

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧОТИРИВИМІРНИХ 2π -ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ, ПОБУДОВАНИХ НА ЗНАЧЕННЯХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ СИНУСА АБО КОСИНУСА (ДОПОВІДЬ №4)

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено спектральний аналіз чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, які побудовано над полями значень тригонометричних синуса або косинуса в закритому системі нерівностей чотиривимірному просторі параметричної області їх визначення за умов рівності на періоді нулю інтегралів цих функцій за змінною кута θ (або часу t). Розв'язування такої задачі в узагальненому вигляді доки відсутнє.

Ключові слова: електротехніка, електроніка, одновимірні та багатовимірні 2π -періодичні функції, чотиривимірний лінійний простір, структура простору, багатовимірна область визначення функції, впорядковані четвірки, координатний базис, функціональний простір, коефіцієнти Фур'є, ряд Фур'є, регулятор змінного струму, регульовальна характеристика

Abstract

A spectral analysis of four-dimensional 2π -periodic functions, which are constructed over the fields of trigonometric sine or cosine values in a closed system of inequalities in the four-dimensional space of the parametric domain of their definition, is carried out. There is no general solution to this problem yet.

Keywords: electrical engineering, electronics, one-dimensional and multi-dimensional 2π -periodic functions, four-dimensional linear space, space structure, parametric domain of a function, ordered quads, coordinate basis, functional space, Fourier coefficients, Fourier series

Вступ

Проведемо спектральний аналіз чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, які побудовано над полями значень тригонометричних синуса або косинуса (рис. 1)

$$u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) = \{ \mathbf{1}(\theta - \alpha_1) - \mathbf{1}[\theta - (\alpha_1 + \beta_1)] + \mathbf{1}[\theta - (\pi + \alpha_2)] - \mathbf{1}[\theta - (\pi + \alpha_2 + \beta_2)] \} U_m \sin \theta, \quad (1)$$

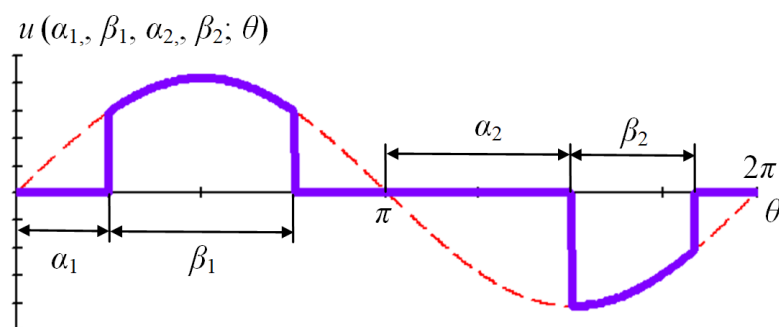


Рис. 1. Чотиривимірна 2π -періодична функція $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$

за умов рівності на періоді нулю їх інтегралів за змінною кута θ (або часу t)

$$J_d(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) d\theta = 0 \quad (2)$$

в закритому системі нерівностей

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \leq \pi; \\ \alpha_2 + \beta_2 \leq \pi; \\ \alpha_1 \geq 0; \beta_1 \geq 0; \\ \alpha_2 \geq 0; \beta_2 \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

чотиривимірному просторі параметричної області визначення цих функцій.

Розв'язування такої задачі в узагальненому вигляді допоки відсутнє [1-15].

Водночас клас зазначених 2π -періодичних функцій, які сформовано над полями значень тригонометричних функцій синуса або косинуса, має винятково важливе значення як у вихідному базисі теоретичної електротехніки, так і в її його додатках [7-15].

Узагальнені коефіцієнти Фур'є однойменного тригонометричного ряду як функціонали чотиривимірних 2π -періодичних функцій у відносних одиницях

Розглянемо чотиривимірні 2π -періодичні функції $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, що побудовані над полями значень тригонометричних синуса або косинуса (рис. 1), як елементи нескінченновимірного лінійного (векторного) простору 2π -періодичних функцій із заданим ортогональним базисом тригонометричних функцій в ньому.

Подамо функцію $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ за дії умови (2) тригонометричним рядом Фур'є

$$u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \cos n\theta + B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \sin n\theta \right], \quad (4)$$

де $A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ та $B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ – коефіцієнти Фур'є.

З урахуванням формули (1) знайдемо ці коефіцієнти як функціонали чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, представлених у відносних одиницях в співвідношенні до амплітудного значення U_m

$$J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{A^{(n)}}{U_m}; \quad (5)$$

$$J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{B^{(n)}}{U_m}.$$

Коефіцієнти Фур'є $A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ та $B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, де $n \geq 1$, визначаємо через скалярний добуток

$$A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) \cos n\theta d\theta, \quad (6)$$

$$B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) \sin n\theta d\theta. \quad (7)$$

а) Тоді для відносних функціоналів *першої гармоніки* ($n=1$) з урахуванням формул (1), (5), (6) та (7) за результатами інтегрування отримуємо

$$J_A^{(1)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2 - \cos [2(\alpha_1 + \beta_1)] - \cos [2(\alpha_2 + \beta_2)] \right\}, \quad (8)$$

$$J_B^{(1)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 2(\beta_1 + \beta_2) + \sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - \sin [2(\alpha_1 + \beta_1)] - \sin [2(\alpha_2 + \beta_2)] \right\}. \quad (9)$$

б) Для відносних функціоналів *вищих гармонік* $A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ та $B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, де $n \geq 2$, за результатами інтегрування маємо

$$J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{n-1} \left[\cos[(n-1)(\alpha_1 + \beta_1)] - (-1)^n \cos[(n-1)(\alpha_2 + \beta_2)] - \cos[(n-1)\alpha_1] + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \cos[(n-1)\alpha_2] \right] - \frac{1}{n+1} \left[\cos[(n+1)(\alpha_1 + \beta_1)] - (-1)^n \cos[(n+1)(\alpha_2 + \beta_2)] - \cos[(n+1)\alpha_1] + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \cos[(n+1)\alpha_2] \right] \right\}, n \geq 2, \quad (10)$$

$$J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{n-1} \left[\sin[(n-1)(\alpha_1 + \beta_1)] - (-1)^n \sin[(n-1)(\alpha_2 + \beta_2)] - \sin[(n-1)\alpha_1] + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \sin[(n-1)\alpha_2] \right] - \frac{1}{n+1} \left[\sin[(n+1)(\alpha_1 + \beta_1)] - (-1)^n \sin[(n+1)(\alpha_2 + \beta_2)] - \sin[(n+1)\alpha_1] + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \sin[(n+1)\alpha_2] \right] \right\}, n \geq 2. \quad (11)$$

в) На підставі формул (8) – (11) амплітудно-частотну характеристику спектру чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, визначимо у відносних до амплітуди одиницях як функціонал

$$J_m^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \sqrt{\left[J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right]^2 + \left[J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right]^2}, n \geq 1. \quad (12)$$

г) Фазово-частотну характеристику спектру для всіх $n \geq 1$ також визначаємо з урахуванням співвідношень (8) – (11) як функціонал чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$

$$J_\psi^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = \begin{cases} \arctg \frac{J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}{J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}, J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \geq 0; \\ \pm\pi + \arctg \frac{J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}{J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)}, J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Отримані коефіцієнти Фур'є, АЧХ та ФЧХ спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ відповідно до вищенаведених співвідношень виявляють себе як функції чотирьох змінних $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$, областю визначення яких є чотиривимірний простір параметричної області визначення власне зазначених 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ за накладеної на них умов (2) та (3).

Таким чином, кожна з чотиривимірних 2π -періодичних функцій може бути представлена тригонометричним рядом Фур'є у вигляді

$$u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) = U_m \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \cos n\theta + J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \sin n\theta \right] = \\ = U_m \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ J_m^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \sin \left[n\theta + J_\psi^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) \right] \right\}, \quad (14)$$

де функціонали $J_A^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, $J_B^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, $J_m^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ та $J_\psi^{(n)}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ як функції впорядкованих четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ з чотиривимірного простору розраховуються за співвідношеннями (8) – (13).

Скориставшись системою комп'ютерної математики Mathcad, проведемо розрахунок окремих спектральних характеристик та їх візуалізацію.

Розрахунок спектральних характеристик чотиривимірних 2π -періодичних функцій за умови рівності нулю середньарифметичного значення зазначених функцій

На рис. 2 наведено лістинг фрагменту програм в середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad, за допомогою яких розраховано окремі спектральні характеристики чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$ для всіх (!) (з дискретної множини значень) впорядкованих

четвірок $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ чотиривимірного простору параметричної області визначення 2π -періодичних функцій, підпорядкованих умовам (2) та (3).

```

A1(α1, β1, α2, β2) := 1/(4·π) · [cos(2·α1) + cos(2·α2) - cos[2·(α1 + β1)] - cos[2·(α2 + β2)]]
B1(α1, β1, α2, β2) := 1/(4·π) · [2·(β1 + β2) + sin(2·α1) + sin(2·α2) - sin[2·(α1 + β1)] - sin[2·(α2 + β2)]]
A(n, α1, β1, α2, β2) := 1/(2·π) · [1/(n-1) · [cos[(n-1)·(α1 + β1)] - (-1)^n · cos[(n-1)·(α2 + β2)] - cos[(n-1)·α1] + (-1)^n · cos[(n-1)·α2]] - 1/(n+1) · [cos[(n+1)·(α1 + β1)] - (-1)^n · cos[(n+1)·(α2 + β2)] - cos[(n+1)·α1] + (-1)^n · cos[(n+1)·α2]]]
B(n, α1, β1, α2, β2) := 1/(2·π) · [1/(n-1) · [sin[(n-1)·(α1 + β1)] - (-1)^n · sin[(n-1)·(α2 + β2)] - sin[(n-1)·α1] + (-1)^n · sin[(n-1)·α2]] - 1/(n+1) · [sin[(n+1)·(α1 + β1)] - (-1)^n · sin[(n+1)·(α2 + β2)] - sin[(n+1)·α1] + (-1)^n · sin[(n+1)·α2]]]

Um(n) := for i1 ∈ 1..rows(U00)
  Ma_i1,1 ← A1(U00_i1,1, U00_i1,2, U00_i1,3, U00_i1,4)
  Mb_i1,1 ← B1(U00_i1,1, U00_i1,2, U00_i1,3, U00_i1,4)
  Um_i1,1 ← √(Ma_i1,1)^2 + (Mb_i1,1)^2
  for i2 ∈ 2..n
    Ma_i1,i2 ← A(i2, U00_i1,1, U00_i1,2, U00_i1,3, U00_i1,4)
    Mb_i1,i2 ← B(i2, U00_i1,1, U00_i1,2, U00_i1,3, U00_i1,4)
    Um_i1,i2 ← √(Ma_i1,i2)^2 + (Mb_i1,i2)^2
  return Um

UmO(n) := for i1 ∈ 1..rows(U00)
  MaO_i1,1 ← A1(U00_i1,1, π - U00_i1,1, U00_i1,1, π - U00_i1,1)
  MbO_i1,1 ← B1(U00_i1,1, π - U00_i1,1, U00_i1,1, π - U00_i1,1)
  UmO_i1,1 ← √(MaO_i1,1)^2 + (MbO_i1,1)^2
  for i2 ∈ 2..n
    MaO_i1,i2 ← A(i2, U00_i1,1, π - U00_i1,1, U00_i1,1, π - U00_i1,1)
    MbO_i1,i2 ← B(i2, U00_i1,1, π - U00_i1,1, U00_i1,1, π - U00_i1,1)
    UmO_i1,i2 ← √(MaO_i1,i2)^2 + (MbO_i1,i2)^2
  return UmO
  
```

Рис. 2. Лістинг фрагменту програм в середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad, за допомогою яких розраховано спектральні характеристики чотиривимірних 2π -періодичних функцій

На рис. 3 та рис. 4 представлені результати розрахунку амплітудно-частотних спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$3.763 \cdot 10^{-3}$	0	$3.758 \cdot 10^{-3}$	0	$3.749 \cdot 10^{-3}$	0	$3.735 \cdot 10^{-3}$	0	$3.716 \cdot 10^{-3}$	0
2	$3.762 \cdot 10^{-3}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$	$3.75 \cdot 10^{-3}$	$3.69 \cdot 10^{-4}$	$3.725 \cdot 10^{-3}$	$5.511 \cdot 10^{-4}$	$3.688 \cdot 10^{-3}$	$7.304 \cdot 10^{-4}$	$3.638 \cdot 10^{-3}$	$9.059 \cdot 10^{-4}$
3	$3.758 \cdot 10^{-3}$	$3.972 \cdot 10^{-4}$	$3.713 \cdot 10^{-3}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$	$3.624 \cdot 10^{-3}$	$1.17 \cdot 10^{-3}$	$3.492 \cdot 10^{-3}$	$1.536 \cdot 10^{-3}$	$3.319 \cdot 10^{-3}$	$1.88 \cdot 10^{-3}$
4	$3.751 \cdot 10^{-3}$	$6.185 \cdot 10^{-4}$	$3.646 \cdot 10^{-3}$	$1.219 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-3}$	$1.783 \cdot 10^{-3}$	$3.139 \cdot 10^{-3}$	$2.296 \cdot 10^{-3}$	$2.752 \cdot 10^{-3}$	$2.741 \cdot 10^{-3}$
5	$3.739 \cdot 10^{-3}$	$8.424 \cdot 10^{-4}$	$3.547 \cdot 10^{-3}$	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$3.173 \cdot 10^{-3}$	$2.352 \cdot 10^{-3}$	$2.637 \cdot 10^{-3}$	$2.939 \cdot 10^{-3}$	$1.969 \cdot 10^{-3}$	$3.373 \cdot 10^{-3}$
6	$3.725 \cdot 10^{-3}$	$1.066 \cdot 10^{-3}$	$3.417 \cdot 10^{-3}$	$2.042 \cdot 10^{-3}$	$2.829 \cdot 10^{-3}$	$2.847 \cdot 10^{-3}$	$2.009 \cdot 10^{-3}$	$3.415 \cdot 10^{-3}$	$1.028 \cdot 10^{-3}$	$3.698 \cdot 10^{-3}$
7	$3.706 \cdot 10^{-3}$	$1.286 \cdot 10^{-3}$	$3.257 \cdot 10^{-3}$	$2.415 \cdot 10^{-3}$	$2.415 \cdot 10^{-3}$	$3.249 \cdot 10^{-3}$	$1.283 \cdot 10^{-3}$	$3.687 \cdot 10^{-3}$	$2.294 \cdot 10^{-5}$	$3.676 \cdot 10^{-3}$
7407	0.954	0.048	0.11	0.057	0.107	0.02	0.057	0.028	0.011	0.049
7408	0.96	0.043	0.097	0.056	0.095	0.031	0.056	0.012	0.015	0.038
7409	0.961	0.041	0.096	0.053	0.095	0.029	0.059	0.012	0.018	0.038
7410	0.962	0.037	0.094	0.048	0.097	0.026	0.064	0.012	0.021	0.037
7411	0.963	0.031	0.092	0.039	0.099	0.021	0.069	0.012	0.024	0.034
7412	0.964	0.022	0.091	0.029	0.102	0.015	0.075	$9.549 \cdot 10^{-3}$	0.028	0.026
22899	0.581	0.074	0.35	0.051	0.101	0.033	0.085	0.068	0.072	0.02
22900	0.581	0.038	0.347	0.024	0.095	0.022	0.106	0.036	0.075	$2.738 \cdot 10^{-3}$
22901	0.58	0	0.336	0	0.094	0	0.114	0	0.065	0
22902	0.494	0.423	$5.501 \cdot 10^{-3}$	0.172	$9.127 \cdot 10^{-3}$	0.105	$3.164 \cdot 10^{-3}$	0.085	0.01	0.059
22903	0.496	0.423	$2.856 \cdot 10^{-3}$	0.173	$7.667 \cdot 10^{-3}$	0.104	$2.802 \cdot 10^{-3}$	0.087	$9.508 \cdot 10^{-3}$	0.058
22904	0.499	0.422	$4.114 \cdot 10^{-3}$	0.175	$6.472 \cdot 10^{-3}$	0.102	$8.292 \cdot 10^{-3}$	0.09	$9.437 \cdot 10^{-3}$	0.055
33597	$3.689 \cdot 10^{-3}$	$1.461 \cdot 10^{-3}$	$3.108 \cdot 10^{-3}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$	$2.039 \cdot 10^{-3}$	$3.492 \cdot 10^{-3}$	$6.536 \cdot 10^{-4}$	$3.743 \cdot 10^{-3}$	$8.289 \cdot 10^{-4}$	$3.404 \cdot 10^{-3}$
33598	$3.711 \cdot 10^{-3}$	$1.237 \cdot 10^{-3}$	$3.296 \cdot 10^{-3}$	$2.335 \cdot 10^{-3}$	$2.513 \cdot 10^{-3}$	$3.168 \cdot 10^{-3}$	$1.453 \cdot 10^{-3}$	$3.645 \cdot 10^{-3}$	$2.365 \cdot 10^{-4}$	$3.712 \cdot 10^{-3}$
33599	$3.729 \cdot 10^{-3}$	$1.008 \cdot 10^{-3}$	$3.454 \cdot 10^{-3}$	$1.94 \cdot 10^{-3}$	$2.926 \cdot 10^{-3}$	$2.726 \cdot 10^{-3}$	$2.184 \cdot 10^{-3}$	$3.309 \cdot 10^{-3}$	$1.285 \cdot 10^{-3}$	$3.646 \cdot 10^{-3}$
33600	$3.743 \cdot 10^{-3}$	$7.72 \cdot 10^{-4}$	$3.581 \cdot 10^{-3}$	$1.51 \cdot 10^{-3}$	$3.265 \cdot 10^{-3}$	$2.18 \cdot 10^{-3}$	$2.809 \cdot 10^{-3}$	$2.753 \cdot 10^{-3}$	$2.235 \cdot 10^{-3}$	$3.205 \cdot 10^{-3}$
33601	$3.754 \cdot 10^{-3}$	$5.299 \cdot 10^{-4}$	$3.676 \cdot 10^{-3}$	$1.048 \cdot 10^{-3}$	$3.523 \cdot 10^{-3}$	$1.543 \cdot 10^{-3}$	$3.298 \cdot 10^{-3}$	$2.004 \cdot 10^{-3}$	$3.006 \cdot 10^{-3}$	$2.421 \cdot 10^{-3}$
33602	$3.761 \cdot 10^{-3}$	$2.781 \cdot 10^{-4}$	$3.737 \cdot 10^{-3}$	$5.54 \cdot 10^{-4}$	$3.69 \cdot 10^{-3}$	$8.254 \cdot 10^{-4}$	$3.62 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-3}$	$3.527 \cdot 10^{-3}$	$1.346 \cdot 10^{-3}$
33603	$3.763 \cdot 10^{-3}$	0	$3.758 \cdot 10^{-3}$	0	$3.749 \cdot 10^{-3}$	0	$3.735 \cdot 10^{-3}$	0	$3.716 \cdot 10^{-3}$...

Рис. 3. Амплітудно-частотний спектр чотиривимірних 2π -періодичних функцій: перші десять гармонік

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	$3.692 \cdot 10^{-3}$	0	$3.664 \cdot 10^{-3}$	0	$3.631 \cdot 10^{-3}$	0	$3.594 \cdot 10^{-3}$	0	$3.552 \cdot 10^{-3}$	0
2	$3.577 \cdot 10^{-3}$	$1.077 \cdot 10^{-3}$	$3.505 \cdot 10^{-3}$	$1.242 \cdot 10^{-3}$	$3.422 \cdot 10^{-3}$	$1.401 \cdot 10^{-3}$	$3.329 \cdot 10^{-3}$	$1.553 \cdot 10^{-3}$	$3.226 \cdot 10^{-3}$	$1.697 \cdot 10^{-3}$
3	$3.108 \cdot 10^{-3}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	$2.862 \cdot 10^{-3}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$2.584 \cdot 10^{-3}$	$2.748 \cdot 10^{-3}$	$2.28 \cdot 10^{-3}$	$2.97 \cdot 10^{-3}$	$1.952 \cdot 10^{-3}$	$3.153 \cdot 10^{-3}$
4	$2.291 \cdot 10^{-3}$	$3.107 \cdot 10^{-3}$	$1.77 \cdot 10^{-3}$	$3.384 \cdot 10^{-3}$	$1.205 \cdot 10^{-3}$	$3.564 \cdot 10^{-3}$	$6.161 \cdot 10^{-4}$	$3.642 \cdot 10^{-3}$	$9.16 \cdot 10^{-5}$	$3.619 \cdot 10^{-3}$
5	$1.204 \cdot 10^{-3}$	$3.631 \cdot 10^{-3}$	$3.849 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$4.549 \cdot 10^{-4}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$	$1.254 \cdot 10^{-3}$	$3.278 \cdot 10^{-3}$	$1.982 \cdot 10^{-3}$	$2.813 \cdot 10^{-3}$
6	$4.633 \cdot 10^{-5}$	$3.675 \cdot 10^{-3}$	$1.082 \cdot 10^{-3}$	$3.351 \cdot 10^{-3}$	$2.033 \cdot 10^{-3}$	$2.754 \cdot 10^{-3}$	$2.807 \cdot 10^{-3}$	$1.939 \cdot 10^{-3}$	$3.343 \cdot 10^{-3}$	$9.784 \cdot 10^{-4}$
7	$1.272 \cdot 10^{-3}$	$3.222 \cdot 10^{-3}$	$2.383 \cdot 10^{-3}$	$2.383 \cdot 10^{-3}$	$3.197 \cdot 10^{-3}$	$1.266 \cdot 10^{-3}$	$3.618 \cdot 10^{-3}$	$9.045 \cdot 10^{-5}$	$3.598 \cdot 10^{-3}$	$1.243 \cdot 10^{-3}$
7407	0.022	0.029	0.011	0.01	$7.508 \cdot 10^{-3}$	0.031	0.01	0.024	$7.441 \cdot 10^{-3}$	$8.748 \cdot 10^{-3}$
7408	0.022	0.035	0.018	0.014	$4.243 \cdot 10^{-3}$	0.021	0.012	0.024	$7.23 \cdot 10^{-3}$	0.011
7409	0.021	0.036	0.018	0.013	$2.144 \cdot 10^{-3}$	0.019	0.011	0.024	$8.875 \cdot 10^{-3}$	0.014
7410	0.018	0.035	0.019	0.011	$4.69 \cdot 10^{-3}$	0.018	$9.262 \cdot 10^{-3}$	0.027	$9.56 \cdot 10^{-3}$	0.017
7411	0.016	0.031	0.023	$8.117 \cdot 10^{-3}$	0.013	0.018	$6.518 \cdot 10^{-3}$	0.028	$9.154 \cdot 10^{-3}$	0.018
7412	0.015	0.024	0.03	$4.928 \cdot 10^{-3}$	0.022	0.016	$5.905 \cdot 10^{-3}$	0.025	0.01	0.015
22899	0.042	0.046	0.027	0.045	0.037	0.023	0.018	0.037	0.014	0.033
22900	0.046	0.033	0.053	0.022	0.036	0.018	0.031	0.03	0.031	$8.596 \cdot 10^{-3}$
22901	0.061	0	0.056	0	0.035	0	0.047	0	0.025	0
22902	$7.888 \cdot 10^{-4}$	0.058	0.01	0.04	$1.469 \cdot 10^{-3}$	0.044	$9.479 \cdot 10^{-3}$	0.031	$3.366 \cdot 10^{-3}$	0.035
22903	$3.715 \cdot 10^{-3}$	0.06	0.01	0.039	$3.825 \cdot 10^{-3}$	0.046	$9.236 \cdot 10^{-3}$	0.03	$3.036 \cdot 10^{-3}$	0.036
22904	$9.835 \cdot 10^{-3}$	0.063	$9.485 \cdot 10^{-3}$	0.037	$8.46 \cdot 10^{-3}$	0.048	$6.891 \cdot 10^{-3}$	0.03	$4.957 \cdot 10^{-3}$	0.036
33597	$2.172 \cdot 10^{-3}$	$2.534 \cdot 10^{-3}$	$3.164 \cdot 10^{-3}$	$1.273 \cdot 10^{-3}$	$3.652 \cdot 10^{-3}$	$1.907 \cdot 10^{-4}$	$3.564 \cdot 10^{-3}$	$1.584 \cdot 10^{-3}$	$2.919 \cdot 10^{-3}$	$2.725 \cdot 10^{-3}$
33598	$1.002 \cdot 10^{-3}$	$3.365 \cdot 10^{-3}$	$2.117 \cdot 10^{-3}$	$2.647 \cdot 10^{-3}$	$2.987 \cdot 10^{-3}$	$1.641 \cdot 10^{-3}$	$3.517 \cdot 10^{-3}$	$4.708 \cdot 10^{-4}$	$3.649 \cdot 10^{-3}$	$7.607 \cdot 10^{-4}$
33599	$2.987 \cdot 10^{-4}$	$3.712 \cdot 10^{-3}$	$7.067 \cdot 10^{-4}$	$3.506 \cdot 10^{-3}$	$1.648 \cdot 10^{-3}$	$3.045 \cdot 10^{-3}$	$2.459 \cdot 10^{-3}$	$2.366 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-3}$	$1.524 \cdot 10^{-3}$
33600	$1.567 \cdot 10^{-3}$	$3.515 \cdot 10^{-3}$	$8.383 \cdot 10^{-4}$	$3.671 \cdot 10^{-3}$	$9.813 \cdot 10^{-5}$	$3.668 \cdot 10^{-3}$	$6.804 \cdot 10^{-4}$	$3.508 \cdot 10^{-3}$	$1.395 \cdot 10^{-3}$	$3.199 \cdot 10^{-3}$
33601	$2.654 \cdot 10^{-3}$	$2.785 \cdot 10^{-3}$	$2.25 \cdot 10^{-3}$	$3.088 \cdot 10^{-3}$	$1.804 \cdot 10^{-3}$	$3.325 \cdot 10^{-3}$	$1.327 \cdot 10^{-3}$	$3.49 \cdot 10^{-3}$	$8.31 \cdot 10^{-4}$	$3.582 \cdot 10^{-3}$
33602	$3.413 \cdot 10^{-3}$	$1.592 \cdot 10^{-3}$	$3.279 \cdot 10^{-3}$	$1.825 \cdot 10^{-3}$	$3.125 \cdot 10^{-3}$	$2.044 \cdot 10^{-3}$	$2.954 \cdot 10^{-3}$	$2.246 \cdot 10^{-3}$	$2.767 \cdot 10^{-3}$	$2.432 \cdot 10^{-3}$
33603	$3.692 \cdot 10^{-3}$	0	$3.664 \cdot 10^{-3}$	0	$3.631 \cdot 10^{-3}$	0	$3.594 \cdot 10^{-3}$	0	$3.552 \cdot 10^{-3}$...

Рис. 4. Амплітудно-частотний спектр чотиривимірних 2π -періодичних функцій: вищі гармоніки (з 11-ої по 20-ту)

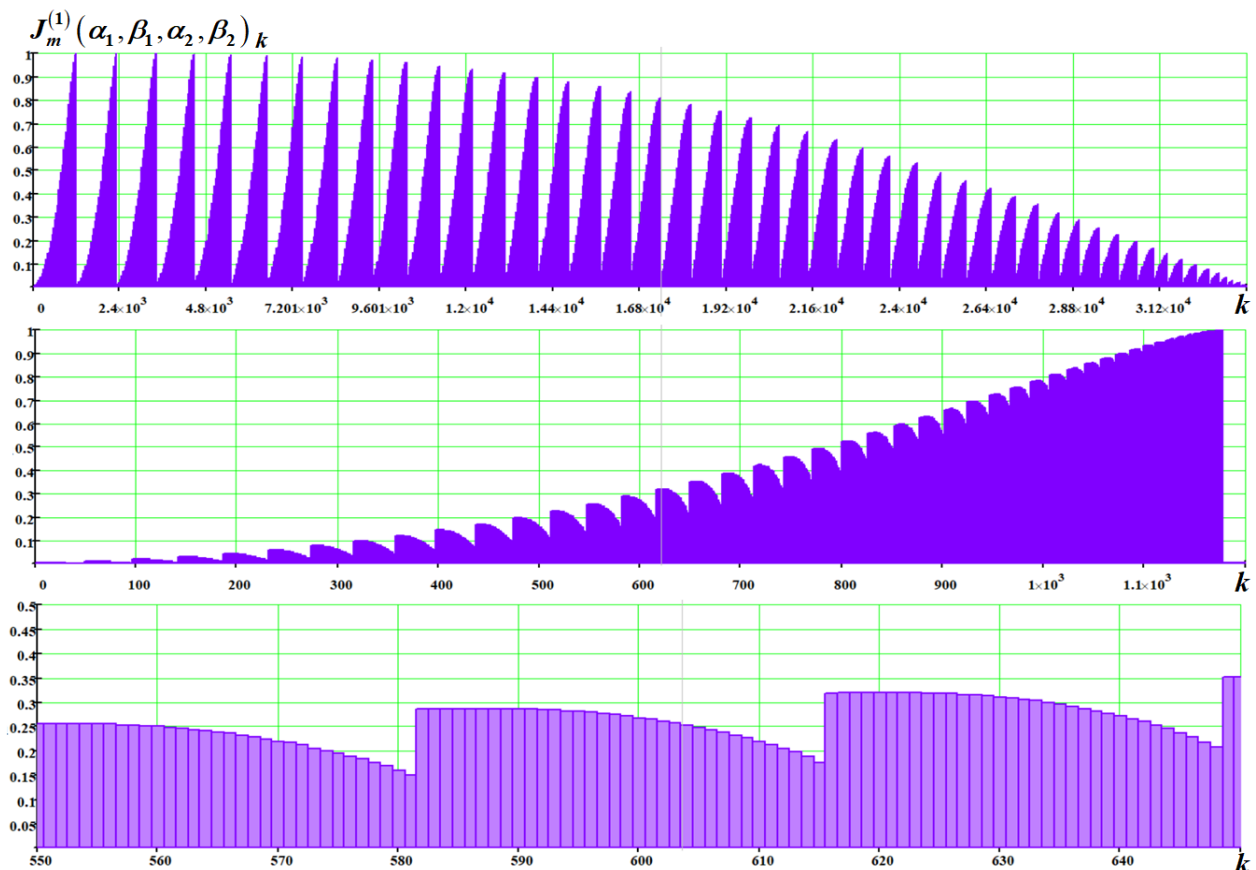


Рис. 5. Графіки залежності амплітуди першої гармоніки чотиривимірних 2π -періодичних функцій від значень впорядкованих четвірок з багатовимірного простору параметричної області їх визначення

На рис. 5 побудовані графіки залежності амплітуд *першої* гармоніки *чотиривимірних* 2π -періодичних функцій в залежності від значень впорядкованих четвірок з багатовимірного простору параметричної області їх визначення, а на рис. 6 - рис. 9 – *вищих* (з другої по сьому відповідно).

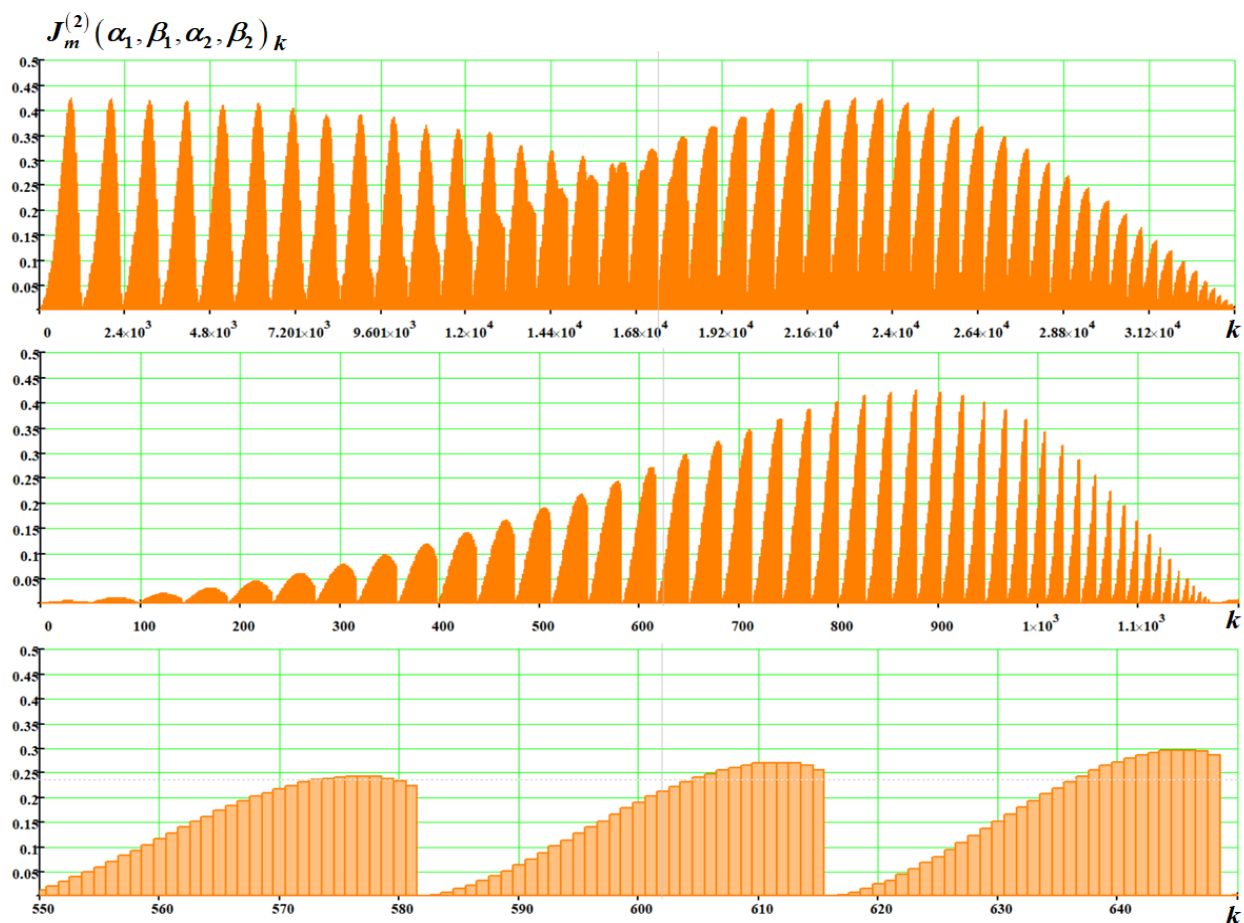


Рис. 6. Графіки залежності амплітуди *другої* гармоніки *чотиривимірних* 2π -періодичних функцій від значень впорядкованих четвірок з багатовимірного простору параметричної області їх визначення

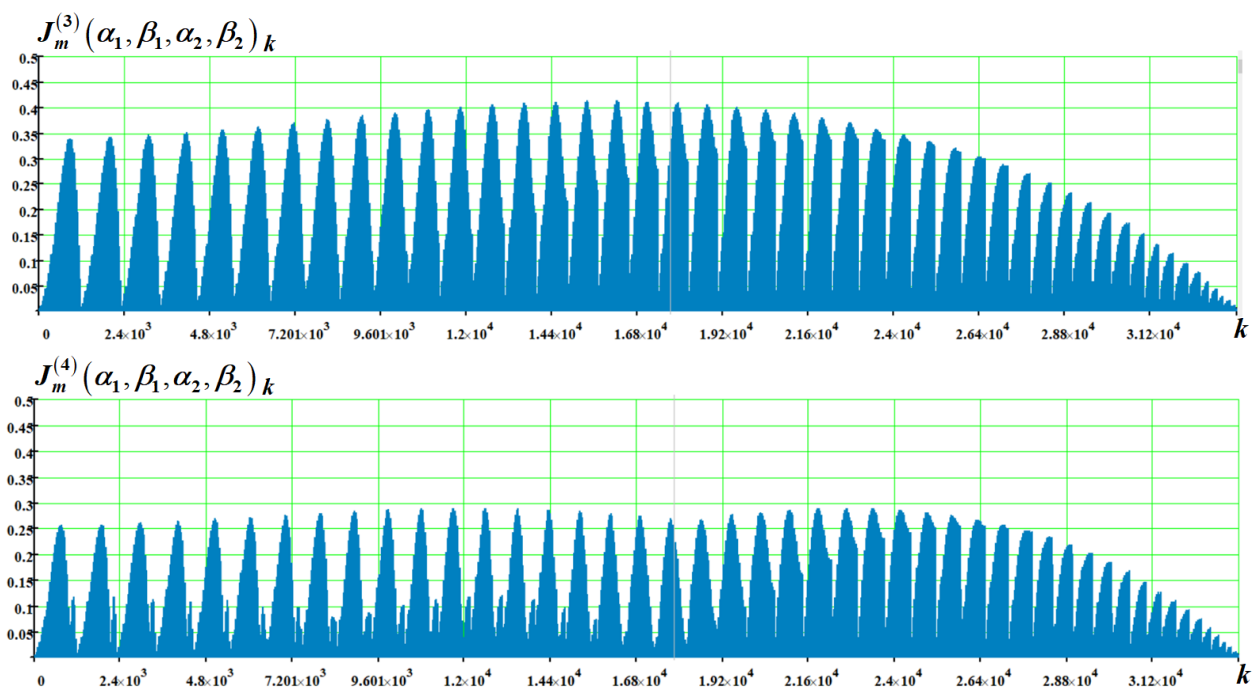


Рис. 7. Графіки залежності амплітуд *третьої* і *четвертої* гармонік від значень впорядкованих четвірок

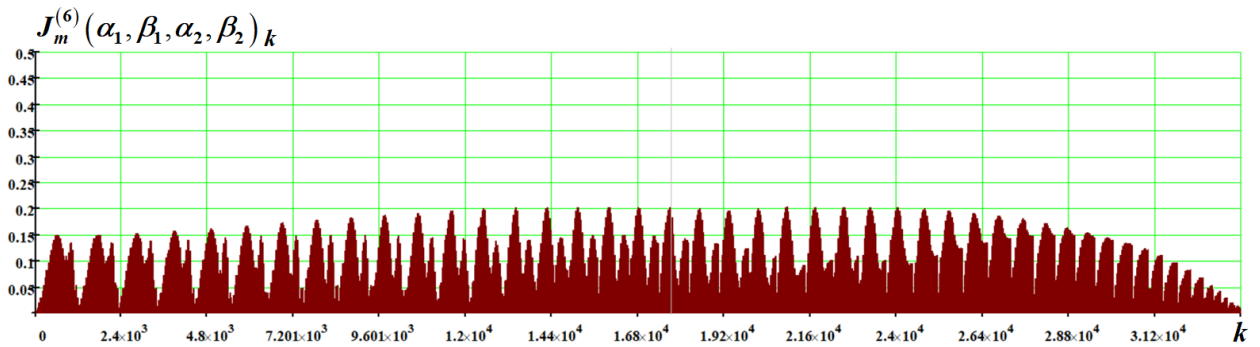
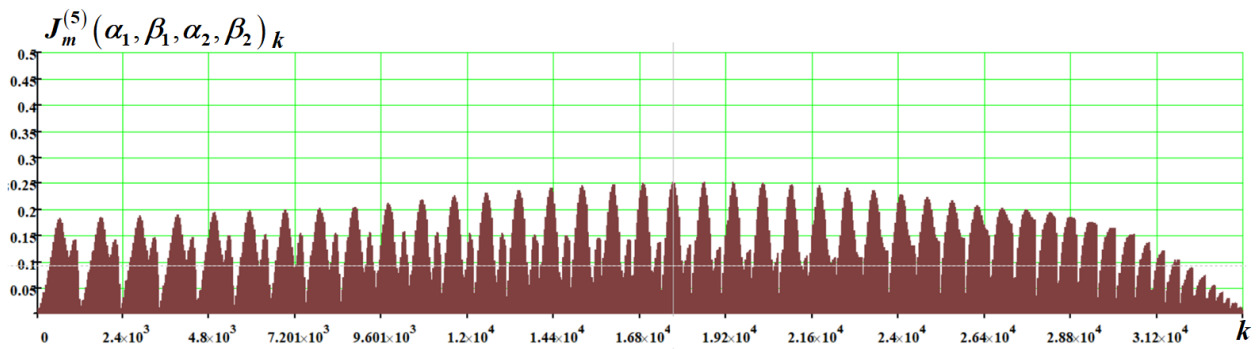


Рис. 8. Графіки залежності амплітуд *n*'ятої та шостої гармонік від значень впорядкованих четвірок

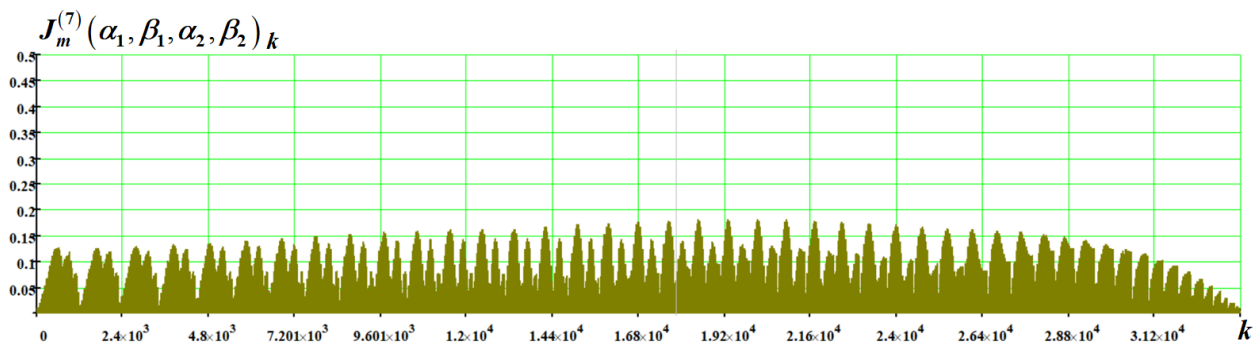


Рис. 9. Графіки залежності амплітуди сьомої гармоніки чотиривимірних 2π -періодичних функцій від значень впорядкованих четвірок з багатовимірного простору параметричної області їх визначення

На рис. 10 - рис. 12 побудовані часові діаграми та у відносних одиницях амплітудно-частотні спектри чотиривимірних 2π -періодичних функцій за окремих значень впорядкованих четвірок з багатовимірного простору параметричної області визначення зазначених функцій:

- $(\alpha_1 = 21,6^\circ; \beta_1 = 50,4^\circ; \alpha_2 = 100,8^\circ; \beta_2 = 43,1^\circ)$ (рис. 10);
- $(\alpha_1 = 43,2^\circ; \beta_1 = 93,6^\circ; \alpha_2 = 43,2^\circ; \beta_2 = 93,6^\circ)$ (рис. 11);
- $(\alpha_1 = 68,4^\circ; \beta_1 = 72,0^\circ; \alpha_2 = 57,6^\circ; \beta_2 = 69,5^\circ)$ (рис. 12).

В середовищі системи комп'ютерної математики Mathcad сформовано тривимірні графічні структури представлених у відносних одиницях амплітудно-частотних спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій основної та вищих гармонік як на окремих ділянках параметричної області їх визначення, так і на всій області визначення, де впорядковані четвірки з чотиривимірного параметричного простору задовольняють умови (2) і (3) (рис. 13 - рис.15), зокрема :

- $\{(\alpha_1 = 18,0^\circ; \beta_1 = 46,8^\circ; \alpha_2 = 93,6^\circ; \beta_2 = 32,4^\circ); \dots; (\alpha_1 = 18,0^\circ; \beta_1 = 54,0^\circ; \alpha_2 = 46,8^\circ; \beta_2 = 40,8^\circ)\}$;
- $\{(\alpha_1 = 0^\circ; \beta_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 0^\circ; \beta_2 = 0^\circ); \dots; (\alpha_1 = 3,6^\circ; \beta_1 = 108,0^\circ; \alpha_2 = 50,4^\circ; \beta_2 = 86,4^\circ)\}$;
- $\{(\alpha_1 = 0^\circ; \beta_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 0^\circ; \beta_2 = 0^\circ); \dots; (\alpha_1 = 18^\circ; \beta_1 = 54,0^\circ; \alpha_2 = 46,8^\circ; \beta_2 = 40,8^\circ)\}$.

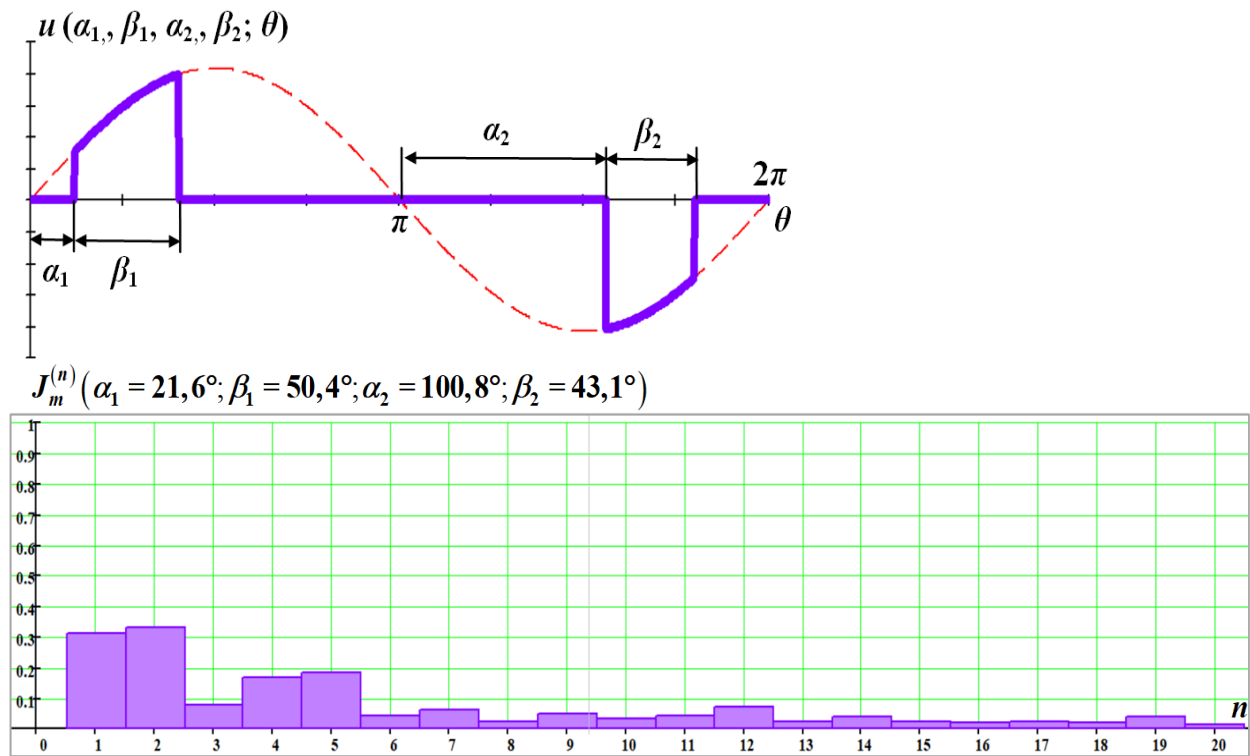


Рис. 10. Часова діаграма та представлений у відносних одиницях амплітудно-частотний спектр чотиривимірної 2π -періодичної функції з параметричними координатами впорядкованої четвірки $(\alpha_1 = 21,6^\circ; \beta_1 = 50,4^\circ; \alpha_2 = 100,8^\circ; \beta_2 = 43,1^\circ)$

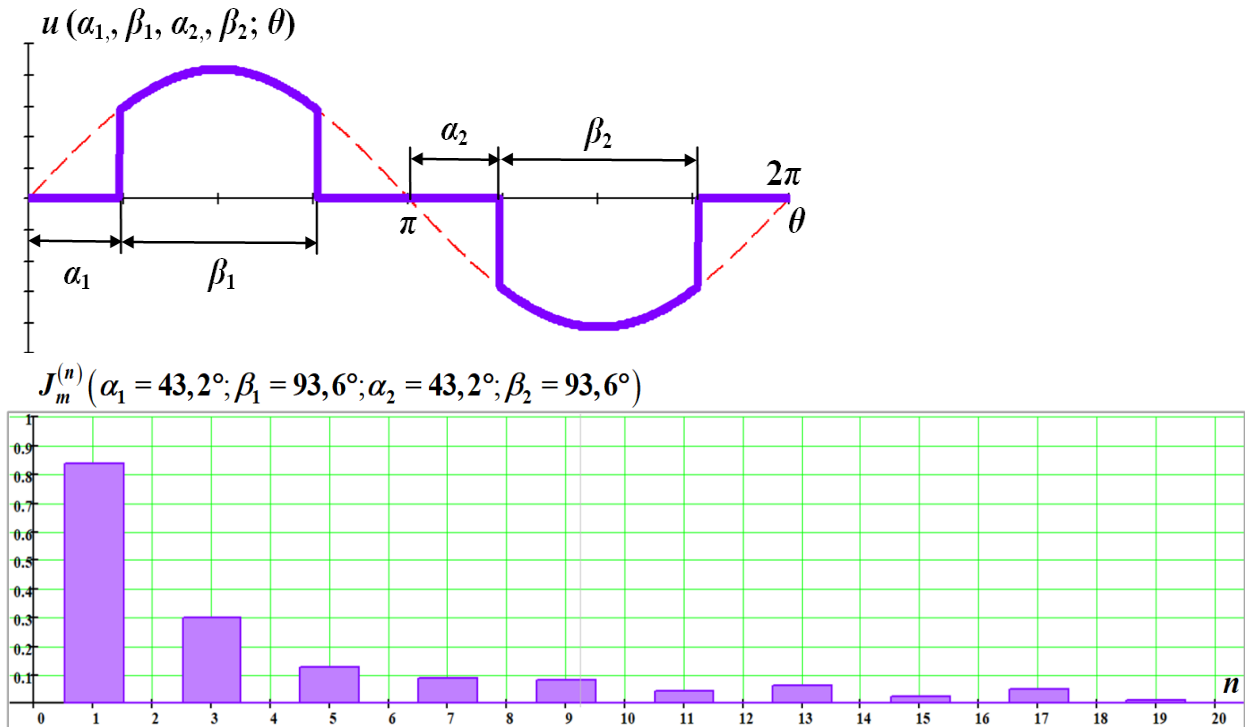


Рис. 11. Часова діаграма та представлений у відносних одиницях амплітудно-частотний спектр чотиривимірної 2π -періодичної функції з параметричними координатами впорядкованої четвірки $(\alpha_1 = 43,2^\circ; \beta_1 = 93,6^\circ; \alpha_2 = 43,2^\circ; \beta_2 = 93,6^\circ)$

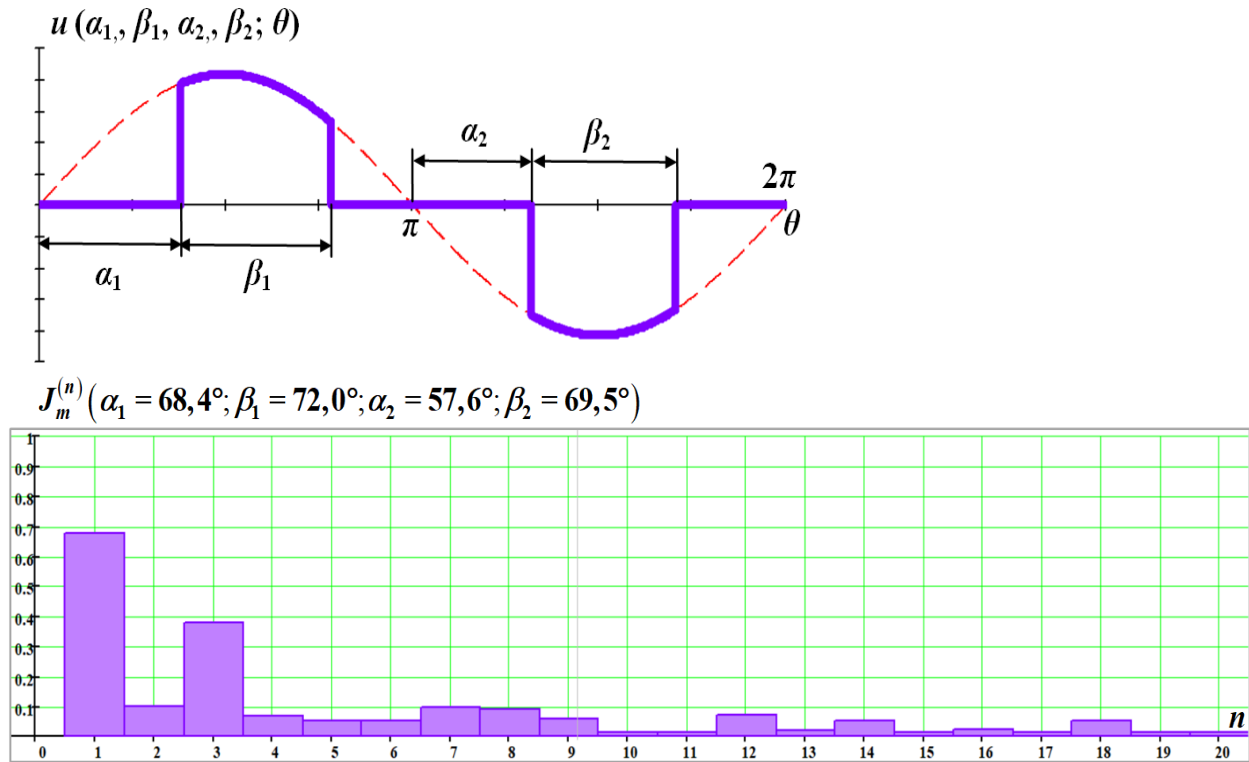


Рис. 12. Часова діаграма та представлений у відносних одиницях амплітудно-частотний спектр чотиривимірної 2π -періодичної функції з параметричними координатами впорядкованої четвірки $(\alpha_1 = 68,4^\circ; \beta_1 = 72,0^\circ; \alpha_2 = 57,6^\circ; \beta_2 = 69,5^\circ)$

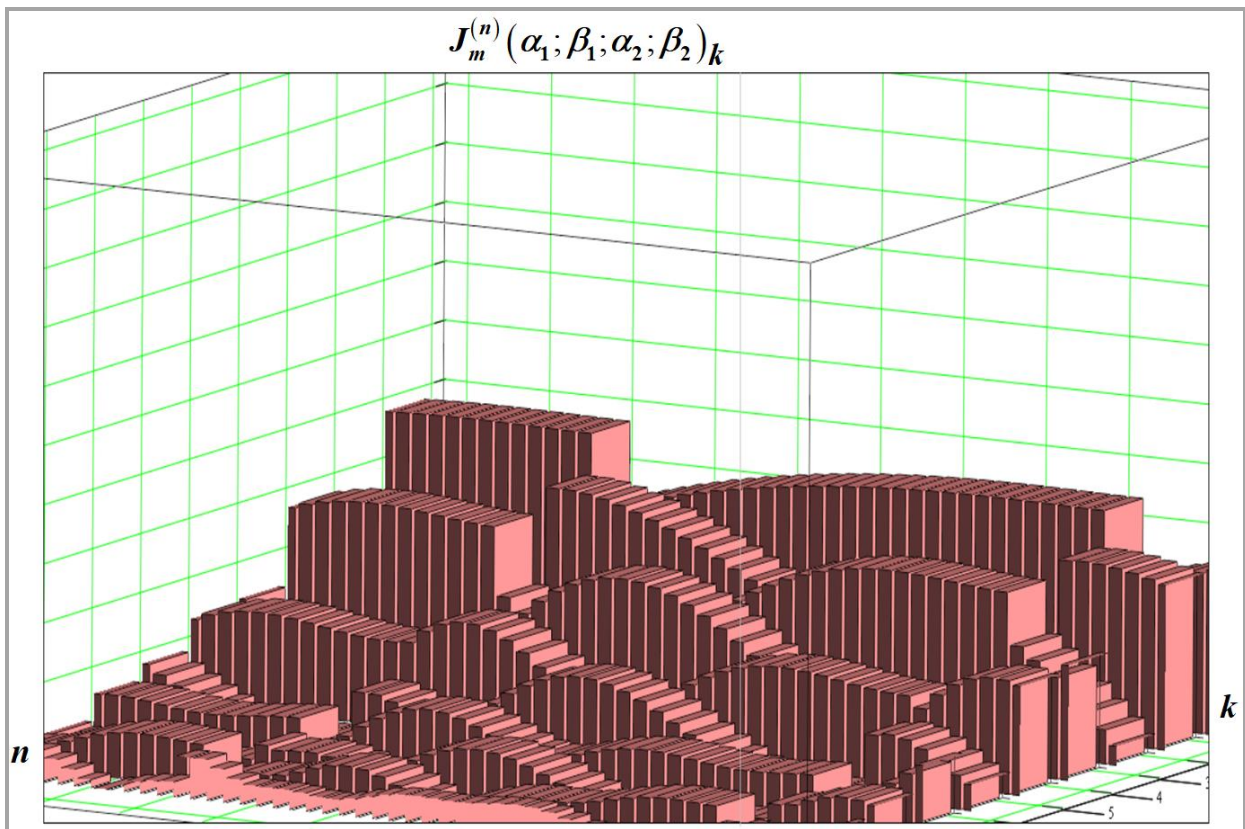


Рис. 13. Тривимірні графіки представлених у відносних одиницях амплітудно-частотних спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій основної та вищих гармонік в параметричній області

$$\{(\alpha_1 = 18,0^\circ; \beta_1 = 46,8^\circ; \alpha_2 = 93,6^\circ; \beta_2 = 32,4^\circ); \dots; (\alpha_1 = 18,0^\circ; \beta_1 = 54,0^\circ; \alpha_2 = 46,8^\circ; \beta_2 = 40,8^\circ)\}$$

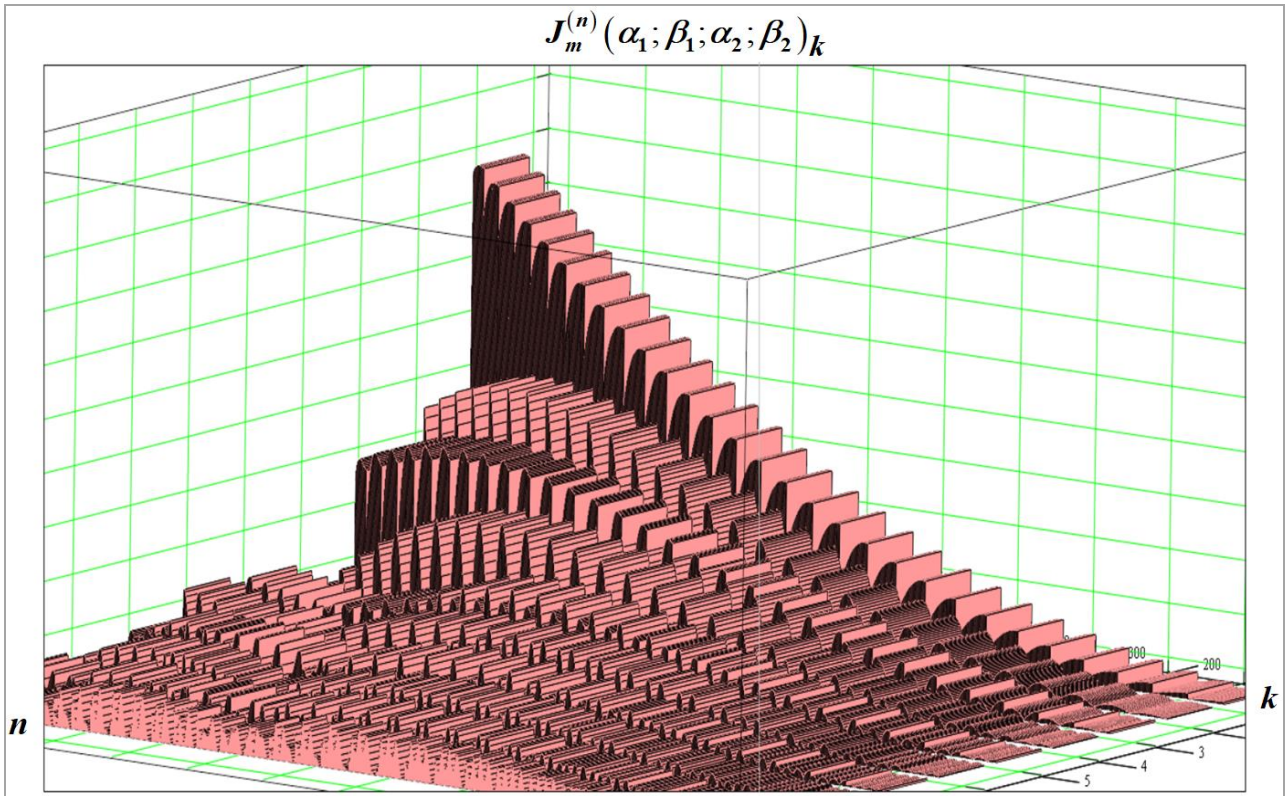


Рис. 14. Тривимірні графіки представлених у відносних одиницях амплітудно-частотних спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій основної та вищих гармонік в параметричній області

$$\{(\alpha_1 = 0^\circ; \beta_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 0^\circ; \beta_2 = 0^\circ); \dots; (\alpha_1 = 3,6^\circ; \beta_1 = 108,0^\circ; \alpha_2 = 50,4^\circ; \beta_2 = 86,4^\circ)\}$$

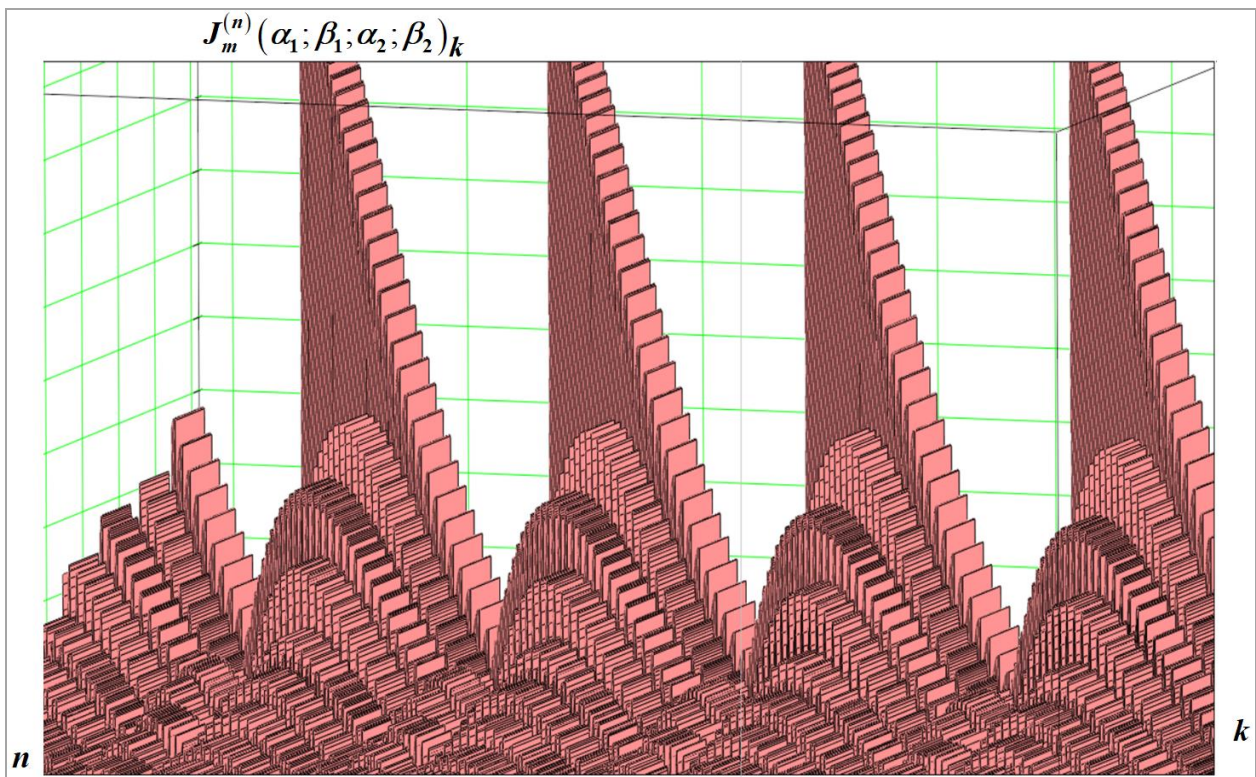


Рис. 15. Тривимірні графіки представлених у відносних одиницях амплітудно-частотних спектрів чотиривимірних 2π -періодичних функцій основної та вищих гармонік в параметричній області

$$\{(\alpha_1 = 0^\circ; \beta_1 = 0^\circ; \alpha_2 = 0^\circ; \beta_2 = 0^\circ); \dots; (\alpha_1 = 18,0^\circ; \beta_1 = 54,0^\circ; \alpha_2 = 46,8^\circ; \beta_2 = 40,8^\circ)\}$$

Фрагмент повної проекції параметричної області визначення *чотиривимірних* 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, за умови рівності нулю на періоді інтегралів цих функцій $\int_0^{2\pi} u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta) d\theta = 0$, у тривимірний простір $(\beta_1, \alpha_2, \beta_2)$, на впорядкованих четвінках якого проведено спектральний аналіз, показаний на рис. 16.

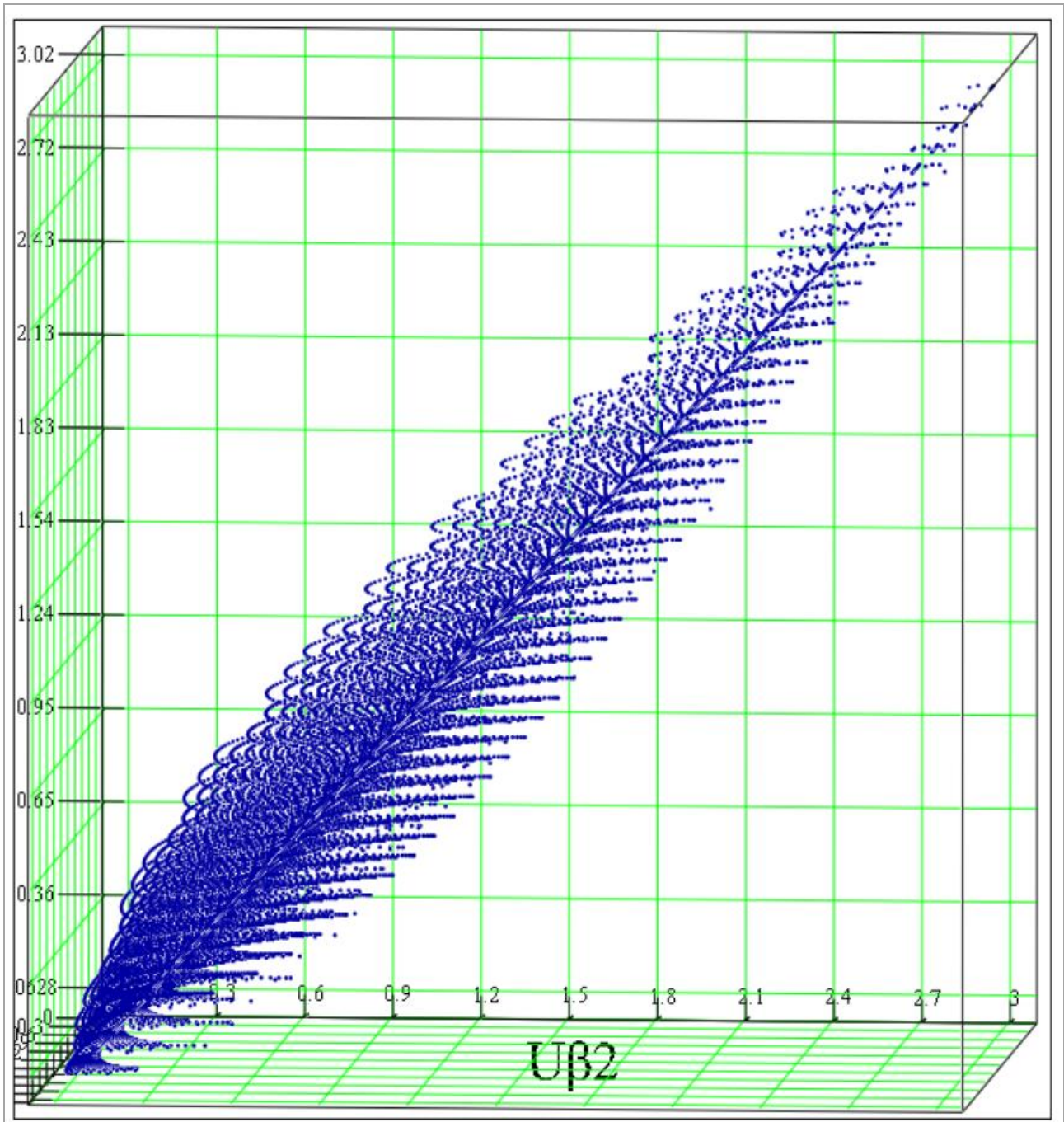


Рис. 16. Повне графічне відображення проекції в тривимірний простір $(\beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ параметричної області визначення чотиривимірних 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, побудованих над полями значень тригонометричних синуса або косинуса, за умови рівності нулю на періоді їх інтегралів, на впорядкованих четвінках $(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2)$ якого проводився спектральний аналіз

Висновки

В роботі проведено спектральний аналіз *чотиривимірних* 2π -періодичних функцій $u(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2; \theta)$, які побудовано над полями значень тригонометричних синуса або косинуса в закритому системою нерівностей чотиривимірному просторі параметричної області їх визначення за умов рівності на періоді нулю інтегралів цих функцій за змінною кута θ (або часу t).

Розв'язування такої задачі в *узагальненому* вигляді допоки відсутнє.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 1 / В. І. Сенько, М. В. Панащенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2012 р. – 640 с.
2. Електроніка і мікросхемотехніка. Силова електроніка. Том 4. Кн. 2 / В. І. Сенько, М. В. Панащенко, Є. В. Сенько, М. М. Юрченко, Л. І. Сенько, В. В. Ясинський. – Київ: «Каравела», 2013 р. – 316 с.
3. Robert W. Erickson, Dragan Maksimovic. Fundamentals of Power Electronics. – 2020.
4. Rashid M. Power electronics. Handbook. – 2017.
5. Sudipta Chakraborty, Marcelo G. Simões, William E. Kramer. Power Electronics for Renewable and Distributed Energy Systems. A Sourcebook of Topologies, Control and Integration. – 2020.
6. Промислова електроніка / В. С. Руденко, В. Я. Ромашко, В. В. Трифонюк. – Київ: Либідь, 1993 р. – 432 с.
7. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Каців, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
8. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навч. посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.
9. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довірного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Випуск 2. — С. 63-69.
10. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11. – Режим доступу: <https://praci.vntu.edu.ua/index.php/praci/article/view/547/532>.
11. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло і фізичне явище гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2016. — Випуск 4. — С. 207-213.
12. Ведміцький Ю. Г. Узагальнене електричне коло з урахуванням фізичного явища гіпервалентної взаємодії / Ю. Г. Ведміцький // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький. — №2(58). — 2017. — С. 29-36.
13. Ведміцький Ю. Г. Контроль моменту інерції на основі удосконаленої теорії електродинамічних аналогій : монографія / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. — Вінниця : ВНТУ, 2015. — 196 с.
14. Ведміцький Ю. Г. Вимірювальне перетворення і контроль моменту інерції механічних та електромеханічних систем в процесі їх експлуатації. Теорія і практика / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Хмельницького національного університету. — 2008. — №4(113). — С. 47-55.
15. Ведміцький Ю. Г. Елементи теорії електродинамічного моделювання вимірювального перетворення і контролю моменту інерції. Проблематика, динамічні аналогії та принцип дуальності / Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — 2008. — №5 (80). — С. 25-30.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net