МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ

УДК 004.021:378.147.227:372.851

Т. В. КЛОЧКО, Н. Д. ПАРФЬОНОВА

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків

ПРО ВИКОРИСТАННЯ ПАКЕТУ MAPLE В КУРСІ «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ» ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФІЗИЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Анотація: В статті пропонується ідея викладання курсу «Математичного моделювання» на завданнях із паралельного курсу «Комплексний аналіз» студентам фізичних спеціальностей. Такий підхід дозволяє продемонструвати можливості математичного пакета й при цьому закріпити методи рішення завдань класичного математичного курсу, наочно дає побачити міжпредметні зв'язки, далеко не очевидні студентам.

Ключові слова: Maple.

Вступ

Впровадження сучасних технологій у процес навчання сприяє підвищенню рівня інформаційної культури студентів. Використання комп'ютерних технологій при вивченні нового матеріалу надалі приводить до кращого його засвоєння, наближає процес навчання до наукового пошуку. Незважаючи на те, що пакети комп'ютерної математики працюють за принципом «чорної скриньки»: на «вході» – вхідні дані, на «виході» – результат (при цьому хід розв'язання завдання користувачеві може бути невідомий), можна набути вміння використати ці пакети та опанувати аналітичні методи розв'язання одночасно. У цьому й складається мистецтво викладача, що підбирає конкретні завдання конкретним студентам. Правильний підбір задач дозволяє повторити вивчений метод і проаналізувати отриманий розв'язок.

Актуальність теми

В епоху інформаційного буму, коли інформація є все більш доступною, обсяг матеріалу, який треба донести викладачу, все збільшується, а час, необхідний для цього, збільшити неможливо. Для підвищення ефективності і якості навчання необхідно змінювати підходи, методи, прийоми навчання. Зрозуміло, що більше навантажити студентів неможливо, як неможливо і збільшувати кількість годин з одних предметів за рахунок зменшення з інших. Ця проблема гостро стоїть перед викладачами.

Міжпредметні зв'язки є однією з найважливіших дидактичних умов підвищення наукового рівня викладання навчальних дісциплін і ефективності навчального процесу в цілому.

Постановка проблеми

Тісний зв'язок наук природничо-математичного циклу є відображенням взаємозв'язків і взаємообумовленості у Всесвіті. Цей факт можна і потрібно використовувати як основу для міжпредметних зв'язків, використання яких має бути орієнтовано на розкриття творчого потенціалу, створення цілісної картини світу, з хаосу створити взаємопроникну систему інформації.

У зв'язку з цим треба переглянути програми таких предметів як «Інформатика», «Математичне моделювання» тощо. Потрібно не окремо створювати програми для цих предметів, а «вникнути» в зміст суміжних предметів, створити єдину систему програм, у якій би перекликались теми зі спеціальних предметів. Це вимагає немалих зусиль та часу викладача.

Розглянемо приклад вивчення пакета Maple у курсі «Математичного моделювання» на завданнях із паралельного курсу «Комплексний аналіз» [1, 2]. Такий підхід дозволяє продемонструвати можливості математичного пакета й при цьому закріпити методи розв'язання завдань класичного математичного курсу, наочно дає побачити міжпредметні зв'язки, далеко не очевидні студентам.

Мета публікації

У вищій школі міжпредметні зв'язки можна здійснювати таким чином: по-перше – при вивченні нового матеріалу звертатися до отриманих раніше знань з інших предметів; по-друге – розв'язувати задачі, які вимагають у студентів комплексного використання набутих знань з інших предметів; по-третє – виконувати експериментальні роботи, які вимагають гнучкої системи знань, відомостей з повсякденного життя.

Одним із макропросторів для використання міжпредметних зв'язків є розв'язання задач. В задачах найбільш чітко прослідковується застосування зв'язків між інформатикою, фізикою та математикою. Для студента, який не досить обізнаний з цих наук або не досить чітко розуміє їх взаємозв'язок, розв'язання навіть нескладних практичних задач може викликати великі труднощі.

Метою статті є розробка теми «Розв'язання діфференційних рівнянь і їх систем методами операційного числення» в курсі «Математичного моделювання», використовуючи пакет Maple, а також методичні рекомендації щодо цього.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Кількість публікацій, що стосуються опису та використанню пакету Maple в світі дуже велика, але прямих аналогів ми знайти не змогли. Бо в статті ми намагалися продемонструвати не лише можливости данного математичного пакету, для знаймства з ним існують досить гарні і дуже великі посібники, наприклад [3 – 7], а ті можливості, які дозволяють підвищити наочність учбового матеріалу та уникнути чернових трудомістких розрахунків.

Розв'язання диференційних рівнянь і їх систем методами операційного числення

В Maple є багато можливостей вирішувати диференційні рівняння та їх системи як аналітично, так і чисельно [3 – 7]. Для знаходження аналітичних рішень часто використовують команду `dsolve`.

У гарних випадках, а студентам тільки такі завжди й пропонують, буде отримане загальний розв'язок заданого рівняння або системи. У студентів може скластися враження, що вони витратили час марно, вивчаючи, як мінімум, семестровий курс диференційних рівнянь. Але, навіть, у такій, здавалося б, безнадійній ситуації викладач може поставити завдання таким чином, щоб студентам довелося думати й згадувати вивчений матеріал.

Перше завдання дається з метою ознайомлення з можливостями Maple, та демонструє «розв'язання в один рядок».

Приклад 1. Вирішити задачу Коші: $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^t, \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Вводимо умови задачі:

```
> odu:=diff(y(t),t$2)-3*diff(y(t),t)+2*y(t)=exp(t): odu;
> ic:=y(0)=0,D(y)(0)=0: ic;
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - 3\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 2y(t) = e^t$$

$$y(0) = 0, D(y)(0) = 0$$

1) Вирішимо це диференційне рівняння, не вказуючи метод розв'язання.

```
> dsolve({odu,ic},y(t)): expand(%);
```

$$y(t) = -e^t t + \left(e^t\right)^2 - e^t$$

```
> assign(%%); simplify(odu);
```

$$e^t = e^t$$

Зауваження: студент повинен вивести умови завдання в «найкрасивішому» вигляді й зробити перевірку отриманого розв'язку.

Тепер трохи ускладнимо завдання, одночасно розширюючи знання про функцію `dsolve`:

2) Вирішим дане диференційне рівняння операційним методом.

Для цього потрібно лише додати ще один параметр method=laplace функції `dsolve`.

```
> dsolve({odu,ic},y(t),method=laplace): expand(%);
```

$$y(t) = -e^t t + \left(e^t\right)^2 - e^t$$

Як і слід було сподіватися, цей розв'язок співпадє з отриманим раніше.

Maple дозволяє побудувати графік розв'язку цього рівняння без його знаходження.

3) Не вирішуючи задачу Коші, побудуємо графік її розв'язку.

```
> with(DEtools): DEplot(odu,y(t),t=-2..2,y=-1..3,[[ic]]);
```

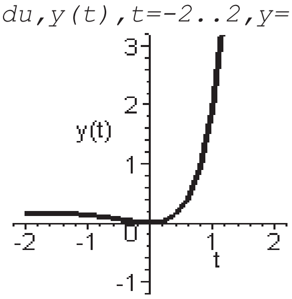

Рисунок 1 – Графік розв'язку диференційного рівняння

Далі трішки ускладнемо задачу.

4) Показати докладний хід розв'язання операційним методом.

```
> with(inttrans):
```

```
> odu:=diff(y(t),t$2)-3*diff(y(t),t)+2*y(t)=exp(t): odu;
> ic:=y(0)=0,D(y)(0)=0: ic; laplace(odu,t,p);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)-3\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)+2y(t)=e^t$$

$$y(0)=0,\,D(y)(0)=0$$

$$p^2\,\mathrm{laplace}(y(t),t,p)-3p\,\mathrm{laplace}(y(t),t,p)+2\,\mathrm{laplace}(y(t),t,p)=\frac{1}{p-1}$$

Використовуючи функцію `laplace`, знаходимо зображення відразу всіх доданків, що входять у дане диференційне рівняння, хоча вигляд одержимо трохи незвичний. Виконаємо підстановку в останньому рівнянні, щоб одержати звичний вигляд рівняння в зображеннях.

```
> subs(laplace(y(t),t,p)=Y(p),%);
```

Вирішимо отримане лінійне рівняння відносно $Y(p)$.

```
> Y(p):=solve(%,Y(p));
```

$$p^2Y(p)-3pY(p)+2Y(p)=\frac{1}{p-1}$$

Розкладемо на множники знаменник отриманого дробу.

```
> Y(p):= factor(Y(p));
```

$$Y(p):=\frac{1}{p^3-4p^2+5p-2}$$

Далі розкладемо $Y(p)$ у суму простих дробів.

```
> Y(p):=convert(Y(p),parfrac,p);
```

$$Y(p):=\frac{1}{(p-2)(p-1)^2}$$

Роблячи зворотне перетворення Лапласа, одержимо остаточну відповідь:

```
> y:=t->invlaplace(Y(p),p,t): `y(t)`=y(t);
```

$$Y(p):=-\frac{1}{p-1}-\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{p-2}$$

Зауваження. Усе вище сказане працює не тільки для розв'язання лінійних диференційних рівнянь із постійними коефіцієнтами, а й зі змінними. Головною відмінністю буде те, що в зображеннях вийде не алгебраїчне лінійне рівняння, а лінійне диференційне рівняння щодо зображення шуканої функції. Аналогічно вирішуються й системи диференційних рівнянь.

Тепер завдання ще раз ускладнемо.

Приклад 2. Вирішити задачу Коші: $y''+y=f(t),\quad y(0)=y'(0)=0,$ якщо функція $f(t)$ задана графічно:

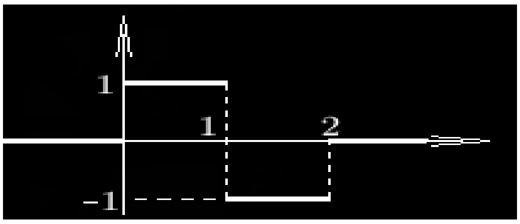

Рисунок 2 – Графік функції $f(t)$

За допомогою функції Хевісайда $\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases},$ задану функцію можна записати у вигляді:

$$f(t)=\eta(t)-2\eta(t-1)+\eta(t-2).$$

В Maple функцію Хевісайда позначають `Heaviside(t)`.

```
> with(inttrans): with(plottools):
> odu:=diff(y(t), t$2)+y(t) = f(t): odu; ic:=y(0)=0,D(y)(0)=0: ic;
> f:=t->Heaviside(t)-2*Heaviside(t-1)+Heaviside(t-2): `f(t)`=f(t);
```

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right)+y(t)=f(t)$$

$$y(0)=0,\ D(y)(0)=0$$

$$f(t)=\mathrm{Heaviside}(t)-2\mathrm{Heaviside}(t-1)+\mathrm{Heaviside}(t-2)$$

Побудуємо функцію $f(t)$ й упевнимося, що аналітичний вираз для неї було написано правильно. Хоча, звичайно, ніякий малюнок не є доказом!

```
> p1:=plot(f(t),t=-1..3,thickness=3,discont=true,color=black):
> p2:= line([1,-1], [1,1], color=grey, linestyle=3):
> p3:= line([2,-1], [2,0], color=grey, linestyle=3):
> plots[display](p1,p2,p3);
```

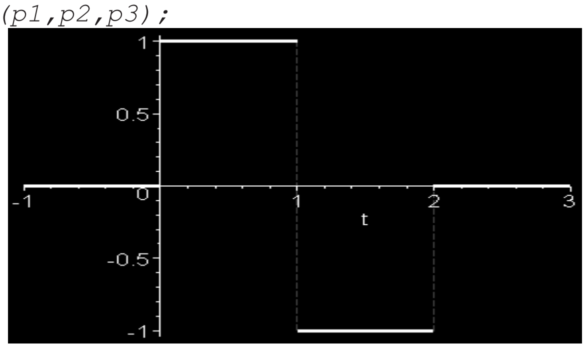

Рисунок 3 – Графік функції $f(t)$

Подальші дії подібні викладеним раніше.

```
> laplace(odu,t,p);
```

$$p^2\,\mathrm{laplace}(y(t),t,p)+\mathrm{laplace}(y(t),t,p)=\frac{1-2e^{(-p)}+e^{(-2p)}}{p}$$

```
> subs(laplace(y(t),t,p)=Y(p),%);
```

$$p^2Y(p)+Y(p)=\frac{1-2e^{(-p)}+e^{(-2p)}}{p}$$

```
> Y(p):=solve(%,Y(p)); y:=t->invlaplace(Y(p),p,t): `y(t)`=y(t);
```

$$Y(p):=\frac{1-2e^{(-p)}+e^{(-2p)}}{p(p^2+1)}$$

$$y(t)=1-\cos(t)-4\mathrm{Heaviside}(t-1)\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+2\mathrm{Heaviside}(t-2)\sin\left(\frac{t}{2}-1\right)^2$$

Показавши все це студентам у будь-якій доступній формі: або на лекції, або даючи «роздруків¬ку» на практичному занятті, даємо кожному індивідуальні завдання, наприклад, такі.

1. Використовуючи методи операційного числення, вирішити задачу Коші для звичайного диференційного рівняння:
$$y''+4y'+29y=e^{-2t},\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$
2. Використовуючи методи операційного числення, вирішити систему звичайних диференційних рівнянь:
$$\begin{cases}x'=x+3y+2,\\ y'=x-y+1.\end{cases}$$
3. Вирішити задачу Коші, де функція f(t) задана графічно (рис.4):
$$y''(t)+2y'(t)+y(t)=f(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$$

Якщо в завданнях 1 та 2 студент виконав всі пункти, показані в прикладі 1, він одержує по 2 бали за кожне завданя (1 бал за перші 3 пункти та 1 бал за пункт 4). Завдання 3 оцінюється в 1 бал. Усього 2×2+1=5. Так, до кінця заняття кожен студент зможе себе оцінити самостійно.

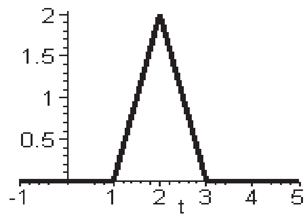

Рисунок 4 – Графік функції $f(t)$

Висновки

В статті наведено опис теми «Розв'язання діфференційних рівнянь і їх систем методами операційного числення», яка вивчається студентами фізичних спеціальностей, зазвичай, у курсі «Теорія функцій комплексної змінної» («Комплексний аналіз») [1, 2] або «Математична фізика». Показані доцільність та переваги використання задач із суміжних спеціальних класичних курсів при викладанні пакета Maple в курсі «Математичне моделювання». В результаті такого підходу отримано підвищення зацікавленності студентів та якості їх знань.

Досвід викладання даної теми показує, що використання міжпредметних зв'язків на заняттях з курсу «Математичне моделювання» дозволяє розширити можливості сприйняття студентів, підвищити наочність учбового матеріалу, а також сприяє активізації пізнавальної діяльності студентів та формуванню їх професійного світогляду.

Список використаної літератури

1. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. / В.Ф. Чудесенко.— М.: Высш. школа, 1983.— 112 с.
2. Парфёнова Н.Д. Комплексный анализ / Н.Д. Парфёнова.— ХНУ имени В.Н. Каразина, 2009.— 86 с.
3. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов.— М.:СОЛОН-Пресс, 2004.— 688 с.
4. Матросов А.В. Maple 6 Решение задач высшей математики и механики / А.В. Матросов.— БХВ-Санкт-Петербург, 2001.— 528 с.
5. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8 / О.А. Сдвижков.— М.: СОЛОН-Пресс, 2003.— 176 с.
6. Mathews J., Howell R. Complex Analysis for Mathematics and Engineering / J. Mathews, R. Howell — Jones and Bartlett Publishers , 2007.— 484 p.
7. Garvan F. The Maple Book / F. Garvan.— Chapman & Hall/Crc, 2002.— 463 p.

Стаття надійшла до редакції 15.09.2010.

Відомості про авторів

Парфьонова Наталія Дмитрівна – к. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики фізичного факультету Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна, майдан Свободи, 4, м. Харків, 61077, тел. – 707 53 27; e-mail: parfyonova@univer.kharkov.ua

Клочко Тамара Володимирівна – старший викладач кафедри вищої математики фізичного факультету, майдан Свободи, 4, Харків, 61077, тел. – 707 53 27; e-mail: klochko@univer.kharkov.ua