{a}(x,\psi(x,z),z)\cdot\vec{n}\cdot dxdz,\\ &\vec{n}=\pm\overrightarrow{\text{grad}}\left(y-\psi(x,z)\right),\end{aligned} \qquad (133)$$

де знак "+" якщо кут β гострий і "−" якщо β тупий.

2.3. Якщо поверхня S задається рівнянням $x=\eta(y,z)$, будь-яка пряма, що паралельна осі Ox, перетинає поверхню S тільки в одній точці і поверхня S проектується на площину Oyz в область D_{yz}, то

$$\iint\limits_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}dS = \iint\limits_{D_{yz}} \vec{a}(\eta(y,z),y,z)\cdot\vec{n}\cdot dydz,$$
$$\vec{n} = \pm\overrightarrow{\text{grad}}\,(x-\eta(y,z)), \tag{134}$$

де знак "+" якщо кут α гострий і "−" якщо α тупий.

3. Якщо S – замкнена гладка поверхня, яка обмежує область V, і $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$ – функції, що неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області V, то справедлива формула Остроградського-Гауса

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \tag{135}$$

або

$$\iint\limits_S \left(P\cos(\alpha) + Q\cos(\beta) + R\cos(\gamma)\right)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz, \tag{136}$$

де $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ – напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні S.

Приклад 39. Обчислити $I = \iint\limits_S zdydz - 4ydzdx + 8x^2dxdy$, *де* S – *частина поверхні* $z = x^2 + y^2 + 1$, *що обмежена площиною* $z = 2$ *(рис. 44), якщо нормаль* $\vec{n}$ *до поверхні* S *утворює із віссю* Oz *тупий кут* γ.

Скористаємось формулою (132).

$$\vec{n} = -\overrightarrow{grad}\left(z - x^2 - y^2 - 1\right) = 2x\cdot\vec{i} + 2y\cdot\vec{j} - \vec{k};$$
$$\vec{a} = z\cdot\vec{i} - 4y\cdot\vec{j} + 8x^2\cdot\vec{k}.$$

Тоді

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (2xz - 8y^2 - 8x^2)dxdy =$$
$$= \iint\limits_{D_z} \left(2x(x^2+y^2+1) - 8(x^2+y^2)\right)dxdy =$$
$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos(\varphi) \\ y = \rho\sin(\varphi) \end{vmatrix} = \iint\limits_{D_{xy}} \left(2\rho\cos(\varphi)(\rho^2+1) - 8\rho^2\right)\rho d\rho d\varphi =$$
$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \left(2\rho\cos(\varphi)(\rho^2+1) - 8\rho^2\right)\rho d\varphi = -\int_0^1 16\pi\rho^3 d\rho = -4\pi.$$

Приклад 40. Обчислити

$$I = \iint\limits_S (x+y)dydz + (y+z)dxdz + (z+x)dxdy$$

Якщо S – *зовнішня сторона поверхні тіла, обмеженого площинами* $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+2y+3z=6$.

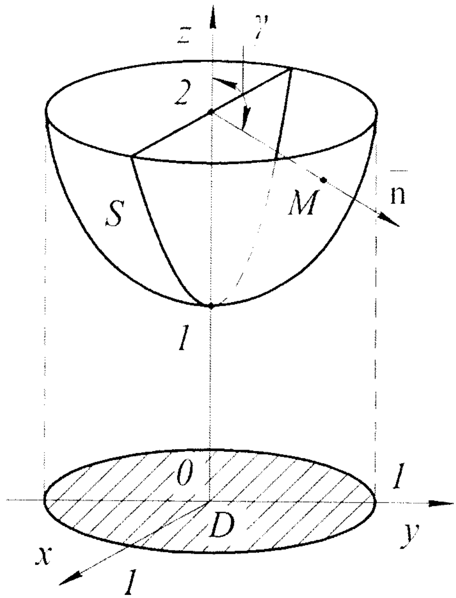


Рисунок 44

Із формули (135)

$$I = \iiint\limits_V (1+1+1)dxdydz = 3\iiint\limits_V dxdydz = 18$$

так як останній потрійний інтеграл дорівнює об'єму тетраедра (рис. 45).

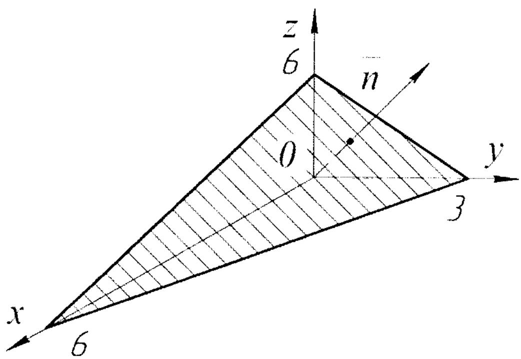


Рисунок 45

Приклад 41. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I = \iint\limits_S x dydz + dxdz + z^2 dxdy$, *де* S *– зовнішня сторона поверхні сфери* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, *яка розміщена у другому октанті* $(x \le 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

Поверхня S *та її проекції на координатні площини зображенні на рис. 46 та рис. 47. Проекції* D_{xy}, D_{xz}, D_{yz} *є чверті кругів з центром у початку координат та радіусами рівними одиниці. Одиничний вектор нормалі* $\vec{n}$ *до поверхні* S *утворює гострі кути з осями* $0y$ *та* $0z$, *і тупий кут з віссю* $0x$, *тому* $\cos(\alpha) < 0, \cos(\beta) > 0, \cos(\gamma) > 0$.

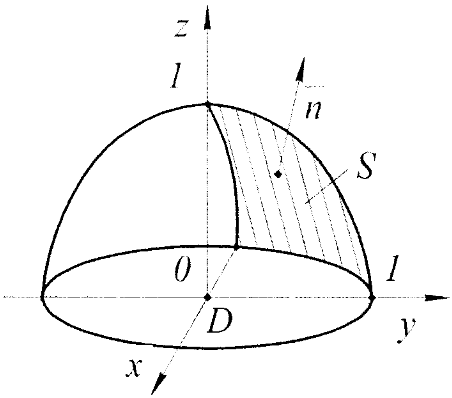


Рисунок 46

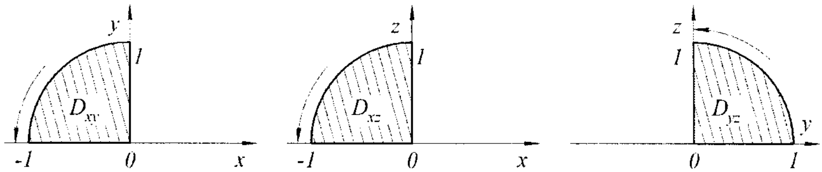


Рисунок 47

Отримуємо

$$z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}; \quad y(x, z) = \sqrt{1 - x^2 - z^2}; \quad x(y, z) = -\sqrt{1 - y^2 - z^2}.$$

Отже,

$$I = \iint\limits_S x dydz + dxdz + z^2 dxdy = \iint\limits_S x dydz + \iint\limits_S dxdz + \iint\limits_S z^2 dxdy,$$

де

$$\iint\limits_S z^2dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}\left(1-x^2-y^2\right)dxdy=\left|\begin{array}{ll} x=\rho\cdot\cos(\varphi), & D_{xy}\to D_{\rho\varphi} \\ y=\rho\cdot\sin(\varphi), & D_{\rho\varphi}:0\le\rho\le 1, \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi, & \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi. \end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho\left(1-\rho^2\right)d\rho d\varphi=\int\limits_{\pi/2}^{\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho=\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4};$$

$$\iint\limits_S xdydz=-\iint\limits_{D_{yz}}-\sqrt{1-y^2-z^2}\,dydz=\left|\begin{array}{ll} y=\rho\cdot\cos(\varphi), & D_{yz}\to D_{\rho\varphi} \\ z=\rho\cdot\sin(\varphi), & D_{\rho\varphi}:0\le\rho\le 1, \\ dydz=\rho d\rho d\varphi, & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right|=$$

$$=\iint\limits_{D_{\rho\varphi}}\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho d\varphi=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3\cdot 2}\left(1-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{\pi}{6}\cdot(0-1)=\frac{\pi}{6};$$

$$\iint\limits_S dxdz=\iint\limits_{D_{xz}}dxdz=S_{xz}=\frac{\pi}{4}.$$

В результаті отримуємо

$$I=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2}{3}\pi.$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

1) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – верхня частина поверхні $x+2y+z=6$, яка розташована в першому октанті.

2) $\iint\limits_S x^2dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні параболоїда $z=\dfrac{H}{R^2}\left(x^2+y^2\right), x\ge 0, y\ge 0, z\le H.$

3) $\iint\limits_S x^2dydz+3ydxdz-2xzdxdy$, де S – зовнішня сторона піраміди, яка обмежена площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1.$

4) $\iint\limits_S xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона циліндра $x^2+y^2=R^2$ з основами z=0 та z=H.

3.5. Потік векторного поля через поверхню. Дивергенція векторного поля

Потоком векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через поверхню S в бік вектора нормалі $\overrightarrow{n^0}$ поверхні S називається поверхневий інтеграл другого роду

$$\Pi=\iint_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}dS. \qquad (137)$$

Фізичний зміст поверхневого інтеграла другого роду: якщо вектор $\vec{a}=(P,Q,R)$ визначає векторне поле швидкостей течії нестисливої рідини, то інтеграл (137) дорівнює об'єму рідини, що протікає через поверхню S в напрямку нормалі $\overrightarrow{n^0}$ за одиницю часу.

Із формули (137) очевидно, що Π – скаляр і, якщо кут $(\vec{a},\overrightarrow{n^0})<\frac{\pi}{2}$, то $\Pi>0$; якщо ж $(\vec{a},\overrightarrow{n^0})>\frac{\pi}{2}$, то $\Pi<0$; якщо $(\vec{a},\overrightarrow{n^0})=\frac{\pi}{2}$, то $\Pi=0$.

Нехай S – замкнена кусково-гладка поверхня, одиничний вектор зовнішньої нормалі до якої $\overrightarrow{n^0}$. Тоді потік Π вектора $\vec{a}=(P,Q,R)$ через поверхню S можна обчислити з допомогою формули Остроградського – Гауса (135):

$$\Pi=\iint_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}dS=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz. \qquad (138)$$

Нехай $\vec{a}(M)$ - поле швидкостей нестисливої рідини. Якщо $\Pi>0$, то із формули (138) випливає, що із області V витікає більше рідини, аніж затікає. Це означає, що всередині області V є джерела, тобто точки, із яких рідина витікає. Якщо $\Pi<0$, то із області V витікає менше рідини, ніж затікає в неї. В цьому випадку говорять, що всередині області V є стоки. При $\Pi=0$ в область V затікає стільки ж рідини, скільки витікає.

Нехай в області V задано векторне поле $\vec{a}=(P,Q,R)$, де $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в області V. Тоді **дивергенцією** векторного поля $\vec{a}(M)$ в точці M називається величина

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_M \qquad (139)$$

З фізичної точки зору $\operatorname{div}\vec{a}(M)$ характеризує густину джерел або стоків векторного поля $\vec{a}(M)$ в точці M. Якщо $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$, то точка M є джерелом, якщо $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$ – стоком. У випадку коли $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$, в точці M немає ні джерел, ні стоків.

Властивості дивергенції векторного поля.

1. $\operatorname{div}(\vec{a}+\vec{b}) = \operatorname{div}\vec{a} + \operatorname{div}\vec{b}$;

2. $\operatorname{div}\vec{c} = 0$, якщо $\vec{c}$ – сталий вектор;

3. $\operatorname{div}(f\vec{a}) = f\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$, де $f = f(x,y,z)$ – скалярна функція.

Із формул (138) і (139) випливає, що

$$\Pi = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}dS = \iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{a}(M)dxdydz, \qquad (140)$$

тобто, потік Π векторного поля $\vec{a}(M)$ через замкнену поверхню S у зовнішній її бік чисельно дорівнює потрійному інтегралові від дивергенції цього поля по області V, що обмежена поверхнею S.

Приклад 42. Обчислити дивергенцію векторного поля

$$a(M) = (x^2+y)i + (y^2+z)j + (z^2+x)k$$

в точці $M_0(1,-2,3)$.

Згідно із формулою

$$\operatorname{div}\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$$

В точці M_0 *маємо* $\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = 4 > 0$, *тобто точка* M_0 *є джерелом поля.*

Приклад 43. Обчислити потік векторного поля $\vec{a} = y^2\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ *через частину поверхні параболоїда* $z = x^2 + y^2, z \le 2$ *за напрямком нормалі, зовнішньої по відношенню до області, обмеженої параболоїдом та площиною z=2 (рис. 48).*

Частина S поверхні параболоїда $z = x^2 + y^2, z \le 2$ *проектується взаємно однозначно на площину 0xy у коло D з радіусом* $R = \sqrt{2}$ *(рис. 48). Тому потік векторного поля* $\vec{a}$ *через поверхню S за напрямком нормалі* $\vec{n}$ *дорівнює*

$$\Pi_S = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}dS = \iint\limits_{D_{xy}} \left.\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}}{|\cos(\gamma)|}\right|_{z=x^2+y^2} dxdy.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$ *то використовуючи формули:*

$$\vec{n} = \pm\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}; \quad \cos(\gamma) = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}};$$

та враховуючи, що кут γ між віссю 0z та нормалю $\vec{n}$ *є тупим, отримаємо*

$$\vec{n}=\frac{2x\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}};\quad \cos(\gamma)=-\frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}};$$

$$\left.\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{n^0}}{|\cos(\gamma)|}\right|_{z=x^2+y^2}=\left.\frac{\left(y^2\vec{j}+z\vec{k}\right)\cdot\overrightarrow{n^0}}{|\cos(\gamma)|}\right|_{z=x^2+y^2}=2y^3-\left(x^2+y^2\right).$$

Отже, $\Pi_S=\iint\limits_{D_{xy}}\left[2y^3-\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy.$

Областю інтегрування D є коло з центром у початку координат. Тому для обчислення подвійного інтеграла доцільно ввести полярні координати, прийнявши $x=\cos(\varphi)$, $y=\sin(\varphi)$.

Отже, отримаємо

$$\Pi_S=\iint\limits_{D_{xy}}\left[2y^3-\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}\left(2\rho^4\sin^3(\varphi)-\rho^3\right)d\rho=-2\pi.$$

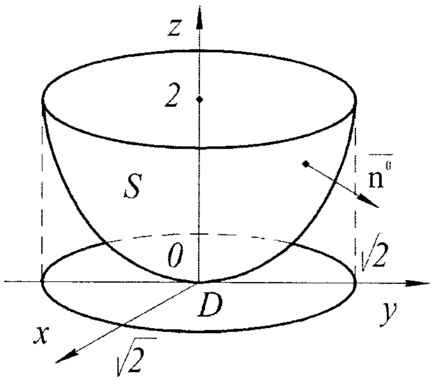


Рисунок 48

Завдання для розв'язання

1. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(2z+x)\vec{j}+3z\vec{k}$ через верхню сторону трикутника, вирізаного із площини $x+4y+z-4=0$ координатними площинами.

2. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z\vec{k}$ через частину поверхні гіперболічного параболоїда $z=\frac{H}{R^2}\left(x^2-y^2\right)$, що вирізається циліндром $x^2+y^2=R^2$, орієнтованої в напрямі орта $\vec{k}$.

3. Обчислити дивергенцію векторного поля $\vec{a}(M)=\left(xy+z^2\right)\vec{i}+\left(yz+x^2\right)\vec{j}+\left(zx+y^2\right)\vec{k}$ в точці M(1, 3, -5).

4. Обчислити потік векторного поля $\vec{a}$ через замкнену поверхню S у напрямі зовнішньої нормалі, використовуючи формулу Остроградського-Гаусса:

1) $\vec{a}=x^3\vec{i}+y^3\vec{j}-z^3\vec{k}$, S – поверхня куба $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a$.

2) $\vec{a}=x^2y\vec{i}+xy^2\vec{j}+xyz\vec{k}$, S: $x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0$.

3) $\vec{a}=x\vec{i}-2y\vec{j}-z\vec{k}$, S – поверхня тіла, обмеженого параболоїдом $1-z=x^2+y^2$ та площиною z=0.

3.6. Циркуляція векторного поля. Ротор векторного поля

Нехай Γ – замкнена кусково-гладка крива у просторі і S – гладка поверхня, межею якої є крива Γ. За додатній напрям обходу кривої Γ приймається такий напрям, при якому область, що обмежена цією кривою, буде залишатися зліва на додатній стороні поверхні S, тобто на стороні, із точок якої виходить одиничний вектор нормалі $\overrightarrow{n^0}=\left(\cos(\alpha),\ \cos(\beta),\ \cos(\gamma)\right)$ поверхні S. Нехай на поверхні S задано вектор $\vec{a}=(P,Q,R)$, координати якого $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z)$ є неперервними функціями разом зі своїми частинними похідними. Тоді має місце формула Стокса, яка пов'язує криволінійні та поверхневі інтеграли (рис. 49):

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=$$
$$=\iint_S\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\alpha)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\beta)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\gamma)\right)dS. \tag{141}$$

де напрям обходу по замкнутій кривій Г вибирається додатнім.

Формула Гріна (98) є частинним випадком формули Стокса, коли крива Г та поверхня S лежать на площині Oxy.

Якщо задано векторне поле $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$ і деяка замкнена кусково-гладка крива Γ, то криволінійний інтеграл

$$C=\oint_\Gamma \vec{a}\cdot\overrightarrow{\tau^0}dl=\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz \tag{142}$$

називається циркуляцією векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж контуру Γ. Тут $\overrightarrow{\tau^0}$ – одиничний вектор, що направлений по дотичній до кривої Γ і вказує напрям обходу по контуру.

Якщо $\vec{a}$ – вектор сили, циркуляція (142) дорівнює роботі цієї сили вздовж замкненої кривої Γ.

Ротором або вихором векторного поля $\vec{a}(M)=(P,Q,R)$ називається вектор

$$\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\vec{k}. \qquad (143)$$

Використовуючи поняття ротора (143) і циркуляції (142), формулу Стокса (141) можна записати у векторній формі:

$$C=\oint\limits_{\Gamma}\vec{a}\cdot\vec{\tau}^{0}dl=\iint\limits_{S}\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}(M)\cdot\vec{n}^{0}dS \qquad (144)$$

тобто циркуляція векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж замкнутого контуру Γ рівна потокові ротора цього поля через будь-яку гладку поверхню S, межею якої є Γ. Напрям обходу по Γ і сторона поверхні S одночасно або додатні або від'ємні.

Властивості ротора векторного поля.

1. $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}+\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{b};$
2. $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{c}=0,$ якщо $\vec{c}$ – сталий вектор;
3. $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\vec{a}\right)=f\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}+\overrightarrow{\text{grad}}\left(f\vec{a}\right),$ де $f(x,y,z)$ – скалярна функція.

Якщо $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{a}\neq 0,$ то це свідчить про обертання векторного поля $\vec{a}(M)$.

Приклад 44. Обчислити циркуляцію векторного поля

$$\vec{a}=(z^2-x^2)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+(y^2-z^2)\vec{k}$$

по контуру $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $z>0$.

Контуром інтегрування Γ *є коло* $x^2+y^2=2$, *що лежить у площині* $z=\sqrt{2}$, *яке отримане в результаті перетину сфери* $x^2+y^2+z^2=4$ *із конусом* $x^2+y^2=z^2$ *(рис. 50).*

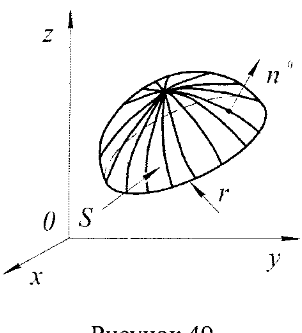


Рисунок 49

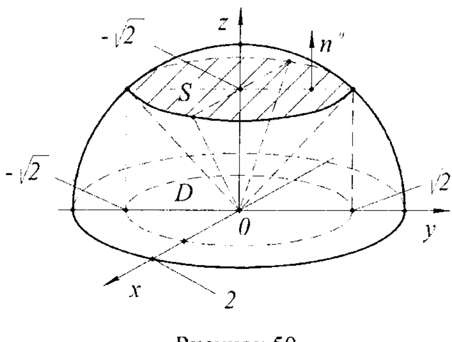


Рисунок 50

Враховуючи, що $P = z^2 - x^2$, $Q = x^2 - y^2$, $R = y^2 - z^2$, *отримаємо*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 2z,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x.$$

Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса.

$$C = \oint_{\Gamma} (z^2 - x^2)dx + (x^2 - y^2)dy + (y^2 - z^2)dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dxdz & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 - x^2 & x^2 - y^2 & y^2 - z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_S 2ydydz + 2zdxdz + 2xdxdy.$$

В якості поверхні S, для якої Г буде межею вибираємо коло S, для якого $x^2 + y^2 \le 2$, $z = \sqrt{2}$. *За нормаль* $\overrightarrow{n^0}$ *приймаємо одиничний вектор* $\vec{k}$, *який напрямлений по осі 0z, тобто* $\overrightarrow{n^0} = \vec{k} = (0, 0, 1)$. *Тоді:*

$$C = \iint_S 2ydydz + 2zdxdz + 2xdxdy = \iint_{D_{xy}} 2xdxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = 2\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 d\rho = 0.$$

Приклад 45. Обчислити ротор векторного поля

$$\vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}.$$

За означенням $rot(\vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y, z) & Q(x, y, z) & R(x, y, z) \end{vmatrix}$.

Враховуючи, що $P = z - y$, $Q = x - z$, $R = y - x$, *отримаємо*

$$rot(\vec{a})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z-y & x-z & y-x\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial(y-x)}{\partial y}-\frac{\partial(x-z)}{\partial z}\right)\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial(y-x)}{\partial x}-\frac{\partial(z-y)}{\partial z}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(x-z)}{\partial x}-\frac{\partial(z-y)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(1-(-1))\vec{i}-(-1-1)\vec{j}+(1-(-1))\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=$$

$$=2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).$$

Завдання для розв'язання

1. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж контуру L двома способами: а) безпосередньо, використовуючи означення циркуляції; б) використовуючи формули Стокса.

1) $\vec{a}=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, L – контур трикутника, отриманого при перетині з координатними площинами площини $2x+y+2z=2$ при додатному напрямі обходу відносно нормального вектора площини $\vec{n}=(2,1,2)$.

2) $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$, L – контур, який описується рівняннями: $x^2+y^2=1, z=0$.

3) $\vec{a}=z\vec{i}-y\vec{k}$, L – контур: $x^2+y^2=1, x+y+z=1$.

2. Обчислити потік ротора векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ через поверхню параболоїда обертання $z=2(1-x^2-y^2)$, яка відтинається площиною $z=0$. Під час розв'язання застосувати теорему Стокса.

3. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж замкненого контуру L (в напрямку зростання параметра t). $\vec{a}=-x^2y^3\vec{i}+2\vec{j}+xy\vec{k}$, L – контур: $x=\sqrt{2}\cos(t), y=\sqrt{2}\sin(t), z=1$.

3.7. Диференціальні операції другого порядку. Класифікація векторних полів

Диференціальні операції

Приведені вище основні поняття векторного аналізу: градієнт, дивергенція, ротор – зручно описувати з допомогою диференціального оператора, який позначається символом ∇ (читається «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \qquad (145)$$

і називається оператором Гамільтона.

Виразимо основні диференціальні операції з допомогою оператора ∇:

$$\nabla u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}}\, u(M), \qquad (146)$$

$$\nabla \cdot \vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div}\, \vec{a}(M), \qquad (147)$$

$$\nabla \times \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M). \qquad (148)$$

Операції находження градієнта, дивергенції, ротора називаються диференціальними операціями першого порядку.

Перерахуємо основні властивості диференціальних операцій другого порядку:

$$\text{div}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u(M) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u(M), \qquad (149)$$

де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ називається оператором Лапласа;

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{grad}}\, u(M) = (\nabla \cdot \nabla)\, u(M) = 0, \qquad (150)$$

$$\text{div}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}(M)) = 0, \qquad (151)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{a}(M) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}(M)), \qquad (152)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M) = \nabla \times (\nabla \times \vec{a}(M)) = \overrightarrow{\text{grad}}\, \text{div}\, \vec{a}(M) - \Delta \vec{a}(M). \qquad (153)$$

Соленоїдальне векторне поле

Векторне поле $\vec{a}(M)$ називається соленоїдальним в області простору V, якщо в кожній точці цієї області

$$\text{div}\, \vec{a}(M) = 0. \qquad (154)$$

Так як $\text{div}\, \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M) = 0$, то поле ротора будь-якого векторного поля $\vec{a}(M)$ являється соленоїдальним.

Для кожного соленоїдального поля $\vec{a}(M)$ існує векторне поле $\vec{b}(M)$, таке, що $\vec{a}(M) = \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{b}(M)$. Вектор $\vec{b}(M)$ називається вектором-потенціалом даного поля $\vec{a}(M)$.

Потенціальне векторне поле

Векторне поле $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ називається **потенціальним** або **безвихровим** у однозв'язній області простору V, якщо в кожній точці цієї області

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M) = 0. \qquad (155)$$

Згідно визначенню ротора, необхідними і достатніми умовами потенціального поля $\vec{a}(M) = (P, Q, R)$ є рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases} \qquad (156)$$

Так як $\overrightarrow{\text{rot}}\, \text{grad}\, u(M) = 0$, то поле градієнта будь-якого скалярного поля $u = u(x, y, z)$ – потенціальне. Для того, щоб поле $\vec{a}(M)$ було потенціальним в області V, необхідно і достатньо, щоб існувала двічі неперервно-диференційована скалярна функція $u = u(x, y, z)$, така, що $\vec{a} = \text{grad}\, u(M)$, яка називається **потенціальною функцією** або **потенціалом** поля $\vec{a}(M)$.

Так як при виконанні умов (156) криволінійний інтеграл другого роду не залежить від лінії, що з'єднує точки M_0 і M_1, то для потенціального поля $\vec{a}(M) = Pi + Qj + Rk$ справедлива формула для находження потенціальної функції:

$$u(x, y, z) = \int\limits_{M_0 M} Pdx + Qdy + Rdz + C \qquad (157)$$

де $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – деяка фіксована точка області V, $M(x, y, z)$ – будь-яка точка області V; C – деяка стала.

Гармонічне векторне поле

Векторне поле $\vec{a}(M)$, що задовольняє дві умови: $\text{div}\, \vec{a}(M) = 0$ і $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{a}(M) = 0$, називається **гармонічним**. Потенціал u гармонічного поля є розв'язком рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (158)$$

Функція $u = u(x, y, z)$, що задовольняє рівняння Лапласа (158), називається гармонічною.

Приклад 46. Показати, що поле $\vec{a}(M)=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$ *є потенціальним та соленоїдальним. Знайти потенціал* u *даного поля.*

Маємо: $P(x,y,z)=y+z$, $Q(x,y,z)=x+z$, $R(x,y,z)=x+y$. *Тоді*

$$\overline{\text{rot}}\ \vec{a}(M)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial y}(x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(x+z)\right)\cdot\vec{i}-$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y)-\frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right)\cdot\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}(x+z)-\frac{\partial}{\partial y}(y+z)\right)\cdot\vec{k}=$$

$$=(1-1)\cdot\vec{i}-(1-1)\cdot\vec{j}+(1-1)\cdot\vec{k}=0,$$

тобто поле $\vec{a}(M)$ *- потенціальне.*

Враховуючи, що

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0+0+0=0,$$

тому поле $\vec{a}(M)$ *є соленоїдальним.*

Згідно з формулою (157),

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz+C$$

Так як функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні у всіх точках простору, то в якості точки* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *можна взяти початок координат* $O(0,0,0)$, *а в якості* $M(x,y,z)$ *- довільну точку простору. Як зазначалося раніше, криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, тому його можна обчислити по ломаній OABM (рис. 51):*

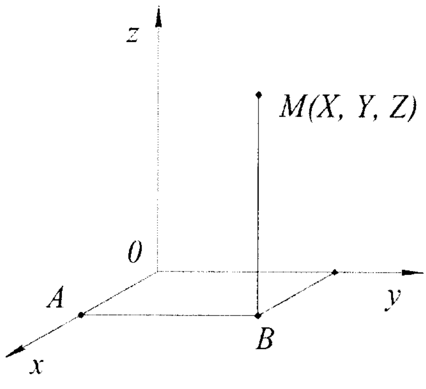


Рисунок 51

$$u(X,Y,Z)=\int_{OM}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz+C=$$

$$=\int_{OA}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz+\int_{AB}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz+$$

$$+\int_{BM}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz+C=$$

$$=\begin{vmatrix} OA:\ y=0,\, z=0,\, dy=0,\, dz=0,\, 0\le x\le X, \\ AB:\ x=X,\, z=0,\, dx=0,\ dz=0,\, 0\le y\le Y, \\ BM:\, x=X,\, y=Y,\, dx=0,\, dy=0,\, 0\le z\le Z \end{vmatrix}=$$

$$=\int_0^X 0\cdot dx+\int_0^Y Xdy+\int_0^Z (X+Y)dz+C=XY+XZ+YZ+C.$$

Замінивши у останньому рівнянні X,Y,Z *на* x,y,z, *запишемо вираз для потенціалу поля:*

$$u(x,y,z)=xy+xz+zy+C.$$

Потенціал u *даного поля також можна знайти за допомогою формули:*

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz,$$

прийнявши $x_0=y_0=z_0=0$.

Отже, для вище наведених функцій P, Q, R, отримаємо

$$P(x,y_0,z_0)=0,\quad Q(x,y,z_0)=x,\quad R(x,y,z)=x+y.$$

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0dx+\int_0^y xdy+\int_0^z x+ydz=xy+xz+yz+C.$$

Приклад 47. Довести, що векторне поле є соленоїдальним, якщо $\vec{a}=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$.

Згідно з означенням, векторне поле $\vec{a}$ *є соленоїдальним, якщо* $div(\vec{a})=0$.

Маємо: $P=2xyz,\ Q=-y(yz+1),\ R=z$.

Обчислимо $div(\vec{a})$:

$$div\,\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2yz-2yz-1+1=0.$$

Отже, векторне поле $\vec{a}$ *є соленоїдальним.*

Приклад 48. Довести, що векторне поле $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$, $x, y \neq 0$ *є гармонічним.*

Маємо: $P(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $R(x,y,z) = 0$. *Тоді*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot\vec{i} -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)\cdot\vec{k} =$$

$$= (0-0)\cdot\vec{i} - (0-0)\cdot\vec{j} + \left(\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right)\cdot\vec{k} = 0,$$

а $div\left(\vec{a}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = 0$, *то дане поле* $\vec{a}$ *є гармонічним.*

Приклад 49. Використовуючи оператор Гамільтона («набла»), знайти вирази для: 1) $grad(u\cdot v)$, 2) $div\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$, 3) $rot\left(u\times\vec{a}\right)$, 4) $rot\left(rot\left(\vec{a}\right)\right)$.

1) $grad(u\cdot v) = \nabla(uv) = \nabla(\overset{\downarrow}{u}v) + \nabla(u\overset{\downarrow}{v}) = v\nabla(u) + u\nabla(v) =$

$= v\cdot grad(u) + u\cdot grad(v)$.

В даному прикладі перш за все враховано диференціальні властивості оператора Гамільтона. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор.

2) $div\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \nabla\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{a}}\times\vec{b}) + \nabla(\vec{a}\times\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = (\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b}) + (\nabla,\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}}) =$

$= (\vec{b},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}}) - (\vec{a},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{b}}) = \vec{b}(\nabla\times\vec{a}) - \vec{a}(\nabla\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot rot\left(\vec{a}\right) - \vec{a}\cdot rot\left(\vec{b}\right)$.

В цьому прикладі перш за все враховано диференціальні властивості оператора Гамільтона. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор. Потім розглянули кожний доданок як мішаний добуток векторів та скористалися властивістю циклічної перестановки *множників у вказаному добутку (для мішаного добутку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ця властивість така: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)=-\left(\vec{c},\vec{b},\vec{a}\right)=$ $=-\left(\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right)$; тут використано послідовність таких перетворень: $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{c},\vec{a},\vec{b}\right)=-\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)$, тобто $(\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}},\vec{b})=(\vec{b},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{a}})$, $(\nabla,\vec{a},\overset{\downarrow}{\vec{b}})=$ $=-(\vec{a},\nabla,\overset{\downarrow}{\vec{b}})$).*

3) $rot\left(u\vec{a}\right)=\nabla\times\left(u\cdot\vec{a}\right)=\nabla\times(\overset{\downarrow}{u}\cdot\vec{a})+\nabla\times(u\cdot\overset{\downarrow}{\vec{a}})=-\vec{a}\times(\nabla u)+u(\nabla\times\vec{a})=$

$=-\left(\vec{a}\times grad(u)\right)+u\cdot rot(\vec{a})$.

В цьому прикладі насамперед враховано диференціальні властивості оператора Гамільтона. Стрілкою вказано множник, до якого застосовується цей оператор. Потім розглянули кожний доданок як векторний добуток векторів та скористалися в першому доданку властивістю антикомутативності векторного добутку $\left(\vec{a}\times\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right)$, в другому – тим, що скалярний множник виноситься за знак векторного добутку $\left(\vec{a}\times k\vec{b}=k\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)$.

4) $rot\left(rot\left(\vec{a}\right)\right)=\nabla\times\left(\nabla\times\vec{a}\right)=\nabla(\nabla\vec{a})-\vec{a}(\nabla\nabla)=grad\left(div(\vec{a})\right)-\nabla^2\vec{a}.$

В цьому прикладі використане представлення векторного добутку через скалярні добутки векторів (для подвійного векторного добутку векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ це представлення має вигляд: $\vec{a}\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$*).*

Завдання для розв'язання

1. Визначити чи є векторне поле $\vec{a}\left(M\right)$ потенціальне та знайти його потенціал.

$\vec{a}=\left(y+z\right)\vec{i}+\left(x+z\right)\vec{j}+\left(x+y\right)\vec{k}.$

2. Визначити чи є векторне поле $\vec{a}\left(M\right)$ соленоїдальним.

$$\vec{a}=\frac{x}{yz}\vec{i}+\frac{y}{xz}\vec{j}-\frac{\left(x+y\right)\ln\left(z\right)}{xy}\vec{k}.$$

3. Визначити чи є векторне поле $\vec{a}\left(M\right)$ гармонічним.

$\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}.$

4. Довести наведене нижче співвідношення, використовуючи оператор Гамільтона («набла»).

$rot\left(u\cdot\vec{a}\right)=u\cdot rot\left(\vec{a}\right)+\left[grad\left(u\right),\vec{a}\right].$

Застосування Wolfram Alpha

Подвійний інтеграл у Wolfram|Alpha

Для обчислення невизначених подвійних інтегралів Wolfram|Alpha використовує такий синтаксис:

- integrate x^2y+xy^2-x+y+5 dxdy

integrate x^2y+xy^2-x+y+5 dxdy

Indefinite integral:

$$\int\int(x^2\,y + x\,y^2 - x + y + 5)\,dx\,dy =$$
$$c_1\,x + c_2 + \frac{x^3\,y^2}{6} + \frac{x^2\,y^3}{6} - \frac{x^2\,y}{2} + \frac{x\,y^2}{2} + 5\,x\,y$$

Обов'язково в записі інтеграла потрібно вказувати змінні інтегрування, додаючи dxdy в кінці підінтегрального виразу, тому що Wolfram|Alpha неправильно інтерпретує запит на знаходження подвійного інтеграла.

Для обчислення певних подвійних інтегралів необхідно просто вказати межі інтегрування. У найпростішому випадку, обчислення подвійного інтеграла в Wolfram|Alpha виконується за запитом:

- integrate x^2y+xy^2-x+y+5 dxdy x=0..1, y=-1..2

integrate x^2y+xy^2-x+y+5 dxdy, x=0..1, y=-1..2

Definite integral:

$$\int_{-1}^{2}\int_{0}^{1}(x^2\,y + x\,y^2 - x + y + 5)\,dx\,dy = 17$$

Якщо подвійний інтеграл має змінні межі інтегрування, то форма запиту зберігається. Але, варто бути уважним та явно вказувати порядок інтегрування. Так, якщо змінна x має постійні межі інтегрування, а змінна y - змінні межі, то підінтегральний вираз має закінчуватися символами dydx (спочатку dy, а потім dx) (це допоможе Wolfram|Alpha правильно визначити послідовність повторного інтегрування при обчисленні подвійного інтеграла). Тобто правильний запит на обчислення подвійного інтеграла у

Wolfram|Alpha виглядає так:

integrate (x+y)dydx, x=0..1, y=x^2..root(x)

Definite integral:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{3}{10}$$

integrate sin(x+y)dxdy, y=0..pi/2, x=y..2y

Definite integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_y^{2y} \sin(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

Подвійні інтеграли із нескінченними межами обчислюються в Wolfram|Alpha аналогічно. Наприклад:

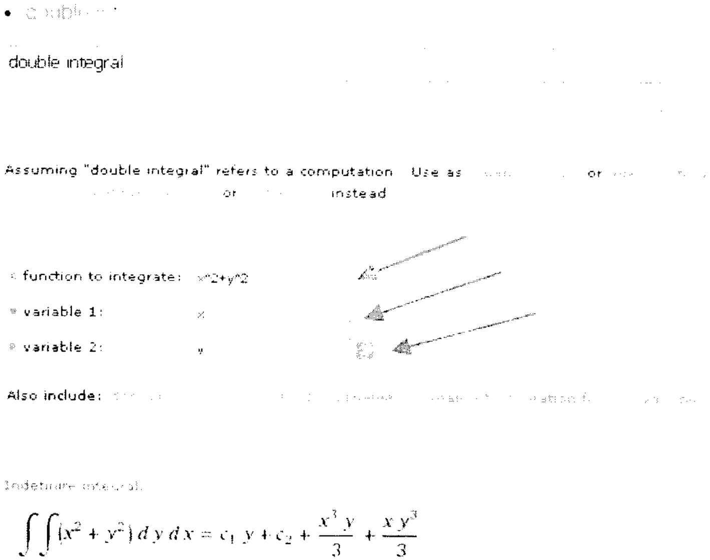
integrate e^-(x^2+y^2)dxdy, x=-oo..oo, y=-oo..oo

Definite integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi \approx 3.14159$$

Проте найпростіший метод обчислити подвійний інтеграл у Wolfram|Alpha – це скористатися калькулятором подвійних інтегралів.

Калькулятор подвійних інтегралів у Wolfram|Alpha виводиться за запитом



Для знаходження невизначених подвійних інтегралів за допомогою вказанного калькулятора потрібно спочатку ввести свою підінтегральну функцію, потім вказати першу та другу змінну інтегрування, а потім натиснути на знак "=".

Щоб визначити певний подвійний інтеграл за допомогою калькулятора, потрібно вказати межі інтегрування для кожної змінної. Для цього слід послідовно натиснути посилання на domain of integration for 1st variable та domain of integration for 2nd variable, які підкреслені на рисунку:

Після цього з'явиться можливість ввести межі інтегрування та обчислити подвійний інтеграл, натиснувши на кнопку "=":

function to integrate:	x+y
variable 1:	x
lower limit 1:	1
upper limit 1:	2
variable 2:	y
lower limit 2:	0
upper limit 2:	root(x)

Definite integral:

$$\int_1^2 \int_0^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy\,dx = \frac{7}{20} + \frac{8\sqrt{2}}{5} \approx 2.61274$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування:

1	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} f(x,y)dy$	2	$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{6-3x}^{x^2+2} f(x,y)dy$
3	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x-1}^{2-2x} f(x,y)dy$	4	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{2} f(x,y)dy$
5	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{2tg\, x} f(x,y)dy$	6	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{(x-2)^2} f(x,y)dy$
7	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{1-\frac{x}{2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)dy$	8	$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x,y)dy$
9	$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{4x^2}^{4} f(x,y)dy$	10	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy$
11	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{(x-1)^2} f(x,y)dy$	12	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\frac{x}{4}} f(x,y)dy$
13	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x}^{2-x} f(x,y)dy$	14	$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} dx \int\limits_{0}^{tg\, x} f(x,y)dy$
15	$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_{0}^{\cos x} f(x,y)dy$	16	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y)dy$
17	$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2-2x}^{4} f(x,y)dy$	18	$\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{0}^{(x-1)^2} f(x,y)dy$
19	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x}^{x^3+1} f(x,y)dy$	20	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{x}-1} f(x,y)dy$
21	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x} f(x,y)dy$	22	$\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{1-x^2}^{x+3} f(x,y)dy$
23	$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)dy$	24	$\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{1-x}^{\ln x} f(x,y)dy$

25	$\int_0^2 dx \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)dy$	26	$\int_0^1 dx \int_{2x-1}^{x} f(x,y)dy$
27	$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt[3]{x}} f(x,y)dy$	28	$\int_0^1 dx \int_0^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$
29	$\int_0^2 dx \int_{2-2x}^{2-x} f(x,y)dy$	30	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)dy$
31	$\int_0^1 dx \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	32	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{3x}} f(x,y)dy$
33	$\int_{-1}^0 dx \int_x^{\frac{x}{2}} f(x,y)dy$	34	$\int_0^1 dx \int_0^{x^5} f(x,y)dy$
35	$\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{x+1} f(x,y)dy$	36	$\int_0^2 dx \int_0^{2x^2} f(x,y)dy$
37	$\int_0^1 dx \int_{-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$	38	$\int_{-1}^0 dx \int_{1+x}^{x^2-1} f(x,y)dy$
39	$\int_0^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x,y)dy$	40	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{1-x}^{\cos x} f(x,y)dy$
41	$\int_0^1 dx \int_{x^3+1}^{6-3x} f(x,y)dy$	42	$\int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{1} f(x,y)dy$
43	$\int_0^1 dx \int_0^{2^x} f(x,y)dy$	44	$\int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{3}}^{3-3x} f(x,y)dy$
45	$\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_0^{2-x^2} f(x,y)dy$	46	$\int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2-1} f(x,y)dy$
47	$\int_0^1 dx \int_{x+1}^{\sqrt{x}+1} f(x,y)dy$	48	$\int_{-3}^3 dx \int_0^{9-x^2} f(x,y)dy$
49	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$	50	$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$
51	$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-(x-1)^2}}^{x} f(x,y)dy$	52	$\int_{-1}^1 dx \int_{3x^2}^{3} f(x,y)dy$

53	$\int_0^1 dx \int_{x^4}^{2-x} f(x,y)dy$	54	$\int_0^1 dx \int_0^{x^3+2} f(x,y)dy$
55	$\int_0^1 dx \int_{2x^3}^{4-2x} f(x,y)dy$	56	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt[4]{x}} f(x,y)dy$
57	$\int_0^2 dx \int_{-1}^{2-x} f(x,y)dy$	58	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{2\sin x} f(x,y)dy$
59	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\cos 2x} f(x,y)dy$	60	$\int_0^1 dx \int_{1-x}^{1+x} f(x,y)dy$
61	$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$	62	$\int_{-2}^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x,y)dy$
63	$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} dx \int_0^{5-x^2} f(x,y)dy$	64	$\int_0^1 dx \int_{2x+1}^{3^x} f(x,y)dy$
65	$\int_0^{\pi/4} dx \int_{-x}^{\sin 2x} f(x,y)dy$	66	$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{3-x^2} f(x,y)dy$
67	$\int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2-2} f(x,y)dy$	68	$\int_0^1 dx \int_{2x}^{3-x^2} f(x,y)dy$
69	$\int_0^1 dx \int_0^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$	70	$\int_0^1 dx \int_0^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$
71	$\int_0^2 dx \int_{\frac{3}{2}x-1}^{x} f(x,y)dy$	72	$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x,y)dy$
73	$\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)dy$	74	$\int_0^2 dx \int_{-x}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)dy$
75	$\int_0^2 dx \int_0^{-\sqrt{4-(x-2)^2}} f(x,y)dy$	76	$\int_0^1 dx \int_0^{x^3+2} f(x,y)dy$
77	$\int_0^1 dx \int_1^{x^2+2} f(x,y)dy$	78	$\int_{-\pi}^{\pi} dx \int_0^{\cos\frac{x}{2}} f(x,y)dy$
79	$\int_0^1 dx \int_1^{2-x^2} f(x,y)dy$	80	$\int_0^1 dx \int_{-1}^{x^3+1} f(x,y)dy$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями:

1	$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos x,\ y=\sin x,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{4}$
2	$\iint\limits_D (x-5y^2)\,dx\,dy,\ D: y=2^{x-1},\ y=2-x,\ y=0,\ x=0$
3	$\iint\limits_D (3x-y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos x,\ y=\cos\dfrac{x}{2},\ y=0$
4	$\iint\limits_D (3x+4y)\,dx\,dy,\ D: y=2\sin x,\ y=3-\dfrac{2x}{\pi},\ y=0$
5	$\iint\limits_D (x-5y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos\dfrac{x}{2},\ y=1+x,\ x=\pi$
6	$\iint\limits_D (y-x)\,dx\,dy,\ D: y=\sin 2x, y=0, x=0, x=\pi/4$
7	$\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy,\ D: y=\sin x,\ y=\dfrac{2}{\pi}x+1,\ x=-\dfrac{\pi}{2},\ x=0$
8	$\iint\limits_D (y^2-x)\,dx\,dy,\ D: y=3^{-x}, y=2x+1,\ y=3$
9	$\iint\limits_D (2x+y)\,dx\,dy,\ D: y=\sin 2x, y=x-\dfrac{\pi}{2}, y=1$
10	$\iint\limits_D y\,dx\,dy,\ D: y=2\sin x,\ y=\sin x,\ x=0,\ x=\pi$
11	$\iint\limits_D (x-y^2)\,dx\,dy,\ D: y=3x+1,\ y=x^2+1$
12	$\iint\limits_D x\,dx\,dy,\ D: y=\sin 2x,\ y=2\sin 2x$
13	$\iint\limits_D (x+3y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos 3x,\ y=x+1,\ x=\dfrac{\pi}{6}$
14	$\iint\limits_D (x^2-y^2)\,dx\,dy,\ D: (y-1)^2=x,\ x+y=1$
15	$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,\ D: y=x, y=x^4$
16	$\iint\limits_D (x+3y)\,dx\,dy,\ D: y=3^{-x},\ y=x+1,\ x=1,\ y=0$

17	$\iint\limits_D y^2 dx\,dy,\ D: y=2^{-x}, y=x+1, x=-1$
18	$\iint\limits_D xy^2 dx\,dy,\ D: y=e^{-5x},\ y=x+1,\ x=-1$
19	$\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy,\ D: y=5\sin x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{3}, \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$
20	$\iint\limits_D y^2 dx\,dy,\ D: y=3^{-2x}, y=x+1,\ x=-1$
21	$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,\ D: y=e^x, y=\frac{e}{2}(x+1), x=0$
22	$\iint\limits_D (x+7y)\,dx\,dy,\ D: y=5^{-x},\ y=x+1,\ x=1,\ y=0$
23	$\iint\limits_D (5x+4y)\,dx\,dy,\ D: y=\sin 4x,\ y=2-\frac{3x}{\pi}, x=0$
24	$\iint\limits_D (3x-y^2)\,dx\,dy,\ D: y^2=x+1,\ y=-x-1$
25	$\iint\limits_D (xy-x^3)\,dx\,dy,\ D: y=1-x^2, y=x^2-1$
26	$\iint\limits_D (3x-2y^2)\,dx\,dy,\ D: y=\frac{3}{2}\cos x,\ y=\frac{3x}{4\pi}+1,\ y=0$
27	$\iint\limits_D (2y-3x^2)\,dx\,dy,\ D: x=(y-1)^2, y-x=1$
28	$\iint\limits_D (3x-y^2)\,dx\,dy,\ D: y=\sqrt{x+1},\ y=\frac{x+1}{2}$
29	$\iint\limits_D (x^2-y)\,dx\,dy,\ D: y=2^{-x},\ y=x+1,\ x=1$
30	$\iint\limits_D y^2 dx\,dy,\ D: y=\sin x,\ x=-\frac{\pi}{2},\ y=0$
31	$\iint\limits_D (x-2y)\,dx\,dy,\ D: y-1=-(x-1)^2, y=-3x$
32	$\iint\limits_D (2x+y^2)\,dx\,dy,\ D: y=3\cos x,\ y=0,\ x=0, x>0$
33	$\iint\limits_D (x+3y)\,dx\,dy,\ D: y=1-(x-1)^2, y=-x$

34	$\iint\limits_D \left(e^x\right) dx\,dy,\ D: y=2-x^2,\ x=1,\ y=e^{-x}, x=0$
35	$\iint\limits_D x^2 dx\,dy,\ D: y=3^{-x},\ y=x+1,\ x=0,\ x=1$
36	$\iint\limits_D (5x-y)\,dx\,dy,\ D: y=x^2, y=\sqrt[5]{x}$
37	$\iint\limits_D (3x-7y)\,dx\,dy,\ D: y=x^4,\ y=\sqrt{x}$
38	$\iint\limits_D (7x+y)\,dx\,dy,\ D: y=e^{3x},\ y=\frac{e^3}{2}(x+1),\ x=0$
39	$\iint\limits_D x^2 dx\,dy,\ D: y=3\sin x,\ y=3\cos x,\ y=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{2}$
40	$\iint\limits_D 2^x dx\,dy,\ D: y=-x^2,\ y=x^2-2$
41	$\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy,\ D: y=2^{-x},\ y=1-x,\ x=1$
42	$\iint\limits_D \sin(x+3y)\,dx\,dy,\ D: x+y=1,\ \frac{x}{2}+y=1, y=0$
43	$\iint\limits_D \left(ye^x+x\right) dx\,dy,\ D: y=1-x,\ x=(1+y)^2$
44	$\iint\limits_D \left(y^2-3x\right) dx\,dy,\ D: y=\sqrt{x}, y=x^4$
45	$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos x,\ y=x+1,\ x=\frac{\pi}{2}$
46	$\iint\limits_D y\,dx\,dy,\ D: y=e^x,\ y=1-x,\ y=0,\ x=-1$
47	$\iint\limits_D (1+xy)\,dx\,dy,\ D: y=\frac{x}{2}-1,\ x=(y+1)^2,\ y=-1$
48	$\iint\limits_D (3x+2y)\,dx\,dy,\ D: y=2x-x^2, y=x^2$
49	$\iint\limits_D \left(x+x^2y\right) dx\,dy,\ D: y^2=x+1,\ 2y-x=1$
50	$\iint\limits_D y\,dx\,dy,\ D: y=e^x,\ y=e^{-x},\ x=-1,\ x=1$

51	$\iint\limits_D (x+6y)\,dx\,dy,\ D: y=2^{-x},\ y=x+1,\ x=-1$
52	$\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos x,\ y=0,\ y-x=1$
53	$\iint\limits_D (x+5y)\,dx\,dy,\ D: y=2^x, y=1-x,\ x=1$
54	$\iint\limits_D 5x\,dx\,dy,\ D: y=\sin\frac{x}{3},\ y=2\sin\frac{x}{3}$
55	$\iint\limits_D 3^x\,dx\,dy,\ D: y=x^2,\ y=4-x^2$
56	$\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy,\ D: y=e^{-2x},\ y=1+x,\ x=1$
57	$\iint\limits_D (4x+2xy)\,dx\,dy,\ D: y=2-x^2,\ y=x^2-2$
58	$\iint\limits_D (3x-4y)\,dx\,dy,\ D: y=e^x, y=x+1,\ x=0,\ x=1$
59	$\iint\limits_D (x-7y)\,dx\,dy,\ D: y=3^{-x}, y=1-2x$
60	$\iint\limits_D (x+6y)\,dx\,dy,\ D: y=2\sin x, y=2\cos x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$
61	$\iint\limits_D (xe^y+y)\,dx\,dy,\ D: y=1-x,\ x=(1+y)^2$
62	$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,\ D: y=\sin x, x+\frac{\pi}{2}y=\pi$
63	$\iint\limits_D (x+3y^3)\,dx\,dy,\ D: y=\sqrt[3]{x},\ y=3x$
64	$\iint\limits_D (5x+2y)\,dx\,dy,\ D: y=2\cos x,\ y=2\cos\frac{x}{2}, 0\le x\le\pi$
65	$\iint\limits_D (3x+y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos 4x,\ y=\sin 4x,\ 0\le x\le\frac{\pi}{6},\ y=0$
66	$\iint\limits_D \sin(5x+2y)\,dx\,dy,\ D: y=\frac{1-x}{2}, y=\frac{2-x}{4}, y=0$
67	$\iint\limits_D (x^2-y)\,dx\,dy,\ D: y=\cos x,\ y=\frac{2x}{\pi}-1, x=0$

68	$\iint\limits_D (5x-y)\,dx\,dy,\ D: y=\sin\frac{x}{2},\ y=2-\frac{x}{\pi}$
69	$\iint\limits_D \left(x^3+5^y\right)dx\,dy,\ D: x=1,\ x=5, y=-1,\ y=3$
70	$\iint\limits_D 3^x\,dx\,dy,\ D: y=x^2-1,\ y=1-x^2$
71	$\iint\limits_D \left(x^2+3y^2\right)dx\,dy,\ D: y=x,\ y=x^3,\ x>0$
72	$\iint\limits_D \left(2x+3y^2\right)dx\,dy,\ D: x=2(y-1)^2, y=1-\frac{x}{2}$
73	$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy,\ D: y=\frac{1}{2}\cos x,\ y=\frac{1}{2}\cos 3x,\ y=0,\ 0<x\le\frac{\pi}{2}$
74	$\iint\limits_D (3x-7y)\,dx\,dy,\ D: x+5=y^2,\ y=\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)$
75	$\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy,\ D: y=3^x,\ y=2x+1$
76	$\iint\limits_D (x+3y)\,dx\,dy,\ D: y^2=x+3, -\frac{x}{3}+\frac{y}{\sqrt{3}}=1$
77	$\iint\limits_D \left(5x^2-3y^2\right)dx\,dy,\ D: y=x^2, y=x^3$
78	$\iint\limits_D (3x-7y)\,dx\,dy,\ D: y=e^x, y=1+x(e-1)$
79	$\iint\limits_D \left(x^3-y^2\right)dx\,dy,\ D: y=2-2x^2,\ y=2-2x$
80	$\iint\limits_D xy\,dx\,dy,\ D: y=3^{-x}, y=x+1,\ x=1$

Завдання 3. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу плоскої області, що обмежена вказаними лініями:

1	$x=y^2,\ x=\sqrt{2-y^2}$	2	$y=3(x-1)^2,\ y=0,\ x=0$
3	$x=4-y^2,\ x-y+2=0$	4	$y=\frac{1}{x},\ x=1,\ x=3$
5	$y=\sqrt[3]{x},\ y=1,\ x=0$	6	$\left(x^2+y^2\right)^3=4a^2xy\left(x^2-y^2\right)$
7	$y=x^2,\ y=-x$	8	$y=2+tg\,x,\ y=0,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{4}$
9	$xy=1,\ x^2=y,\ y=2,\ x=0$	10	$x=\cos y,\ x\le y+1,\ x\ge 0$
11	$2y=\sqrt{x},\ x+y=5,\ x\ge 0$	12	$\rho^2=a^2\cos 3\varphi$
13	$\rho=a\cos^2 2\varphi$	14	$y=x^2+2,\ x\ge 0,\ x=2,\ y=x$
15	$y=x^2+1,\ x+y=3$	16	$y=arctg\,3x,\ y=0,\ x=\frac{1}{3}$
17	$x^2+y^2=5,\ y=5-x^2$	18	$y=\sin x,\ y=\frac{2x}{\pi}$
19	$y=3^x+1,\ x=0, x=2$	20	$y=\ln x+5,\ y=\frac{x}{4},\ x=1,\ x=4$
21	$x=y^2+1,\ x+y=3$	22	$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^4$
23	$\left(x^2+y^2\right)^3=2ay^3$	24	$y=\ln x+1,\ y=0,\ x=1,\ x=e$
25	$y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=2,\ x=0$	26	$x=y^2,\ y^2=4-x$
27	$\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(7x^2+5y^2\right)$	28	$y^2=4-x,\ y=x+2,\ y=2,\ y=-2$
29	$y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$	30	$y=-2x^2+2, y\ge -6$
31	$y=\cos,\ y\le x+1,\ y\ge 0$	32	$y=x^2,\ y=4x^3$
33	$\rho=a(1-\cos\varphi)$	34	$y^2=x+2,\ x=2$
35	$y^2=4x,\ x=\frac{8}{y^2+4}$	36	$\rho=a\cos 5\varphi$
37	$y=\frac{1}{x-1},\ x=2,\ x=3$	38	$\left(x^2-y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+y^2\right)$
39	$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2$	40	$y=e^x+4,\ x+y=6,\ y=0,\ x=0$
41	$\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2$	42	$y^2=4x,\ x^2=4y$
43	$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,\ y\le\frac{1}{2}x,\ y\ge 0$	44	$y=4-x^2,\ y=x^2-2x$

45	$x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1$	46	$y = \cos 5x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = \pi/5$
47	$y = e^{x+3},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$	48	$y = x,\ y = 2 - x^2$
49	$y = 6x^2,\ x + y = 2,\ x \geq 0$	50	$y = 4x^2, 9y = x^2, y \leq 2$
51	$\rho^2 = a^2\left(1 + \sin^2\varphi\right)$	52	$x = -2y^2, x = 1 - 3y^2, x \leq 0, y \geq 0$
53	$y = x^2 + 4x,\ y = (x-2)^2,\ y = 0$	54	$\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2\left(4x^2 + 3y^2\right)$
55	$y = x^2,\ y = \frac{3}{4}x^2 + 1$	56	$y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$
57	$\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2x^2y^2$	58	$\rho = 4(1 + \cos\varphi)$
59	$y = 1 - \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$	60	$\rho = a\sin 3\varphi$
61	$y^2 = 4x,\ x + y = 3,\ y \geq 0$	62	$y = \frac{8}{x^2 + 4},\ x^2 = 4y$
63	$\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^2\left(x^4 + y^4\right)$	64	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(3x^2 + 2y^2\right)$
65	$x^4 - y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^3$	66	$\rho = a\sin^2\varphi$
67	$\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2x^2y^2$	68	$\left(x^2 + y^2\right)^3 = a^4x^2$
69	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(2x^2 + 3y^2\right)$	70	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2xy^2$
71	$y = 2^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$	72	$y = (x-1)^2,\ y = 1$
73	$\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$	74	$\rho = 2a(2 + \cos\varphi)$
75	$\sqrt{4 - y^2},\ y = \sqrt{3x},\ x \geq 0$	76	$x^2 = 3y,\ y^2 = 3x$
77	$\rho = a\sin^2 2\varphi$	78	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(5x^2 + 3y^2\right)$
79	$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4\left(3x^2 + 4y^2\right)$	80	$\rho = a\sin 2\varphi$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ по області V, що обмежена координатними площинами і площинами: $x=a,\ y=b,\ z=c$.

1	$f(x,y,z)=3x-y+zx,\ a=-2,\ b=1,\ c=3$
2	$f(x,y,z)=x-2xz^2+y,\ a=3,\ b=1,\ c=5$
3	$f(x,y,z)=5x-2xy+z,\ a=1,\ b=-4,\ c=2$
4	$f(x,y,z)=3xy^2-z,\ a=-1,\ b=-1,\ c=2$
5	$f(x,y,z)=x+yz^2,\ a=1,\ b=-2,\ c=-1$
6	$f(x,y,z)=z^3+xy,\ a=4,\ b=-1,\ c=3$
7	$f(x,y,z)=x-y-z+1,\ a=1,\ b=-1,\ c=4$
8	$f(x,y,z)=2xz-y^2,\ a=4,\ b=2,\ c=1$
9	$f(x,y,z)=z+xy+1,\ a=-1,\ b=2,\ c=3$
10	$f(x,y,z)=x-2xz+y,\ a=1,\ b=2,\ c=-4$
11	$f(x,y,z)=x-2yz+1,\ a=1,\ b=3,\ c=2$
12	$f(x,y,z)=3x-yz^2,\ a=4,\ b=-1,\ c=1$
13	$f(x,y,z)=x^2y-z+4,\ a=1,\ b=-1,\ c=3$
14	$f(x,y,z)=x-xy+1,\ a=-2,\ b=2,\ c=3$
15	$f(x,y,z)=x+2xy-z,\ a=1,\ b=-1,\ c=1$
16	$f(x,y,z)=x-2y-3z^2,\ a=3,\ b=-1,\ c=1$
17	$f(x,y,z)=xz+y^3,\ a=1,\ b=1,\ c=-1$
18	$f(x,y,z)=x^2-z^2y,\ a=2,\ b=-2,\ c=-4$
19	$f(x,y,z)=x+3y-4z^2,\ a=1,\ b=2,\ c=2$
20	$f(x,y,z)=xyz-x^2,\ a=3,\ b=1,\ c=1$
21	$f(x,y,z)=x+y-3z,\ a=2,\ b=-4,\ c=3$
22	$f(x,y,z)=x-yz^2,\ a=2,\ b=1,\ c=-1$
23	$f(x,y,z)=2x-y+4z,\ a=3,\ b=1,\ c=2$
24	$f(x,y,z)=x-z-xy,\ a=3,\ b=2,\ c=-2$
25	$f(x,y,z)=zy+2x,\ a=1,\ b=3,\ c=2$
26	$f(x,y,z)=x-yz+4,\ a=1,\ b=-5,\ c=-1$
27	$f(x,y,z)=x^2+2zy,\ a=4,\ b=-2,\ c=1$

28	$f(x,y,z)=zx-2y,\ a=-3,\ b=1,\ c=4$
29	$f(x,y,z)=y-xz,\ a=1,\ b=3,\ c=-2$
30	$f(x,y,z)=x+2y-z,\ a=2,\ b=1,\ c=-2$
31	$f(x,y,z)=8xy+z+2,\ a=1,\ b=-3,\ c=1$
32	$f(x,y,z)=2y-x^2z,\ a=-4,\ b=1,\ c=1$
33	$f(x,y,z)=x+y-z^2,\ a=-1,\ b=3,\ c=-2$
34	$f(x,y,z)=x+2y-z,\ a=4,\ b=1,\ c=2$
35	$f(x,y,z)=xy+y-z,\ a=1,\ b=-2,\ c=5$
36	$f(x,y,z)=x+2y-z^2,\ a=1,\ b=2,\ c=2$
37	$f(x,y,z)=x+3yz-2,\ a=-1,\ b=2,\ c=3$
38	$f(x,y,z)=xy^2-z,\ a=1,\ b=-2,\ c=2$
39	$f(x,y,z)=x+yz+z,\ a=3,\ b=1,\ c=-2$
40	$f(x,y,z)=3x-2y+z^2,\ a=1,\ b=-1,\ c=-1$
41	$f(x,y,z)=y^2-xz,\ a=1,\ b=4,\ c=-2$
42	$f(x,y,z)=xz-y^2,\ a=2,\ b=2,\ c=1$
43	$f(x,y,z)=x-3xy+4z,\ a=1,\ b=-1,\ c=-1$
44	$f(x,y,z)=xy-yz,\ a=-4,\ b=1,\ c=2$
45	$f(x,y,z)=2xy-z,\ a=3,\ b=-1,\ c=1$
46	$f(x,y,z)=xz-3y^2,\ a=-2,\ b=-1,\ c=-1$
47	$f(x,y,z)=2x-yz+1,\ a=-1,\ b=1,\ c=2$
48	$f(x,y,z)=x^2+2y-z,\ a=1,\ b=-3,\ c=1$
49	$f(x,y,z)=x-y+z,\ a=-3,\ b=2,\ c=-1$
50	$f(x,y,z)=x-yz+3,\ a=2,\ b=-2,\ c=1$
51	$f(x,y,z)=xy-z^2+3,\ a=3,\ b=2,\ c=1$
52	$f(x,y,z)=x+y-z,\ a=1,\ b=1,\ c=-1$
53	$f(x,y,z)=y^2z-5x+2,\ a=1,\ b=-1,\ c=3$
54	$f(x,y,z)=xz+y^2,\ a=1,\ b=-1,\ c=3$
55	$f(x,y,z)=3x-2y+z,\ a=-4,\ b=-2,\ c=-2$
56	$f(x,y,z)=xyz-x,\ a=-1,\ b=3,\ c=1$
57	$f(x,y,z)=z-xy^2+2,\ a=1,\ b=4,\ c=-2$

58	$f(x,y,z)=x^2+4yz,\ a=2,\ b=-2,\ c=-2$
59	$f(x,y,z)=x-2y^2+z^2,\ a=2,\ b=2,\ c=1$
60	$f(x,y,z)=xyz-4,\ a=-1,\ b=-1,\ c=-1$
61	$f(x,y,z)=xy+z,\ a=2,\ b=-1,\ c=1$
62	$f(x,y,z)=3x-y+z,\ a=3,\ b=2,\ c=-1$
63	$f(x,y,z)=8x+y-z^3,\ a=-3,\ b=2,\ c=1$
64	$f(x,y,z)=z+x+3y-4,\ a=2,\ b=3,\ c=1$
65	$f(x,y,z)=x+yz^2,\ a=4,\ b=1,\ c=2$
66	$f(x,y,z)=x-y^2+z,\ a=1,\ b=-1,\ c=1$
67	$f(x,y,z)=xz-y^2+5z,\ a=1,\ b=-2,\ c=1$
68	$f(x,y,z)=x-y^2+z+1,\ a=2,\ b=3,\ c=1$
69	$f(x,y,z)=3x-3xz^2+y,\ a=-2,\ b=4,\ c=3$
70	$f(x,y,z)=x-2y+xz,\ a=-1,\ b=5,\ c=1$
71	$f(x,y,z)=2y+xz^2,\ a=5,\ b=-2,\ c=2$
72	$f(x,y,z)=5x-y^2+4z,\ a=-4,\ b=2,\ c=1$
73	$f(x,y,z)=x+2y-z,\ a=1,\ b=2,\ c=3$
74	$f(x,y,z)=x+y^2-z,\ a=2,\ b=-1,\ c=3$
75	$f(x,y,z)=2x-3xy+z,\ a=2,\ b=-1,\ c=-1$
76	$f(x,y,z)=2xz-3,\ a=4,\ b=-1,\ c=-2$
77	$f(x,y,z)=x^2-y+z,\ a=3,\ b=4,\ c=1$
78	$f(x,y,z)=xy-z^2,\ a=1,\ b=1,\ c=2$
79	$f(x,y,z)=y+zy^2+1,\ a=1,\ b=1,\ c=-1$
80	$f(x,y,z)=x+y-z^2,\ a=1,\ b=2,\ c=1$

Завдання 5. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, що обмежене вказаними поверхнями:

1	$z=x^2+y^2, z=(x+y)^2, x=0, y=0, z=0, z=1$
2	$z\geq 0, z=x, x=\sqrt{4-y^2}$
3	$x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4, z^2=x^2+y^2\left(z^2\leq x^2+y^2\right)$
4	$y\geq 0, z\geq 0, x+y=2, z=x^2$
5	$y\geq 0, z\geq 0, y=4, z=x, x=\sqrt{25-y^2}$
6	$y=\sqrt{x}, y=x^3, z=y^2, z=0$
7	$z=x^2+y^2, z=0, x^2+y^2=1$
8	$z\geq 0, x^2+y^2=9, z=y^2$
9	$y=\sqrt{x}, x+y=2, x=0, z=0, z=1-y^2$
10	$y+x=1, y=1+x, z=1-x^2, y=0$
11	$y=x^2, y=1-x^2, z=y^2, z=0$
12	$z=1-x^2-y^2, z=0$
13	$z=\sqrt{y}, x=0, x=1, y=1, z=0$
14	$y=x^2, y=x^4, z=y, z=0$
15	$y=(1-x)^2, x=0, y=0, z=0, z=x+y$
16	$x\geq 0, z\geq 0, y\geq x, z=1-x^2-y^2$
17	$z\geq 0, y=2, y=x, z=x^2$
18	$z\geq 0, y+z=2, x^2+y^2=4$
19	$y\geq 0, z\geq 0, x-y=0, 2x+y=2, 4z=y^2$
20	$x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, 2x+y=2, z=y^2$
21	$y=1-x^2, z=1-y, y=0, z=0$
22	$(x-1)^2+y^2=1, z=x, z=0$
23	$z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z\geq 0$
24	$x+y=1, z=(x+y)^2, x=0, y=0, z=0$
25	$y=1-x, z=\sqrt{y}, x=0, y=0, z=0$
26	$y=arctg\,x, x=1, z=y, z=0(0\leq x\leq 1)$
27	$z=x^2, z=1, z=y, y=0$
28	$y=\sqrt{x}, y=x, z=(x+y)^2, z=0$

29	$z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$
30	$y=x,\ x=1,\ y=0,\ z=\sqrt{y}$
31	$y=(1-x)^2, x+y=1,\ z=0,\ z=x+y$
32	$y\ge 0,\ z\ge 0,\ x=4,\ y=2x,\ z=x^2$
33	$z=4-y^2,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0$
34	$y^2=x^2,\ x=1,\ z=y$
35	$x+y=1,\ z=(x+y)^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
36	$x^2+y^2=4,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0$
37	$z\ge 0,\ x=y^2,\ x=2y^2+1,\ z=1-y^2$
38	$z^2=4-x,\ x^2+y^2=4x$
39	$z=4-y^2,\ x^2+y^2=4,\ z\ge 0$
40	$z\ge 0,\ z=4-x,\ x=2\sqrt{y},\ y=2\sqrt{x}$
41	$z=1-x^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ y=1$
42	$x^2+y^2=1,\ z=x^2,\ z=0$
43	$y=\sin x,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{2},\ z=y^2,\ z=0$
44	$y=x^2-x,\ z=0,\ z=y^2,\ y=0$
45	$x^2+y^2+z^2=1,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$
46	$z\ge 0,\ y^2=2-x,\ z=3x$
47	$x+y=1,\ z=(x+y-1)^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$
48	$z\ge 0,\ y=\sqrt{9-x^2},\ z=2y$
49	$y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=1,\ z=x+y$
50	$y=\sqrt{x},\ y=x^2,\ z=x+y,\ z=0$
51	$z=x^2+y^2,\ z=1$
52	$y=1-x^2,\ z=0,\ z=y^2$
53	$x\ge 0,\ z\ge 0,\ y=2x,\ y=3,\ z=\sqrt{y}$
54	$z=2-x-y,\ x^2+y^2=1,\ z\ge 0$
55	$y=\cos x,\ y=0,\ x=0,\ z=y,\ z=0,\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$
56	$y=x^2,\ y=x,\ z=y$

57	$y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{-x},\ y=1,\ z=y^2,\ z=0$
58	$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1,\ z=0,\ z=x+y,\ x=0,\ y=0$
59	$x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y=2,\ z=x^2+y^2$
60	$y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{1-(x-1)^2},\ z=y,\ y=0,\ z=0$
61	$y=x^2,\ x=1,\ z=y^2$
62	$z=x^2+y^2,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$
63	$y\geq 0,\ z=x^2,\ 2x-y=0,\ z\geq 0,\ x+y=9$
64	$z=y^2,\ x\geq 0,\ x+y=2,\ z\geq 0$
65	$y\geq 0,\ z\geq 0,\ z=x,\ x=\sqrt{9-y^2}$
66	$y=x^2, y=\dfrac{x^2}{4}, y=1,\ z=0, z=y^2$
67	$x\geq 0,\ z\geq 0,\ z=y,\ x=4,\ y=\sqrt{25-x^2}$
68	$z=\sqrt{x},\ y=x,\ x=1,\ y=0,\ z=0$
69	$z=4-x-y,\ x^2+y^2=4,\ z\geq 0$
70	$z=x^2,\ x-2y+2=0,\ z\geq 0,\ x+y=7$
71	$y\geq 0,\ z\geq 0,\ x=3,\ y=2x,\ z=y^2$
72	$z\geq 0,\ x^2+y^2=9,\ z=5-x-y$
73	$x^2+y^2=1,\ x+y=1,\ z=0,\ z=x+y-1\ (z>0)$
74	$x^2+(y-1)^2=1,\ z=y^2,\ z=0$
75	$y=x^2, y=x^3, z=x,\ z=0$
76	$y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=1-x^2$
77	$y=x^2,\ x+y=2,\ z=x+y,\ z=0$
78	$y^2=x,\ x=1,\ z=x^2,\ z=0$
79	$(x-1)^2+y^2=1,\ z=x^2,\ z=0$
80	$y=2x^2,\ y=1+x,\ z=y^2,\ z=0$

Завдання 6. Обчислити криволінійні інтеграли:

1	$\oint\limits_L (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, де L – еліпс $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатньому напрямі обходу.
2	$\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, де L – перша арка циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.
3	$\oint\limits_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ при додатньому напрямі обходу.
4	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(1,2)$.
5	$\int\limits_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)^2} dl$, де L_{AB} – дуга кривої $\rho = 9\sin 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
6	$\int\limits_{L_{AB}} 2xy\,dx + y^2dy + z^2dz$, де L_{AB} – дуга одного витка гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ від точки $A(1,0,0)$ до точки $B(1,0,4\pi)$.
7	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.
8	$\int\limits_{L_{OABC}} xydl$, де L_{OABC} – контур прямокутника із вершинами $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(0,2)$.
9	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(1,2)$, $B(3,6)$.
10	$\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy$, де L_{AB} – дуга кубічної параболи $y = x^3$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
11	$\int\limits_{L_{AB}} ydx + \frac{1}{\ln^2 x}dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.
12	$\int\limits_{L_{AB}} 2xydx - x^2dy + z\,dz$, де L_{AB} – пряма AB; $A(0,0,0)$, $B(2,1,-1)$.

13	$\int\limits_{L_{AB}} xydx + (y-x)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
14	$\int\limits_{L_{AB}} (x+y)dx + (y-x)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = x^3$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,8)$.
15	$\int\limits_{L_{AB}} 2xe^y dx + e^x dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
16	$\int\limits_{L_{ABO}} (x+y)dl$, де L_{ABO} – контур трикутника із вершинами $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.
17	$\int\limits_{L} \frac{z^2 dl}{x^2+y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 2t$.
18	$\int\limits_{L_{OAB}} (x+y)dl$, де L_{OAB} – контур трикутника із вершинами $O(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(0,1)$.
19	$\int\limits_{L} (x+y)dl$, де L – дуга лемініскати Бернулі $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.
20	$\oint\limits_{L} (x^2+y^2)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2y$.
21	$\int\limits_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до точки $B(1,1)$.
22	$\int\limits_{L_{AB}} xdy - ydx$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.
23	$\oint\limits_{L} (x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2x$.
24	$\oint\limits_{L} (x^2+y^2)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$.

25	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(xy+x^2\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=3x-2$ від точки $A(0,-2)$ до точки $B(1,1)$.
26	$\int\limits_{L_{AB}} \cos y\,dx-\sin x\,dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(2\pi,-2\pi)$, $B(-2\pi,2\pi)$.
27	$\int\limits_{L_{AB}} xydx+(y-x)dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2=x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
28	$\int\limits_{L_{OBA}} 2xydx+x^2dy$, де L_{OBA} – ламана OBA; $O(0,0)$, $B(2,0)$, $A(2,1)$.
29	$\int\limits_{L_{AB}} \left(2xy-x^2\right)dx+\left(4y^2-xy\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=\dfrac{x^2}{2}$ від точки $A(0,0)$ до точки $B\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.
30	$\int\limits_{L_{AB}} y^2dx+\left(2xy-y^2e^{-x}\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=e^x$ від точки $A(0,1)$ до точки $B(1,e)$.
31	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-y\right)dx+(x+y)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=2x-1$ від точки $A(0,-1)$ до точки $B(1,1)$.
32	$\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(-1,0)$ і $B(0,1)$.
33	$\int\limits_{L_{AB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2z\,dz$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(0,0,0)$, $B(-2,4,5)$.
34	$\int\limits_{L_{AB}} \left(xy^2-2y\right)dx+\left(x^2y-3x\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=2-x$ від точки $A(0,2)$ до точки $B(1,1)$.
35	$\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{y^2+1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=2x$ від точки $A(1,2)$ до точки $B(2,4)$.

36	$\oint\limits_L y\,dx - x\,dy$, де L – еліпс $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ при додатньому напрямі обходу.
37	$\int\limits_{L_{OABC}} xy\,dl$, де L_{OABC} – контур прямокутника із вершинами $O(0,0)$, $A(5,0)$, $B(5,3)$, $C(0,3)$.
38	$\oint\limits_L (x^2 + y^2)\,dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4x$.
39	$\int\limits_{L_{AB}} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)dl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$.
40	$\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(0,0)$ і $B(2,2)$.
41	$\int\limits_{L_{AB}} x\,dx + y\,dy - (x - y + 1)\,dz$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(1,1,1)$, $B(2,3,4)$.
42	$\int\limits_{L_{AB}} xy\,dx + ye^{-x}dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = e^x$ від точки $A(0,1)$ до точки $B(1,e)$.
43	$\int\limits_{L_{AB}} (xy - 1)\,dx + x^2 y\,dy$, де L_{AB} – дуга еліпса $x = \cos t,\ y = 2\sin t$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.
44	$\int\limits_{L_{AB}} (x^2 + y)\,dx + (y - x^2)\,dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = 3x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,3)$.
45	$\int\limits_{L_{AB}} y^2 dx - \dfrac{\cos x}{2}\,dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = \cos x$ від точки $A(0,1)$ до точки $B\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$.
46	$\int\limits_{L_{AB}} y\,dl$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,1)$.

47	$\int\limits_L \sqrt{2-z^2}\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L – дуга кривої $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\le t\le 2\pi$.
48	$\int\limits_{L_{AB}} y\,dl$, де L_{AB} – дуга $y^2=\frac{2}{3}x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B\left(\frac{\sqrt{35}}{6},\frac{\sqrt{35}}{3}\right)$.
49	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2y-3x\right)dx+\left(y^2x+2y\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=3x+1$ від точки $A(0,1)$ до точки $B(1,4)$.
50	$\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-x^2\right)dx+x\,dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=2x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.
51	$\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-y^2\right)dx+x\,dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y=x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
52	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx+\frac{x\ln x}{y}dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=\ln x$ від точки $A(e,1)$ до точки $B\left(e^2,2\right)$.
53	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5}(x-y)}$, де L_{AB} – дуга кривої $y=x^2$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(2,4)$.
54	$\int\limits_L xy\,dl$, де L – контур квадрата зі сторонами $x=\pm1$, $y=\pm1$.
55	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2-y^2\right)dx+xy\,dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(1,1)$, $B(3,4)$.
56	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2}{y^2}dx-\frac{y^2}{x^2}dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y=\sqrt{x}$ від точки $A(1,1)$ до точки $B(4,2)$.
57	$\int\limits_{L_{AB}} (xy-1)dx+x^2y\,dy$, де L_{AB} – відрізок прямої AB; $A(1,0)$, $B(0,2)$.

58	$\int\limits_{L_{AB}} 2xydx - x^2 dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{4}$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(2.1)$.
59	$\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl$, де L – дуга кривої $x = \cos t$, $y = \sin t, z = \sqrt{3}t$, $0 \le t \le 2\pi$.
60	$\int\limits_{L_{ACB}} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ACB} – ламана ACB; $A(2,0)$, $C(5,0)$, $B(5,3)$.
61	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - 2xy\right)dx + \left(y^2 - 2xy\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = x^2$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.
62	$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2 - y\right)dx + \left(y - x\right)dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = x^2 + x$ від точки $A(1,2)$ до точки $B(2,6)$.
63	$\int\limits_{L_{AB}} \dfrac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(1,1,1)$ і $B(2,2,2)$.
64	$\int\limits_{L} y^2 dl$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$.
65	$\int\limits_{L_{ABCD}} xydl$, де L_{ABCD} – контур прямокутника із вершинами $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(4,3)$, $D(2,3)$.
66	$\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, де L_{ABC} – ламана ABC; $A(1,2)$, $B(3,2)$, $C(3,5)$.
67	$\int\limits_{L} \left(x^2 + y^2\right)^2 dl$, де L – перша чверть кола $\rho = 2$.
68	$\int\limits_{L_{AB}} \left(xy - 1\right)dx + x^2 ydy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(0,2)$.
69	$\int\limits_{L} ydl$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 2x$, що відсікається параболою $x^2 = 2y$.

70	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$, де L_{AB} – відрізок прямої, що з'єднує точки $A(4,0)$ і $B(6,1)$.
71	$\int\limits_{L} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = 2(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
72	$\int\limits_{L} arctg \frac{y}{x} dl$, де L – дуга кардіоїди $\rho = (1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.
73	$\oint\limits_{L} x\,dy - y\,dx$ де L – контур трикутника із вершинами $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$ при додатньому напрямі обхода.
74	$\int\limits_{L_{AB}} (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy$, де L_{AB} – ламана лінія $y = \|x\|$ від точки $A(-1,1)$ до точки $B(2,2)$.
75	$\int\limits_{L_{AB}} y^2 dx + \sin x dy$, де L_{AB} – дуга кривої $y = \sin x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.
76	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{x^2dx - y^2dy}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} – дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ від точки $A(2,0)$ до точки $B(0,2)$.
77	$\int\limits_{L_{AB}} xy\,dx + (y-x)dy$, де L_{AB} – дуга кубічної параболи $y =$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.
78	$\int\limits_{L_{AB}} y\,dx + x\,dy$, де L_{AB} – дуга кола $x = R\cos t, y = R\sin t$ від точки $A(R,0)$ до точки $B(0,R)$.
79	$\int\limits_{L_{AB}} (xy-x)dx + \frac{1}{2}x^2\,dy$, де L_{AB} – дуга параболи $y^2 = 4x$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,2)$.
80	$\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx + xdy$, де L_{AB} – дуга лінії $y = \ln x$ від точки $A(1,0)$ до точки $B(e,1)$.

Завдання 7. Дано векторне поле $\vec{F}$ та площина Ω, яка разом із координатними площинами утворює піраміду V. σ - основа піраміди, що належить площині Ω; λ - контур, що обмежує σ; $\vec{n}$ - нормаль к σ, направлена назовні піраміди V. Необхідно обчислити:

а) потік векторного поля $\vec{F}$ через поверхню σ у напрямку нормалі $\vec{n}$;

б) циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ по замкненому контуру λ безпосередньо і застосувавши теорему Стокса;

в) потік векторного поля $\vec{F}$ через повну поверхню піраміди V у напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо та застосувавши теорему Остроградського-Гауса:

1	$\vec{F}=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $\Omega: x-2y+2z=2$.
2	$\vec{F}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$ $x+3y+z=3$
3	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$, $\Omega: 3x-2y+2z=6$.
4	$\vec{F}=3(x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$ $2x-y-2z=2$
5	$\vec{F}=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ $3x+3y+z=3$
6	$\vec{F}=(x+7z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+z-4=0$.
7	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: x+y+2z=2$.
8	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$ $x+y+z=2$
9	$\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+z=2$.
10	$\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+3y+z=6$.
11	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: x+2y+2z=2$.
12	$\vec{F}=(3x+4y+2z)\vec{j}$, $\Omega: x+y+2z-4=0$.
13	$\vec{F}=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, $\Omega: 3x+3y+z=3$.
14	$\vec{F}=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, $\Omega: x+2y+2z=4$.
15	$\vec{F}=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $\Omega: x-2y+2z=2$.
16	$\vec{F}=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$ $2x+y+2z=2$
17	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$ $x+2y+z=2$
18	$\vec{F}=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$ $2x-3y+z=6$

19	$\vec{F}=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$ $x-y+z=2$
20	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$ $2x-y-2z=-2$
21	$\vec{F}=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $\Omega: x+y+2z=2$.
22	$\vec{F}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, $\Omega: x+3y+z=3$.
23	$\vec{F}=(2y-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$ $x+2y+2z=4$
24	$\vec{F}=x\vec{i}+(y-2x)\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $\Omega: x+y+z=2$.
25	$\vec{F}=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: x+3y+2z=6$.
26	$\vec{F}=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, $\Omega: x+2y+2z=2$.
27	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, $\Omega: x+2y+z=2$.
28	$\vec{F}=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+z=4$.
29	$\vec{F}=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: x+2y+z=2$.
30	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+2y+z=2$.
31	$\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+3y+z=6$.
32	$\vec{F}=x\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+4z=4$.
33	$\vec{F}=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, $\Omega: x-y+z=2$.
34	$\vec{F}=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $\Omega: 3x+2y+2z=6$.
35	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $\Omega: 3x+2y+z=6$.
36	$\vec{F}=(2x+3y-3z)\vec{j}$, $\Omega: 2x-3y+2z-6=0$.
37	$\vec{F}=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$ $x+2y+z=2$
38	$\vec{F}=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$ $2x+y+2z=2$
39	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$ $3x+2y+z=6$
40	$\vec{F}=2z\vec{i}+(y-3x)\vec{j}+x\vec{k}$, $\Omega: 2x+3y+2z=6$.
41	$\vec{F}=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+2z=2$.
42	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$, $\Omega: 3x-2y+2z=6$.

43	$\vec{F}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $\Omega: x+4y+2z=8$.
44	$\vec{F}=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+2z=2$.
45	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, $\Omega: 2x+2y+z=4$.
46	$\vec{F}=(x+3y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$, $\Omega: 3x+2y+2z=6$.
47	$\vec{F}=(y-2z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+2z=2$.
48	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+3y+6z=6$.
49	$\vec{F}=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, $\Omega: x+2y+2z=2$.
50	$\vec{F}=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, $\Omega: x+y+2z=2$.
51	$\vec{F}=(3x-1)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, $\Omega: 2x-y-2z=-2$.
52	$\vec{F}=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+z=4$.
53	$\vec{F}=(2z+x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $\Omega: 4x+2y+z=8$.
54	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$ $2x+2y+z=2$
55	$\vec{F}=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, $\Omega: 3x+2y+2z=6$.
56	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+3z=6$.
57	$\vec{F}=(y-x+z)\vec{j}$, $\Omega: 2x-y+2z-2=0$.
58	$\vec{F}=(2x+4y+3z)\vec{k}$, $\Omega: 3x+2y+3z=6$.
59	$\vec{F}=2y\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $\Omega: x+y+2z=2$.
60	$\vec{F}=(x-3y+6z)\vec{i}$, $\Omega: -x+y+2z-4=0$.
61	$\vec{F}=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, $\Omega: 2x+y+z=2$.
62	$\vec{F}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z\vec{k}$, $\Omega: x+4y+2z=8$.
63	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$ $x+y+2z=2$
64	$\vec{F}=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$ $x+3y+2z=6$
65	$\vec{F}=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$ $x+2y+z=2$
66	$\vec{F}=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, $\Omega: 2x-y-2z=-2$.

67	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$ $2x+2y+z=4$
68	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, $\Omega: x+y+z=2$.
69	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$ $2x+y+3z=6$
70	$\vec{F}=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$ $x+2y+z=2$
71	$\vec{F}=4z\vec{i}+2y\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, $\Omega: x+2y+z=2$.
72	$\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+x\vec{k}$, $\Omega: x+y+z=4$.
73	$\vec{F}=(5x+2y+3z)\vec{k}$, $\Omega: x+y+3z-3=0$.
74	$\vec{F}=(x-y+z)\vec{i}$, $\Omega: -x+2y+z=4$.
75	$\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $\Omega: x-y+z=2$.
76	$\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, $\Omega: x-y+z=2$.
77	$\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, $\Omega: x+2y+2z=2$.
78	$\vec{F}=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, $\Omega: 2x-3y+z=6$.
79	$\vec{F}=(x+z)\vec{i}$, $\Omega: x+y+z-2=0$.
80	$\vec{F}=(x+2y-z)\vec{i}$, $\Omega: -x+2y+2z=4$.

Приклад розв'язання типового розрахунку

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x;y)dy$

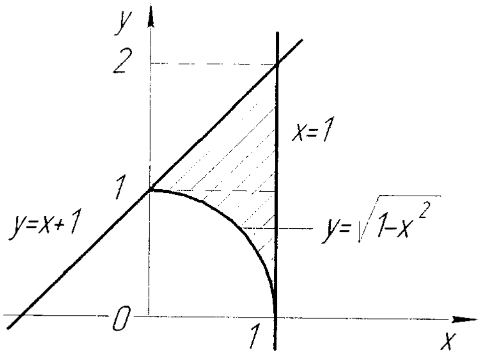


Рисунок 1

$$y=\sqrt{1-x^2};$$
$$y^2=1-x^2;$$
$$x^2=1-y^2;$$
$$x=\pm\sqrt{1-y^2};$$
$$x=\sqrt{1-y^2}.$$
$$y=x+1;$$
$$x=y+1.$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x+1} f(x;y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x;y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^{1} f(x;y)dx$$

Завдання 2. Обчислити подвійний інтеграл по області D, що обмежена вказаними лініями:

$$I=\iint\limits_{D}(3x-7y)\,dxdy,\ D: \mathrm{x}+5=\mathrm{y}^2,\ y=\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)$$

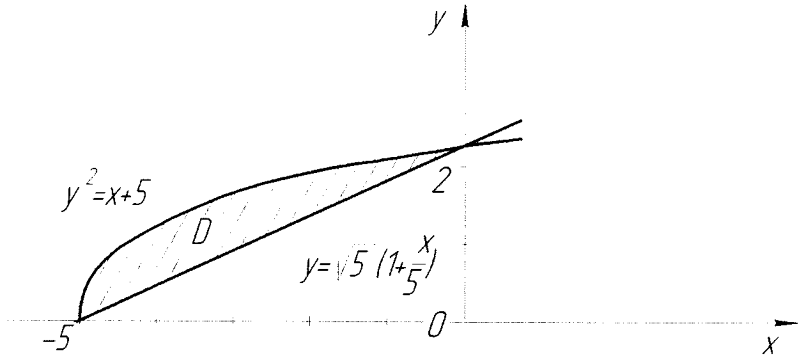


Рисунок 2

Запишемо відповідний подвійний інтеграл

$$I=\int\limits_{-5}^{0}dx\int\limits_{\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)}^{\sqrt{x+5}}(3\mathrm{x}-7\mathrm{y})\,dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_{\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)}^{\sqrt{x+5}}(3\mathrm{x}-7\mathrm{y})\,dy=\left(3xy-\frac{7y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)}^{\sqrt{x+5}}=$$

$$=3x\sqrt{x+5}-\frac{7(x+5)}{2}-3x\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)+\frac{7\cdot 5\left(1+\frac{x}{5}\right)^2}{2}=$$

$$=3x\sqrt{x+5}-\frac{7x}{2}-\frac{35}{2}-3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{5}}{5}x^2+\frac{35}{2}+\frac{35x}{5}+\frac{35x^2}{50}.$$

Знайдемо зовнішній інтеграл

$$I=\int\limits_{-5}^{0}\left(3x\sqrt{x+5}-\frac{7x}{2}-\frac{35}{2}-3\sqrt{5x}-\frac{3\sqrt{5}}{5}x^2+\frac{35}{2}+\frac{35x}{2}+\frac{35x^2}{50}\right)dx$$

Обчислимо значення визначеного інтегралу першого підінтегрального виразу

$$\int_{-5}^{0} 3x\sqrt{x+5}dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = x+5 \\ 2tdt = dx \\ x = t^2-5 \\ x=-5 \to t=0 \\ x=0 \to t=\sqrt{5} \end{array} \right| = \int_{0}^{\sqrt{5}} 3\left(t^2-5\right)\cdot t\cdot 2tdt = \int_{0}^{\sqrt{5}} \left(3t^2-15\right)\cdot 2t^2dt =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{5}} \left(6t^4-30t^2\right)\mathrm{dt} = \left(6\frac{t^5}{5}-30\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{5}} = \frac{6\left(\sqrt{5}\right)^5}{5} - 10\left(\sqrt{5}\right)^3 = -4\sqrt{125} = -44,72.$$

Тоді загальний інтеграл:

$$I = \int_{-5}^{0}\left(3x\sqrt{x+5} - \frac{7x}{2} - \frac{35}{2} - 3\sqrt{5x} - \frac{3\sqrt{5}}{5}x^2 + \frac{35}{2} + \frac{35x}{2} + \frac{35x^2}{50}\right)dx =$$

$$= -44,72 + \left(\left(-\frac{7x^2}{4} + \frac{35}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{5}x^2}{2} - \frac{3\sqrt{5}x^3}{15} + \frac{35x^3}{50\cdot 3}\right)\Bigg|_{-5}^{0}\right) =$$

$$= -44,72 + \left(\frac{7\cdot 5^2}{4} - \frac{35\cdot 5^2}{4} + \frac{3\sqrt{5}\cdot 5^2}{4} - \frac{3\sqrt{5}\cdot 5^3}{15} + \frac{35\cdot 5^3}{50\cdot 3}\right) =$$

$$-44,72 + 43,75 - 218,75 + 83,85 - 55,9 + 29,17 = -162,6.$$

Отже, $I = \int_{-5}^{0} dx \int_{\sqrt{5}\left(1+\frac{x}{5}\right)}^{\sqrt{x+5}} (3\mathrm{x} - 7\mathrm{y})dy = -162,6.$

Завдання 3. Обчислити за допомогою подвійного інтеграла площу плоскої області, що обмежена вказаними лініями (рис. 3):

$$\rho = 2a(2+\cos(\varphi)),\ \alpha > 0$$

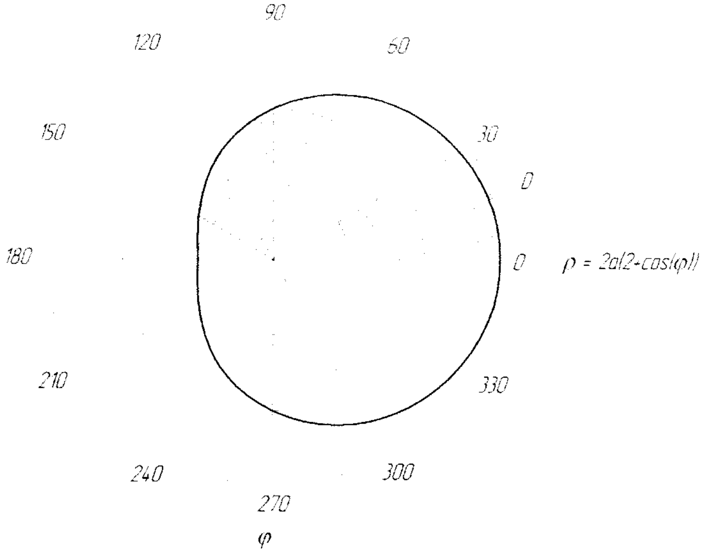


Рисунок 3

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho du = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2a(2+\cos\varphi)} \rho d\rho$$

Обчислимо внутрішній інтеграл

$$\int\limits_0^{2a(2+\cos(\varphi))} \rho d\rho = \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{2a(2+\cos(\varphi))} = \frac{4a^2\left(2+\cos(\varphi)\right)^2}{2} = 2a^2\left(4+4\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)\right) =$$

$$= 8+8\cos(\varphi)+1+\cos(2\varphi) = a^2\left(9+8\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)\right).$$

Обчислимо зовнішній інтеграл:

$$a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(9+8\cos(\varphi)+\cos(2\varphi)\right)d\varphi = a^2\left(9\varphi+8\sin(\varphi)+\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2\left(18\pi+8\sin(2\pi)+\frac{1}{2}\sin(4\pi)-8\sin(0)-\frac{1}{2}\sin(0)\right) = 18\pi a^2.$$

Отже, отримаємо

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho du = 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2a(2+\cos(\varphi))} \rho d\rho = 2\cdot 18\pi a^2 = 36\pi a^2.$$

Завдання 4. Обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ по області V, що обмежена координатними площинами та площинами: $x=a,\ y=b,\ z=c$.

$$f(x;y;z)=x+y^2-z;\ a=2;\ b=-1;\ z=c.$$

$$I=\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_V (x+y^2-z)dxdydz.$$

$$V: x=0;\ y=0;\ z=0;\ x=2;\ y=-1;\ z=3.$$

$$I=\int_0^2 dx\int_{-1}^0 dy\int_0^3 (x+y^2-z)dz.$$

Обчислимо кожен із інтегралів, починаючи із внутрішнього

$$\int_0^3\left(x+y^2-z\right)dz=\left(xz+y^2z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^3=3x+3y^2-\frac{9}{2}.$$

$$\int_{-1}^0\left(3x+3y^2-\frac{9}{2}\right)dy=\left(3xy+\frac{3y^3}{3}-\frac{9}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^0=3x+1-\frac{9}{2}=3x-\frac{7}{2}.$$

$$\int_0^2\left(3x-\frac{7}{2}\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{7x}{2}\right)\Bigg|_0^2=6-7=-1.$$

Отже, отримаємо

$$I=\int_0^2 dx\int_{-1}^0 dy\int_0^3\left(x+y^2-z\right)dz=-1.$$

Завдання 5. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, що обмежене вказаними поверхнями (рис. 4):

$$z \geq 0,\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 5 - x - y$$

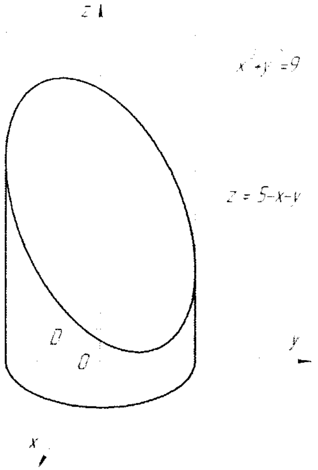


Рисунок 4

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \left(\begin{array}{ll} x = \rho cos(\varphi) & dxdydz = \rho d\rho dydz \\ y = \rho \sin(\varphi) & z = 5 - x - y \rightarrow z = 5 - \rho\cos(\varphi) - \rho\sin(\varphi) \\ z = z & x^2 + y^2 = 9 \rightarrow \rho = 3 \end{array} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{3} d\rho \int\limits_0^{5-\rho\cos(\varphi)-\rho\sin(\varphi)} \rho dz.$$

Обчислимо кожен із інтегралів, починаючи із внутрішнього

$$\int\limits_0^{5-\rho\cos(\varphi)-\rho\sin(\varphi)} \rho dz = \rho z \Big|_0^{5-\rho\cos(\varphi)-\rho\sin(\varphi)} = 5\rho - \rho^2\cos(\varphi) - \rho^2\sin(\varphi).$$

$$\int\limits_0^3 \left(5\rho - \rho^2\cos(\varphi) - \rho^2\sin(\varphi)\right)d\rho = \left(\frac{5\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\cos(\varphi) - \frac{\rho^3\sin(\varphi)}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{45}{2} - 9\cos(\varphi) - 9\sin(\varphi).$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{45}{2} - 9\cos(\varphi) - 9\sin(\varphi)\right)d\varphi = \left(\frac{45}{2}\varphi - 9\sin(\varphi) + 9\cos(\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 45\pi.$$

Отже, отримаємо $V = \iiint\limits_V dxdydz = 45\pi$.

Завдання 6. Обчислити криволінійний інтеграл:

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy,$$

де L_{AB} – ламана лінія $y=|x|$ від точки A(-1; 1) до точки B(2; 2)

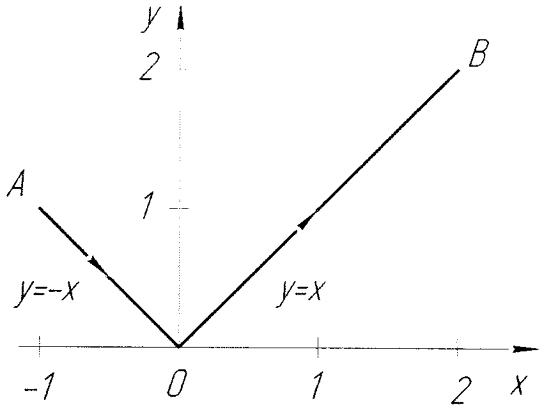


Рисунок 5

$$\int\limits_{L_{AB}} = \int\limits_{L_{AO}} + \int\limits_{L_{OB}}$$

Знайдемо інтеграли по вказаних лініях

$$AO:\ x_A=-1; x_o=0$$

$$\int\limits_{L_{AO}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy=\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+\left(|x|\right)^2+x^2-\left(|x|\right)^2\right)\left(|x|\right)'dx=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0}2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\bigg|_{-1}^{0}=\frac{2}{3}.$$

$$OB:x_O=0; x_B=2$$

$$\int\limits_{L_{OB}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy=\int\limits_{0}^{2}2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\bigg|_{0}^{2}=\frac{16}{3}.$$

$$\int\limits_{L_{AB}} = \int\limits_{L_{AO}} + \int\limits_{L_{OB}} = \frac{2}{3}+\frac{16}{3}=\frac{18}{3}=6.$$

Завдання 7. Дано векторне поле $\vec{F}$ та площина Ω, яка разом із координатними площинами утворює піраміду V. σ - основа піраміди, що належить площині Ω; λ - контур, що обмежує σ; $\vec{n}$ - нормаль к σ, направлена назовні піраміди V (рис. 6). Необхідно обчислити:

а) потік векторного поля $\vec{F}$ через поверхню σ у напрямку нормалі $\vec{n}$;

б) циркуляцію векторного поля $\vec{F}$ по замкненому контуру λ безпосередньо і застосувавши теорему Стокса;

в) потік векторного поля $\vec{F}$ через повну поверхню піраміди V у напрямку зовнішньої нормалі до її поверхні безпосередньо та застосувавши теорему Остроградського-Гауса:

$$\vec{F} = (x - y + z)\bar{i};$$
$$\Omega : -x + 2y + z = 4;$$
$$x = 0 \to z = 4 - 2y;$$
$$y = 0 \to z = 4 + x;$$
$$z = 0 \to x = 2y - 4.$$

а) потік через поверхню ABC обчислимо за формулою

$$\Pi_{ABC} = \iint\limits_{S_{ABC}} \overline{F}\overline{n}\, ds \text{, де } \bar{n} = \pm\overline{grad}\big(z - \varphi(x;y)\big).$$

$$z = 4 + x - 2y = \varphi(x;y)$$

$$\bar{n} = \pm\overline{grad}(z - 4 - x + 2y) = (-1;2;1)$$

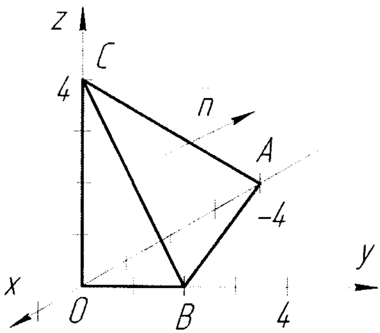


Рисунок 6

$$\Pi_{ABC} = \int\limits_{D_{xy}} (-x + y - z)\,dxdy = \int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+4}{2}} (-x + y - 4 - x + 2y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{0}^{\frac{x+4}{2}} (-2x + 3y - 4)\,dy.$$

$$\int\limits_{0}^{\frac{x+4}{2}} (-2x+3y-4)dy = (-2xy + 3\frac{y^2}{2} - 4y)\Big|_0^{\frac{x+4}{2}} = -2x\frac{x+4}{2} + 3\frac{(x+4)^2}{8} - 4\frac{x+4}{2} =$$

$$= -(x^2+4x) + \frac{3}{8}(x^2+8x+16) - (2x+8) = -x^2 - 4x + \frac{3}{8}x^2 + 3x + 6 - 2x - 8 =$$

$$= \frac{-5}{8}x^2 - 3x - 2$$

$$\int\limits_{-4}^{0}\left(-\frac{5}{8}x^2 - 3x - 2\right)dx = \left(-\frac{5}{8}\cdot\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-4}^{0} = -\frac{5\cdot 4^3}{8\cdot 3} + \frac{3\cdot 4^2}{2} - 2\cdot 4 =$$

$$= -\frac{320}{24} + 24 - 8 = -13\frac{1}{3} + 16 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

б) Знайдемо циркуляцію

$$C = \oint\limits_{L_{ABCA}} \overline{F}\overline{dl} = \int\limits_{L_{AB}} + \int\limits_{L_{BC}} + \int\limits_{L_{CA}} \;;$$

$$AB: Z = 0 \to y = \frac{x+4}{2};$$

$$dy = \frac{1}{2}dx;$$

$$dl = dx\bar{i} + dy\bar{i};$$

$$\overline{F} = (x-y)i;$$

$$\overline{F}\overline{dl} = (x-y)dx$$

$$\int\limits_{L_{AB}} (\mathrm{x}-\mathrm{y})\mathrm{dx} = \int\limits_{-4}^{0}(x - \frac{x+4}{2})dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} - 2x)\Big|_{-4}^{0} = \frac{-16}{2} + 4 - 8 = -12$$

$$BC: x=0 \to z=4-2y$$
$$dz=-2dy$$
$$\overline{dl}=dy\,\overline{j}+dz\,\overline{k}$$
$$\overline{F}=0$$
$$\int\limits_{L_{BC}}=0.$$
$$CA: y=0 \to z=4+x$$
$$dz=dx$$
$$\overline{dl}=dx\,\overline{i}+dz\,\overline{k}$$
$$\overline{F}=(x+z)i$$
$$\overline{F}\,\overline{dl}=(x+z)dx$$
$$\int\limits_{L_{CA}}(x+4+x)dx=\int\limits_{0}^{-4}(2x+4)dx=(2\frac{x^2}{2}+4x)\Big|_0^{-4}=16-16=0.$$
$$C=-12+0+0.$$

$$\mathrm{C}=\iint\limits_{S}\overline{zot}\,\overline{F}\,\overline{n}^{\circ}\,ds$$
$$\overline{zot}\,\overline{F}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz}\\ x-y+z & 0 & 0\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}\dfrac{d}{dy} & \dfrac{d}{dz}\\ 0 & 0\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}\dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dz}\\ x-y+z & 0\end{vmatrix}+$$
$$+\overline{k}\begin{vmatrix}\dfrac{d}{dx} & \dfrac{d}{dy}\\ x-y+z & 0\end{vmatrix}=0\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}.$$
$$C=\iint\limits_{D_{xy}}(2+1)dxdy=3\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=12.$$

в) $\Pi=\Pi_{ABC}+\Pi_{AOB}+\Pi_{BOC}+\Pi_{AOC}$
$$AOB: \Pi_{AOB}=\pm\int\limits_{D_{xy}}R\,dxdy=0$$

$$BOC: \Pi_{BOC} = \pm \int\limits_{D_{yz}} \rho dydz = \pm \int\limits_{D_{yz}} (x - y + z) dydz = |x = 0| = +\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{4-2y} (-y + z) dz$$

$$\int\limits_0^{4-2y} (-y + z) dz = \left(-yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_0^{4-2y} = -y(4 - 2y) + \frac{(4 - 2y)^2}{2} =$$

$$= -4y + 8y^2 + \frac{16 - 16y + 4y^2}{2} = -4y + 2y^2 + 8 - 8y + 2y^2 = -12y + 4y^2 + 8.$$

$$\int\limits_0^2 \left(-12y + 4y^2 + 8 \right) dy = \left(-12\frac{y^2}{2} + 4\frac{y^3}{3} + 8y \right) \Bigg|_0^2 = -6 \cdot 2^2 + \frac{4}{3} \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 =$$

$$= -24 + \frac{32}{3} + 16 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

$$AOC: \Pi_{AOC} = \pm \int\limits_{D_{xz}} Qdxdz = 0$$

$$\Pi = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 5\frac{1}{3}$$

Обчислимо потік, застосувавши формулу Остроградського-Гауса

$$\Pi = \iiint\limits_V \left(\frac{d\rho}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} \right) dxdydz = \iiint\limits_V (1 + 0 + 0) dxdydz = \iiint\limits_V dxdydz =$$

$$= V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{осн} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 5\frac{1}{3}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Аршава О. О. Поверхневі інтеграли : навчально-методичний посібник. / О. О. Аршава, А. І. Кононенко, Є. В. Поклонський, О. І. Котульська. – Х. : ХДТУБА, 2011. – 40 с.

2. Вища математика з комп`ютерною підтримкою. Функції багатьох змінних, кратні інтеграли : навчальний посібник / Н. В. Сачанюк-Кавецька, В. О. Краєвський, М. Б. Ковальчук, Г. О. Черноволик. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 135 с.

3. Вища математика: невизначений інтеграл. Практикум для дистанційного навчання : електронний навчальний практикум комбінованого (локального та мережного) використання [Електронний ресурс] / А. А. Коломієць, Я. В. Крупський, О. І. Тютюнник, К. І. Коцюбівська. – Вінниця : ВНТУ, 2021. – 71 с.

4. Денисюк В. П. Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб.: У 4ч. Ч. 3./ В. П. Денисюк, В. К. Репета, К. А. Гаєва, Н. О. Клешня. – 3-тє вид., стереотип. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту«НАУ-друк», 2009. – 444 с.

5. Дідковський Р. М. Практикум з вищої математики: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії векторного поля / Р. М. Дідковський, Н. В. Олексієнко, О. П. Грижук, Н. Ю. Вовненко // – Черкаси:ЧДТУ, 2008. – 112 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик // – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.

7. Елементи теорії поля. Навчально-методичний посібник з курсу вищої математики (для студентів електротехнічних спеціальностей). Уклад. В. В. Бізюк – Харків: ХНАМГ, 2006. – 75 с.

8. Збірник задач з математичного аналізу. Ч. 2. / За ред. проф. Ю. К. Рудавського. – Львів : Видавництво національного університету «Львівська політехніка», 2003. – 232 с.

9. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Методичні вказівки до самостійної роботи для студентів за напрямком 6.050504 «Зварювання». Уклад. В. В. Довгай, А. Ф. Мельник. – К. : КПІ, 2013. – 79 с.

10. Пак В. В. Вища математика: Підручник. / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко // Д.: Видавництво Сталкер, 2003. – 496 с.

11. Сачанюк-Кавецька Н. В., Педорченко Л. І. Елементи теорії поля. – Вінниця, ВНТУ, 2006. – 100 с.

12. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / [А. Д. Тевяшев, О. Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін.]. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 440 с.

13. Швачич Г. Г. Вища математика. Розділ «Подвійні та криволінійні інтеграли» : навч. посіб. / Г. Г. Швачич, В. С. Коноваленков, Т. М. Заборова. – Дніпропетровськ : НМетАУ, 2011. – 36 с.

Навчальне видання

Володимир Олександрович Краєвський,
Юрій Володимирович Добранюк,
Альона Анатоліївна Коломієць

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ ТА ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Навчальний посібник

Рукопис оформив Ю. Добранюк

Редактор О. Ткачук

Оригінал-макет підготовано у РВВ ВНТУ.

Підписано до друку 18.02.2022 р.
Формат 29,7×42¼. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 8,32.
Наклад 40 (1-й запуск 1–21) пр. Зам. № 2022-048.

Видавець та виготовлювач
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114.
Хмельницьке шосе, 95, м. Вінниця, 21021.
Тел. (0432) 65-18-06.
press.vntu.edu.ua;
Email: irvc.vntu@gmail.com.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01. 07.2009 р.