УДК 512.534.5

В.Д. Дереч

ПРО СКІНЧЕННІ СТРУКТУРНО ОДНОРІДНІ НАПІВГРУПИ

ВНТУ

Анотація

В даному повідомленні ми розглядаємо деякі властивості скінченних структурно однорідних напівгруп. Зокрема конструюємо скінченні структурно однорідні напівгрупи, кожна з яких є ідеальним розширенням групи за допомогою напівгрупи з нульовим множенням.

Ключові слова: структурно однорідна напівгрупа, інверсний моноїд, локальний автоморфізм.

Abstract

In this conference paper, we consider some properties of finite structurally uniform semigroups. In particular, we construct finite structurally uniform semigroups, each of which is an ideal extension of the group by a null semigroup.

Keywords: structurally uniform semigroup, inverse monoid, local automorphism.

Нехай C − довільна математична структура. Ізоморфізм між двома її підструктурами називається **локальним автоморфізмом** структури C. Відомо, що множина всіх локальних автоморфізмів математичної структури C відносно операції композиції бінарних відношень утворює інверсний моноїд, який позначається через $LAut(C)$. Вивчення взаємозв'язків між властивостями структури C і властивостями інверсного моноїда $LAut(C)$ є актуальною проблемою теорії інверсних напівгруп. Результати досліджень на цю тему можна знайти в багатьох статтях (див., наприклад, [1-8]). Зокрема в статті [6] наведено вичерпний список скінченних напівгруп, для яких інверсний моноїд локальних автоморфізмів є конгруенц-переставною напівгрупою. В статті [7] сконструйовані всі (з точністю до ізоморфізму) скінченні напівгрупи S, для яких інверсний моноїд $LAut(S)$ є дельта-напівгрупою. Ми продовжуємо дослідження на цю тему. Зазначимо такий факт (див. [6,7]): якщо інверсний моноїд $LAut(S)$ є конгруенц-переставним (або дельта-напівгрупою), то решітка ідеалів моноїда $LAut(S)$ є лінійно впорядкованою відносно включення. Відомо (див. [8]), що ідеали інверсного моноїда $LAut(S)$ утворюють ланцюг тоді і лише тоді, коли піднапівгрупи однакової висоти в решітці $Sub(S)$ є ізоморфними. Для подальшої зручності введемо таке означення: скінченна напівгрупа S називається **структурно однорідною,** якщо дві її піднапівгрупи однакової висоти в решітці $Sub(S)$ є ізоморфними. Автором з'ясовано (цей результат ще не опубліковано), що скінченна напівгрупа S є структурно-однорідною, якщо S є або групою, або нільнапівгрупою, або в'язкою, або розширеннм групи за допомогою нільнапівгрупи. В [9] наведено вичерпний список скінченних структурно однорідних груп. А саме:

ТЕОРЕМА 1. Скінченна група G є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли G або циклічна група порядку p^n, де $p-$просте число, або група кватерніонів Q_8, або елементарна Абелева група, або група Гайзенберга $Heis(Z_p)$, де $p-$просте непарне число.

В статті [8] наведено вичерпний список скінченних структурно-однорідних в'язок. А саме:

ТЕОРЕМА 2. Скінченна в'язка S є структурно однорідною тоді і лише тоді, коли S або лінійно впорядкована напіврешітка, або примітивна напіврешітка, або напівгрупа правих нулів, або напівгрупа лівих нулів.

Що стосується скінченних структурно однорідних нільнапівігруп, то тут ситуація така: в статті [9] сконструйовані всі скінченні структурно-однорідні комутативні нільнапівгрупи. Стосовно не комутативних структурно однорідних напівгруп, то автором одержано вичерпний список таких напівгруп (цей результат ще не опубліковано).

Подальша наша мета – конструювання скінченних структурно однорідних напівгруп, кожна з яких є ідеальним розширенням групи за допомогою нільнапівгрупи. В цьому напрямку нами зроблено лише перші кроки. Зокрема ми конструюємо скінченні структурно однорідні напівгрупи, кожна з яких є ідеальним розширенням простої групи за допомогою напівгрупи з нульовим множення. Важливу роль в наших дослідженнях відіграє наступна лема.

ЛЕМА. Нехай група $G\ (|G| \geq 2)$ є ідеалом структурно-однорідної напівгрупи S. Якщо фактор – напівгрупа S/G (по конгруенції Ріса) є нетривіальною нільнапівгрупою, то група G є циклічною.

Наступне питання, яке природним чином виникає в ході наших досліджень, формулюється наступним чином: нехай $G\ (|G| \geq 2)$ — скінченна проста група . Як сконструювати напівгрупу**,** яка задовольняє такі умови:

1) G є ідеалом напівгрупи S.

2) Фактор-напігрупа S/G є напівгрупою з нульовим множення.

3) Напівгрупа S є структурно-однорідною?

Відповідь на це питання дає наступна **конструкція**. Отже, нехай $G = \left\langle \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots p \\ 2\ 3\ 4 \ldots 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ – циклічна група простого порядку p. Далі, нехай $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$ і $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ – дві k-елементні множини, що не перетинаються. Ми також вимагаємо, щоб $\{1, 2, \ldots, p\} \cap R = \{1, 2, \ldots, p\} \cap M = \varnothing$. Для нетотожної перестановки $\alpha \in \left\langle \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots p \\ 2\ 3\ 4 \ldots 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ позначимо через T_η множину всіх часткових перетворень виду $x_i^\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & p & r_i \\ \eta(1) & \eta(2) & \eta(3) & \ldots & \eta(p) & m_i \end{pmatrix}$**,** де $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ **.**

1. Якщо $\alpha, \beta \in \left\langle \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3 \ldots p \\ 2\ 3\ 4 \ldots 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ і $\alpha \neq \beta$, то напівгрупа $G \cup \{x_i^\alpha, x_i^\beta\}$ задовольняє всі три вище –

наведені умови 1), 2), 3).

Будь-яка структурно-однорідна напівгрупа S, що містить $|G|+2$ елемента і є ідеальним розширенням групи G за допомогою напівгрупи з нульовим множенням ізоморфна або напівгрупі виду $G\cup\left\{x_i^{\alpha}, x_i^{\beta}\right\}$, або напівгрупі виду $G\cup\left\{x_j^{\lambda}, x_h^{\lambda}\right\}$, де $\lambda\in\left\langle\begin{pmatrix}1\ 2\ 3 \ldots p\\ 2\ 3\ 4 \ldots 1\end{pmatrix}\right\rangle$ і $j,h\in\{1,2,\ldots,k\}$.

2. Напівгрупа $G\cup\left\{x_{i_1}^{\alpha}, x_{i_2}^{\alpha},\ldots,x_{i_t}^{\alpha}\right\}$, де $\{i_1,i_2,\ldots,i_t\}\subseteq\{1,2,..,k\}$ і $t\geq 3$, є структурно однорідною напівгрупою, яка є ідеальним розширенням групи G за допомогою напівгрупи з нульовим множенням.

Будь-яка структурно однорідна напівгрупа, яка містить щонайменше $|G|+t$ $(t\geq 3)$ елементів і задовольняє умови 1), 2), 3), ізоморфна напівгрупі $G\cup\left\{x_{i_1}^{\alpha}, x_{i_2}^{\alpha},\ldots,x_{i_t}^{\alpha}\right\}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Ganyushkin, O., Mazorchuk, V.: On the structure of On. Semigroup Forum, **66**, 455-483 (2003)

2. Goberstein, S.M.: Inverse semigroups with certain types of partial automorphism monoids. Glasgow Math. J., **32**, 189-195$ (1990)

3. Fernandes, V. H.: The monoid of all injective order preserving partial transformations on a finite chain. Semigroup Forum. **62**, 178-204 (2001)

4. Dimitrova, I., Fernandes, V.H., Koppitz, J., Quinteiro, T.M.: Partial automorphisms and injective partial endomorphisms of a finite undirected path. Semigroup Forum. **103**, $87-105$ (2021)

5. Jajcay, R,, Jajcayova, T., Szakacs, N., Szendrei, M.: Inverse monoids of partial graph automorphisms. Journal of Algebraic Combinatorics **53**, 829-849 (2021)

6. Derech, V.D.: Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a permutable semigroup. Ukr. Math. J., **68**, 1820-1828 (2017)

7. Derech, V.D.: Complete classification of finite semigroups for which the inverse monoid of local automorphisms is a delta-semigroup. Semigroup Forum **102**, 397-407 (2021)

8. Derech, V.D.: Structure of a finite commutative inverse semigroup and a finite bundle for which the inverse monoid of local automorphisms is permutable. Ukrainian Mathematical Journal, **63,** 1390-1399 (2012)

9. Derech V.D.: Finite structurally uniform groups and commutative nilsemigroups. Ukr. Math. J., **70**, 1237-1251 (2019)

Дереч Володимир Дмитрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, Вінниця, derech@vntu.edu.ua

Derech Volodymyr Dmytrovych, PhD in Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, derech@vntu.edu.ua