Сивак Р. І.
д.т.н., доцент

Островський А. Й.
асистент

Залізняк Р.О.
аспірант

Вінницький національний аграрний університет

Sivak R.
Dr. Sc. of Eng., Associate Professor

Ostrovsky A.
Assistant

Zalizniak R.
Postgraduate Student

Vinnytsia National Agrarian University

УДК 621.73.011.001.5
DOI: 10.37128/2306-8744-2022-1-11

ВИЗНАЧЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИЧНОЇ ТЕЧІЇ МЕТАЛУ В УМОВАХ ОСЬОВОЇ СИМЕТРІЇ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ

При осесиметричній деформації тіло, що деформується, і навантаження мають спільну вісь симетрії. Така деформація виникає в чисельних технологічних операціях. Біля 70% деталей, що отримуються шляхом холодного видавлювання, деформуються в умовах осьової симетрії.

Плоска задача теорії пластичності зводиться до вирішення в рамках двовимірної постановки, коли аналізується рух точок в перерізі заготовки. Кожна точка може рухатися тільки в площині перерізу, і її швидкість можна розкласти на два взаємно перпендикулярні напрямки по координатних осях. При плоскій деформації передбачається, що швидкість в напрямку третьої осі координат дорівнює нулю.

Наявність осьової симетрії також дозволяє обмежитися дослідженням поведінки точок, розташованих на площині меридіонального перерізу заготовки. При цьому кожна точка може рухатися тільки в площині перерізу, і її швидкість можна розкласти на два ортогональні напрямки: вздовж осі і по радіусу. Складова вектора швидкості в окружному напрямку дорівнює нулю, тому з шести незалежних компонентів тензора швидкостей деформацій залишається тільки чотири. В зв'язку з цим осесиметричні задачі теорії пластичності викликають значну цікавість з точку зору розв'язку прикладних завдань.

В статті розглядається можливість застосування змішаних координат Ейлера та Лагранжа для визначення компонент тензора швидкостей деформацій в процесах пластичного деформування, які характеризуються осесиметричним характером пластичної течії металу. Векторне поле переміщень в кожній точці простору відображає перетворення початкової (недеформованої) конфігурації в поточну і тому визначає конфігурацію деформованого тіла в просторі у певній системі відліку. Процес деформування спочатку розглядається в єдиній декартовій системі координат, а потім в циліндричній системі координат, використання якої більш доцільне при осесиметричній деформації. Передбачається, що функції ейлерових координат від лагранжевих отримуються шляхом апроксимації експериментальних даних.

Ключові слова: *змінні Лагранжа та Ейлера, компоненти тензора деформацій, компоненти тензора швидкостей деформацій, пластичний перебіг, деформований стан, декартова система координат, циліндрична система координат, осесиметрична деформація.*

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Одним із напрямків розвитку сучасних програмних систем є вдосконалення моделей, що використовуються для опису пластичної течії металів. Ефективність застосування таких програмних продуктів для інженерного аналізу у машинобудуванні загальновизнана. Але методи теоретичного розв'язку задач обробки металів тиском, що закладені в цих програмних системах, розвинуті недостатньо для їх практичного використання при розробці та удосконаленні технологій. Особливо у випадку коли метал перебуває в умовах об'ємного напруженого стану при наявності немонотонності навантаження. Істотним фактором також є тенденція переходу до більш жорстких вимог до точності визначення напружено-деформованого стану, оскільки прогнозування механічних властивостей деформованого металу і рівень його пошкодженності можуть бути достовірно визначені тільки при відомій історії розвитку процесу пластичної деформації в будь-якій точці осередку деформації. Наявність немонотонного навантаження значно ускладнює розрахунки напружень та граничних деформацій [1-3]. Перелічені особливості пластичної деформації при об'ємному холодному штампуванні обумовлюють складність її математичного моделювання. Класичні моделі пластичності, що використовуються у існуючих на даний час програмних продуктів не описують зазначену деформацію, тому технологічні процеси обробки металів тиском розробляються на основі виробничого досвіду, що пов'язано із значними витратами. В останніх дослідженнях для достовірної оцінки впливу немонотонності пластичної деформації запропоновано різні підходи при створенні моделей пластичності [2-4]. Для розвитку технологій холодного об'ємного штампування металів необхідний апарат для адекватного математичного моделювання процесів деформування, ключовим компонентом якого є моделі для опису кінематики пластичної течії металу [5-8].

Спосіб кінематичного описання визначається механічними властивостями середовища. Підхід Лагранжа добре працює при описанні кінематики деформацій в механіці деформівного твердого тіла, тобто використання такого підходу при моделюванні пластичної течії металу обумовлено фізичною природою модельованого середовища, що деформується. При цьому повне Лагранжеве формулювання рівнянь механіки суцільного середовища (відносно початкових координат) практично не використовується в дослідженнях особливостей кінематики деформування, а чисельний розв'язок рівнянь механіки деформівного твердого тіла при великих пластичних деформаціях заснований на спрощеній реалізації геометричних прийомів. Підхід Ейлера створює більш точну числову систему при розв'язку рівнянь механіки суцільного середовища. Оскільки осесиметрична деформація має місце в чисельних технологічних операціях, то існує необхідність у створенні методу із спільним використанням підходів Лагранжа і Ейлера для достовірного описання кінематики пластичної течії в умовах осьової симетрії в тому числі і при немонотонній пластичній деформації.

Формулювання мети досліджень. Метою досліджень є створення методу визначення компонент тензора швидкостей деформацій з використанням підходів Ейлера і Лагранжа описання руху суцільного середовища при пластичному деформуванні металу в умовах осьової симетрії.

Викладення основного матеріалу дослідження.

В будь-який поточний момент часу, коли поле зміщень безперервно, то справедливі рівняння

$$\begin{aligned} x &= x(x_0, y_0, z_0) \\ y &= y(x_0, y_0, z_0) \\ z &= z(x_0, y_0, z_0) \end{aligned} \tag{1}$$

Отже, якщо рух точок описувати за допомогою змінних Лагранжа, то [4,5]

$$\begin{aligned} \mathrm{dx} &= \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0, \\ \mathrm{dy} &= \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0, \\ \mathrm{dz} &= \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}_0}\mathrm{dx}_0 + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}_0}\mathrm{dy}_0 + \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{z}_0}\mathrm{dz}_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь можна отримати у вигляді

$$dx_0 = \frac{\Delta_{01}}{D_0},\ dy_0 = \frac{\Delta_{02}}{D_0},\ dz_0 = \frac{\Delta_{03}}{D_0}, \tag{3}$$

де функціональний визначник

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \qquad (4)$$

При осесиметричній деформації якобіан перетворення приймає вид

$$D_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_0} & 0 & \frac{\partial z}{\partial r_0} \\ 0 & \frac{r}{r_0} & 0 \\ \frac{\partial r}{\partial r_0} & 0 & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} = \frac{r}{r_0}\left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{\partial r}{\partial z_0}\right). \qquad (5)$$

Компоненти тензора швидкостей деформацій в цьому випадку будуть дорівнювати

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\right) - \frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial z_0}\right)\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right) - \frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial r_0}\right)\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial r_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{r}{r_0}\right)\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial t}, \qquad (6)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\gamma}_{rz} = \frac{1}{D_0}\left[\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial z_0}\right) + \frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial r_0}\right) - \frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r}{\partial r_0}\right) - \frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\right].$$

В процесах обробки тиском, для яких характерно наявність жорстких областей перед входом і на виході з пластичної зони, всі точки жорстких областей рухаються з однаковою і, в загальному випадку, змінною швидкістю. Якщо складові швидкості υ_0 руху жорсткої області на вхідній границі з пластичною областю дорівнюють

$$\upsilon_{0x} = \frac{dx_0}{dt},$$

$$\upsilon_{0y} = \frac{dy_0}{dt}, \qquad (7)$$

$$\upsilon_{0z} = \frac{dx_0}{dt},$$

то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dx_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{dx_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{dy_0}{dt} + \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{dz_0}{dt}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0{}^2}\upsilon_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial y_0}\upsilon_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial x_0 \partial z_0}\upsilon_{0z},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dy_0}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0\, \partial y_0}\upsilon_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0{}^2}\upsilon_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0}\upsilon_{0z}, \qquad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dz_0}\right) == \frac{\partial^2 x}{\partial z_0 \partial x_0}\upsilon_{0x} + \frac{\partial^2 x}{\partial y_0 \partial z_0}\upsilon_{0y} + \frac{\partial^2 x}{\partial z_0{}^2}\upsilon_{0z}.$$

Аналогічно можна отримати залежності для решти похідних по часу, що входять у співвідношення

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} - \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} - \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\right]$$

,

$$\dot{\varepsilon}_y=\frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}-\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}-\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}-\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\right]$$

$$\dot{\varepsilon}_z=\frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}-\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\right]$$

$$2\dot{\varepsilon}_{xy}=\dot{\gamma}_{xy}=\frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}-\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)++\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}-\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\right],\quad(9)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{yz}=\dot{\gamma}_{yz}=\frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}-\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}-\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}-\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}-\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\right]$$

$$2\dot{\varepsilon}_{zx}=\dot{\gamma}_{zx}=\frac{1}{D_0}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}-\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}-\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}-\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}-\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0}-\frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\right]$$

Залежності (8) суттєво спрощуються, якщо осі координат x_0, y_0, z_0 вибрати так, щоб напрямок швидкості υ_0 співпадав з напрямком однієї з них. Наприклад, якщо $\upsilon_{0x}=\upsilon_0,\upsilon_{0y}=\upsilon_0,\upsilon_{0z}=\upsilon_0$, то

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 x}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 y}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0,\qquad(10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial {x_0}^2}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial x_0\partial y_0}\upsilon_0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)==\frac{\partial^2 z}{\partial z_0\partial x_0}\upsilon_0.$$

Для випадку осесиметричної деформації, коли $\upsilon_{0z}=\upsilon_0$, і виконується умова нестисливості $\left(D_0=\frac{r_0}{r}\right)$, отримаємо

$$\dot{\varepsilon}_r=\upsilon_0\left[\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial^2 r}{\partial r_0\partial z_0}-\frac{\partial z}{\partial r_0}\frac{\partial^2 r}{\partial z_0^2}\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_z=\upsilon_0\left[\frac{\partial r}{\partial r_0}\frac{\partial^2 z}{\partial z_0^2}-\frac{\partial r}{\partial z_0}\frac{\partial^2 z}{\partial r_0\partial z_0}\right],$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta=\upsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial z_0},\qquad(11)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{rz} = \upsilon_0 \left[\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0^2} + \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial z_0} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial^2 r}{\partial r_0 \partial z_0} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z_0^2} \right].$$

Оскільки $\upsilon_0 = \dfrac{dz_0}{dt}$, то співвідношення (11) можна представити у вигляді

$$\dot{\varepsilon}_r = \frac{r}{r_0} \left[\frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial^2 r}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} \right],$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{r}{r_0} \left[\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} \right],$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial t}, \qquad (12)$$

$$2\dot{\varepsilon}_{rz} = \dot{\gamma}_{rz} = \frac{r}{r_0} \left[\frac{\partial r}{\partial r_0} \frac{\partial^2 r}{\partial z_0 \partial t} + \frac{\partial z}{\partial z_0} \frac{\partial^2 z}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial r}{\partial z_0} \frac{\partial^2 r}{\partial r_0 \partial t} - \frac{\partial z}{\partial r_0} \frac{\partial^2 z}{\partial z_0 \partial t} \right].$$

По аналогії з інтенсивністю деформацій інтенсивність швидкостей деформацій у випадку осесиметричної деформації визначається формулою

$$\dot{\varepsilon}_u = \sqrt{\frac{4}{3}\left(\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_z^2 + \dot{\varepsilon}_r^2 \dot{\varepsilon}_z^2\right) + \frac{1}{3}\dot{\gamma}_{rz}^2} \qquad (13)$$

В більшості випадків функції ейлерових координат від лагранжевих або функції

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t)$$
$$y = y(x_0, y_0, z_0, t), \qquad (14)$$
$$z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

що входять в приведені вище співвідношення для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій, отримані шляхом апроксимації експериментальних даних. Після апроксимації експериментальної інформації тим чи іншим способом отримані функції використовуються в співвідношеннях (6), (9) або (12) для розрахунку компонент тензора швидкостей деформацій.

Висновки. Використання запропонованого методу дає можливість отримати основні рівняння компонент тензора швидкостей деформацій при пластичній обробці деталей, що отримуються шляхом холодного видавлювання в умовах осьової симетрії. Запропонований метод дозволяє підвищити достовірність визначення напружено-деформованого стану в процесах пластичного формозмінення, в тому числі процесах обробки тиском, що характеризуються немонотонною пластичною деформацією.

Список використаних джерел

1. Алієва Л. І., Алієв І. С., Грудкіна Н. С., Малій Х. В. Моделювання процесу комбінованого радіально-зворотного видавлювання деталей з фланцем. *Обработка материалов давлением*. Краматорськ. 2019. № 1 (48). С. 23-34.

2. Матвійчук В. А., Бубновська І. А. Оцінка деформованості матеріалу криволінійних заготовок при холодному вальцюванні. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. Вінниця. 2017. Випуск 4. С. 92-97.

3. Михалевич В. М., Добранюк Ю. В., Краєвський В. О. Порівняльне дослідження моделей граничних пластичних деформацій. *Вісник машинобудування та транспорту*. Вінниця. 2018. № 2. С. 56-64.

4. Грушко О. В., Огороднiков В. А., Слободянюк Ю. О. Деформовність маловуглецевого дроту в процесі його багатоступінчастого холодного волочіння. *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. Вінниця. 2019. №3. С. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Рекечинський В. І. Застосування методу функцій току в стаціонарних процесах пластичного деформування. *Вібрації в техніці і технологіях.* Вінниця. 2020. №2 (97). С. 157-163.

7. Сивак Р. І., Гунько І. В., Залізняк Р. О. Застосування ліній току при визначенні кінематичних характеристик в стаціонарних процесах пластичної течії металу. *Вібрації в техніці і технологіях.* Вінниця. 2021. №2 (97). С. 157-163.

8. Сивак Р. І., Залізняк Р. О. Дослідження кінематики пластичної течії металу за допомогою змінних Ейлера і Лагранжа. *Вібрації в техніці і технологіях.* Вінниця. 2021. №4 (103). С. 68-76.

Список джерел у транслітерації

1. Alieva L. I., Alieв I. S., Grudkina N. S., Maliy H. V. Modeliuvannia protsesu kombinovanogo radialno-zvorotnogo vydavliuvannia detaley z flantsem. *Obrabotka materialov davleniem*. Kramatorsk. 2019. № 1 (48). S. 23-34.

2. Matviychuk V. A., Bubnovska I. A. Otsinka deformovanosti materialu kryvoliniynyh zagotovok pry holodnomu valtsuvanni. *Tehnika, energetyka, transport APK.* Vinnytsia. 2017. Vypusk 4. S. 92-97.

3. Myhalevych V. M., Dobraniuk Iu. V., Kraevskyi V. O. Porivnialne doslidzhennia modeley granychnyh plastychnyh deformatsiy. *Visnyk mashynobuduvannia ta transportu*. Vinnytsia. 2018. № 2. S. 56-64.

4. Grushko O. V., Ogorodnikov V. A., Slobodianiuk Iu. O. Deformovnist malovugletsevogo drotu v protsesi yogo bagatostupinchastogo holodnogo volochinnia. *Visnyk Vinnytskogo politehnichnogo instytutu*. Vinnytsia. 2019. №3. S. 103-110.

5. Sivak R. Evaluation of metal plasticity and research of the mechanics of pressure treatment processes under complex loading. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Kharkiv. 2017. №6/7 (90). P. 34-41.

6. Rekechynskyi V. I. Zastosuvannia metody funktsiy toku v statsionarnyh protsessah plastychnogo deformuvannia. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiah.* Vinnytsia. 2020. №2 (97). S. 157-163.

7. Syvak R. I., Gunko I. V., Zalizniak R. O. Zastosuvannia liniy toku pry vyznachenni kinematychnyh harakterystyk v statsionarnyh protsesah plastychnoy techiy metalu. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiah.* Vinnytsia. 2021. №2 (97). S. 157-163.

8. Syvak R. I., Zalizniak R. O. Doslidzhennia kinematyky plastychnoi techii metalu za dopomogoiu zminnyh Eilera i Lagranzha. *Vibratsii v tehnitsi i tehnologiah.* Vinnytsia. 2021. №4 (103). S. 68-76.

DETERMINATION OF KINEMATIC CHARACTERISTICS OF METAL PLASTIC FLOW UNDER CONDITIONS OF AXIAL SYMMETRY OF THE DEFORMATION PROCESS

With axisymmetric deformation, the deformable body and the load have a common axis of symmetry. Such deformation occurs in numerous technological operations. About 70% of parts obtained by cold extrusion are deformed under conditions of axial symmetry.

The plane problem of the theory of plasticity is reduced to a solution in the framework of a two-dimensional statement, when the motion of points in the section of a workpiece is analyzed. Each point can move only in the section plane, and its velocity can be decomposed into two mutually perpendicular directions along the coordinate axes. For plane deformation, it is assumed that the velocity in the direction of the third coordinate axis is equal to zero.

The presence of axial symmetry allows us to confine ourselves to studying the behavior of points located on the plane of the meridional section of the workpiece. In this case, each point can move only in the section plane and its velocity can be decomposed into two orthogonal directions: along the axis and along the radius. The component of the velocity vector in the circumferential direction is equal to zero, so only four of the six independent components of the strain rate tensor remain. In this regard, axisymmetric problems of the theory of plasticity are of considerable interest from the point of view of solving applied problems.

The article discusses the possibility of using mixed Euler and Lagrange coordinates to determine the components of the strain rate tensor in plastic deformation processes characterized by the axisymmetric nature of metal plastic flow. The vector field of displacements at each point in space reflects the transformation of the initial (non-deformed) configuration into the current one, and therefore determines the configuration of the deformed body in space in a certain frame of reference. The deformation process is first considered in a single Cartesian coordinate system, and then in a cylindrical coordinate system, the use of which is more appropriate for axisymmetric deformation. It is assumed that the functions of the Euler coordinates from the Lagrange coordinates are obtained by approximating the experimental data.

Keywords: *Lagrange and Euler variables, strain tensor components, strain rate tensor components, plastic flow, deformed state, Cartesian coordinate system, cylindrical coordinate system, axisymmetric deformation.*

Відомості про авторів

Сивак Роман Іванович – доктор технічних наук, доцент кафедри загальнотехнічних дисциплін Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Островський Анатолій Йосипович – асистент кафедри машин та обладнання сільськогосподарського виробництва Вінницького національного аграрного університету (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, 21008, Україна, email: anatol.u.ostrowski@gmail.com)

Залізняк Роман Олександрович – аспірант (вул. Сонячна, 3, м. Вінниця, Україна, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)

Sivak Roman – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of General Technical Disciplines of Vinnytsia national agrarian university (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: sivak_r_i@ukr.net)

Ostrovsky Anatoliy – assistant of the department machinery and equipment for agricultural production of the Vinnytsia National Agrarian University (3, Solnechnaya St., Vinnitsa, 21008, Ukraine, email: anatol.u.ostrowski@gmail.com).

Zalizniak Roman – graduate student (st. Soniachna, 3, Vinnytsia, Ukraine, 21008, e-mail: pacifistroma@gmail.com)