УДК 621.3

Ю. Г. Ведміцький

ТЕЛЕГРАФНІ РІВНЯННЯ ТРИПРОВІДНОЇ ДОВГОЇ ЛІНІЇ (БЕЗ УРАХУВАННЯ ВПЛИВУ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ)

Вінницький національний технічний університет

Анотація

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються в трипровідній довгій лінії – одновимірній електричній системі з розподіленими параметрами і побудовано систему диференціальних рівнянь в частинних похідних, які за історичною традицією названо телеграфними.

Отримані результати є математичним підґрунтям для подальшого розв'язування задач аналізу та синтезу трипровідних електричних кіл з розподіленими параметрами як в усталених режимах роботи, так і перехідних процесах в них. Зазначене стосується трифазних ліній електропередач електричної енергії, ліній зв'язку, високочастотних радіотехнічних, телевізійних, інформаційних систем, а також електромеханічних систем та трансформаторів у разі дії на них імпульсних струмів і напруг, тощо.

Ключові слова: теоретична електротехніка, електричне коло з розподіленими параметрами, трипровідна довга лінія, електромагнітна хвиля, простір, час, диференціальні рівняння в частинних похідних, телеграфні рівняння, миттєві напруги, струми

Abstract

The article provides a mathematical identification of physical processes observed in a three-wire long line - a one-dimensional electrical system with distributed parameters, builds a system of differential equations in partial derivatives, which, according to historical tradition, are called telegraphic equations.

The obtained results are a mathematical basis for further solving the problems of analysis and synthesis of three-wire electric circuits with distributed parameters both in stable modes of operation and transient processes in them. This applies to three-phase electric power transmission lines, communication lines, high-frequency radio engineering, television, information systems, as well as electromechanical systems and transformers in the event of impulse currents and voltages acting on them, etc.

Keywords: theoretical electrical engineering, electric circuit with distributed parameters, three-wire long line, electromagnetic wave, space, time, differential equations in partial derivatives, telegraph equations, instantaneous voltages, currents

Пролог

Як відомо, всі, без винятку, електричні кола – зокрема і електроенергетичні, і інформаційні – є системами з *розподіленими* параметрами [1-6], в яких енергетична активність фізичних явищ електромагнітної природи, а також елементи електричного кола (активні опори, провідності, індуктивності, ємності), що таку природу характеризують відповідними параметрами, не мають обмеженої локації ні за місцем їх вияву, ні за визначенням встановлених меж. Таким фізичним явищам в технічних системах притаманний *просторовий* розподіл, однак який водночас є змінним зазвичай не тільки у просторі, але і у *часі*.

Проте в багатьох випадках для спрощення розв'язування основних задач теоретичної електротехніки (аналізу і синтезу) всі враховані вияви електромагнітної енергетичної активності *штучно* (!) обмежують місцерозташуванням елементів електричного кола, *зосереджуючи* в них водночас і пов'язані з ними електромагнітні явища, і параметри, які ці явища характеризують та описують.

Оскільки отримані результати за такого підходу є *наближеними*, постає питання щодо критеріїв його допустимості.

З урахуванням домінування *хвильового характеру* електромагнітного вияву енергетичної активності (в усіх випадках під час перехідних процесів і в переважній більшості випадків за усталених режимів роботи) важливого значення набуває геометричне співвідношення між довжиною електромагнітної хвилі λ та розмірами власне електричного кола l, ділянками якого та поширюється. Якщо тільки геометричні розміри останнього суттєво поступатимуться цій довжині електромагнітної хвилі $(l \ll \lambda)$, то наближений (як наслідок) характер отриманих результатів зі збереженням позитивного ефекту від штучно уведеної простоти *не спотворюватиме* (!) адекватної фізичній реальності картини її сприйняття.

Одначе! У випадках порушення цієї умови розподілена у просторі енергетична активність фізичних явищ електромагнітного походження, що зумовлена спільною силовою дією в загальному випадку багатьох джерел електричної енергії, внаслідок обмеженої швидкістю світла швидкості поширення електромагнітної хвилі вздовж ділянок електричного кола *не водночас* (!) виявлятиме в цьому ж *просторі* (!) свої послідовні зміни. Тому наближене припущення щодо *миттєвого* поширення електромагнітної хвилі, а також енергії, що нею переноситься, яке допустиме за умови $l \ll \lambda$, за інших умов, коли $l \sim \lambda$, $l \geq \lambda$ або $l \gg \lambda$, вочевидь виявлятиме свою *нікчемність* (!) і неминуче призведе до суттєвого спотворення сприйняття фізичної реальності в наразі досліджуваних технічних системах. *Хвильова природа* беззастережно домінуватиме.

Зазначена обставина не може бути проігнорована ані методами розв'язування поставлених задач, ані істотними положеннями вихідного базису теорії електричних кіл в цілому. І ті, і інші потребують більш точної математичної ідентифікації.

Відтак в електричних колах з розподіленими параметрами всі фізичні величини, які сукупно визначають рух (еволюцію) динамічної системи під дією зовнішніх сил, у разі їх математичної ідентифікації виявляють себе як функції не тільки *часу*, але і *просторових координат*. Однієї, двох чи ж бо трьох – це залежить від розмірності просторово розподіленої електричної системи. Зазначене стосується і як фізичних величин *диференціального* походження – векторів густин струмів, напруженостей, індукцій електричної та магнітної компонент електромагнітного поля, так і їх *інтегральних* реалізацій – миттєвих струмів, напруг, потенціалів.

Відомо, що підпорядкована фізичним законам еволюція динамічної системи ними ж і обумовлена. Тому для *коректного* математичного відображення причинно-наслідкового зв'язку поміж силовою дією на динамічну систему та характером її руху у фазовому просторі виявлені математичні моделі мають бути віддзеркаленням актуальних відносно поставленої задачі фізичних законів, щоби описувати еволюційний рух динамічної системи у *просторі-часі* або в явній (безпосередньо просторово-часовій), або в опосередкованій (векторній, комплексній, операторній тощо) формах тотожно і без оман.

Для електричних кіл з розподіленими параметрами підґрунтям відомих [3] методів їх математичної ідентифікації слугують системи диференціальних рівнянь *в частинних похідних*, які залежно *від властивостей* (!) досліджуваних динамічних систем можуть виявляти не тільки еволюційний характер, але зворотнім зв'язком і самі вищезазначені *властивості* (!) систем, що ці рівняння від початку і задавали, набуваючи при цьому або лінійних (включно з параметричними), або нелінійних форм і змістів.

Наразі варто пам'ятати, що математична ідентифікація, зокрема формування математичної моделі, носить *ітераційний* характер. Наберуся сміливості додати, що закони її розвитку подібні законам еволюційного розвитку органічного світу за вченням *Ч. Дарвіна* – законам природнього відбору (з вибірковим "виживанням" і рушійним чинником розвитку).

В електричних колах з розподіленими параметрами аналіз електромагнітних процесів за наперед заданих крайових та початкових умов зводиться до постановки, формулювання і розв'язування фундаментальної *задачі Коші*. Для динамічних систем електромагнітної природи наріжним каменем такої математичної ідентифікації є *рівняння Дж. Кл. Максвелла* [2].

Одначе в окремих випадках, якщо тільки досліджуванні електричні системи з розподіленими параметрами за своєю топологічною структурою виявляють себе у відносно простих просторових формах, то при постановці задачі Коші побудова диференціальних рівнянь може бути досить адекватно та змістовно описана *законами Кірхгофа*, представленими в інтегральній формі [1-6]. В такому разі розв'язками задачі Коші, себто задачі аналізу електричних кіл з розподіленими параметрами за вищезазначених умов, будуть миттєві напруги і струми, але вже як функції водночас і просторових координат, і часу.

Проблематика, постановка задачі, мета дослідження

1. Рівняння Максвелла математично описують *фундаментальні* закони теорії електромагнітного поля, відтак є *узагальненими* і мають найвищу логічну силу. Узагальненими, але вже відносно електричних кіл, є і закони Кірхгофа.

Водночас кожен клас кіл з розподіленими параметрами, а в переважній більшості навіть і кожна окремо узята розподілена електрична система, потребують *індивідуального* математичного опису, який має враховувати конкретні відносно системи чинники – і її електричні та магнітні властивості, і властивості середовища, в якому вона перебуває, і взаємний зв'язок з нею інших систем, і характер їх впливу, і режими роботи тощо. Ситуацію ускладнює і та обставина, що більшість з таких чинників має різний вияв, характер та природу. Неурахування хоча б одного з них може виявитися згубним.

Тому під час математичної ідентифікації електричних кіл з розподіленими параметрами надзвичайно важливим є дедуктивне сходження від узагальнених форм – наразі рівнянь Максвела та законів Кірхгофа – до їх конкретних реалізацій – математичних моделей, сформованих відносно окремо узятих класів розподілених динамічних систем або і власне окремих систем. Логічна сила узагальнення останніх, звичайно ж, поступатиметься перед найзагальнішими математичними формами фундаментальних законів, але, по-перше, залишатиметься достатньою для підпорядкованих електричних систем і, по-друге, буде конкретною щодо них.

Відтак задача виявлення і введення у вихідний базис теорії електричних кіл таких математичних реалізацій, які в собі б нехай і частково, але водночас поєднували дві антагоністичні крайності – *узагальненість* фізичних законів і *конкретність* їх виявів, що завжди носила пріоритетний характер, а у випадку паритетного співвідношення поміж останніми – ще й фундаментальний, зберігає свою актуальність і дотепер.

2. Теорія електричних кіл з розподіленими параметрами є класичною теорією [3, 4]. Однак класичним в чисельних літературних джерелах є і її висвітлення. На думку автора, незадовільне. Призупинене в своєму розвитку. Зазвичай висвітлення зазначеної теорії зводиться до висвітлення лише однієї з її складових – теорії *двопровідної довгої лінії*. І раз у раз цією ж складовою теоретичного базису і завершується.

Теорія двопровідної довгої лінії, поза сумнівом, має глибинний характер. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних, що отримала назву *телеграфних рівнянь* (1),

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u}{\partial x} = R_0\, i + L_0 \dfrac{\partial i}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i}{\partial x} = G_0\, u + C_0 \dfrac{\partial u}{\partial t}. \end{cases} \tag{1}$$

після відкриття їх видатним вченим *О. Хевісайдом*, стала здобуттям і окрасою теоретичної електротехніки, дозволивши знайти рішення багатьох на той час нагальних та життєво необхідних практичних задач.

Але ж подальша практична діяльність людини з плином часу та накопиченням нових знань і досвіду вимагає більшого.

Сьогодні в теорії довгої лінії все дошкульніше відчувається прогалина – відсутність узагальненої *теорії n-провідної довгої лінії*, яка б дедуктивно не тільки об'єднала в собі розрізнені теорії одновимірних електричних систем з розподіленими параметрами, зокрема і наявну теорію двопровідної довгої лінії, але б і математично ідентифікувала ті фізичні явища та процеси, що спостерігаються в них за різних режимів роботи.

Зазначене стосується як інформаційних систем, так і *електроенергетичних*. Зокрема – *трифазних,* оскільки саме такі системи сформували фундаментальну парадигму традиційної електроенергетики і на сьогодні є її основою.

3. Отже, наразі *метою роботи є математична ідентифікація електроенергетичних процесів в трипровідній довгій лінії*, але без урахування впливу поверхні землі.

Отримані результати, назвемо їх за традицією *телеграфними рівняннями,* стануть математичною основою для подальшого розв'язування задач аналізу та синтезу трипровідних електричних кіл як в усталених режимах роботи, так і перехідних процесах в них.

Найперше зазначене стосується *трифазних електричних кіл з розподіленими параметрами*.

Телеграфні рівняння трипровідної довгої лінії

Розглянемо *трипровідну довгу лінію* і розташуємо її в заданій системі координат $0x$, точка початку якої збігається з початком довгої лінії, а вісь направлена до кінця довгої лінії (рис. 1).

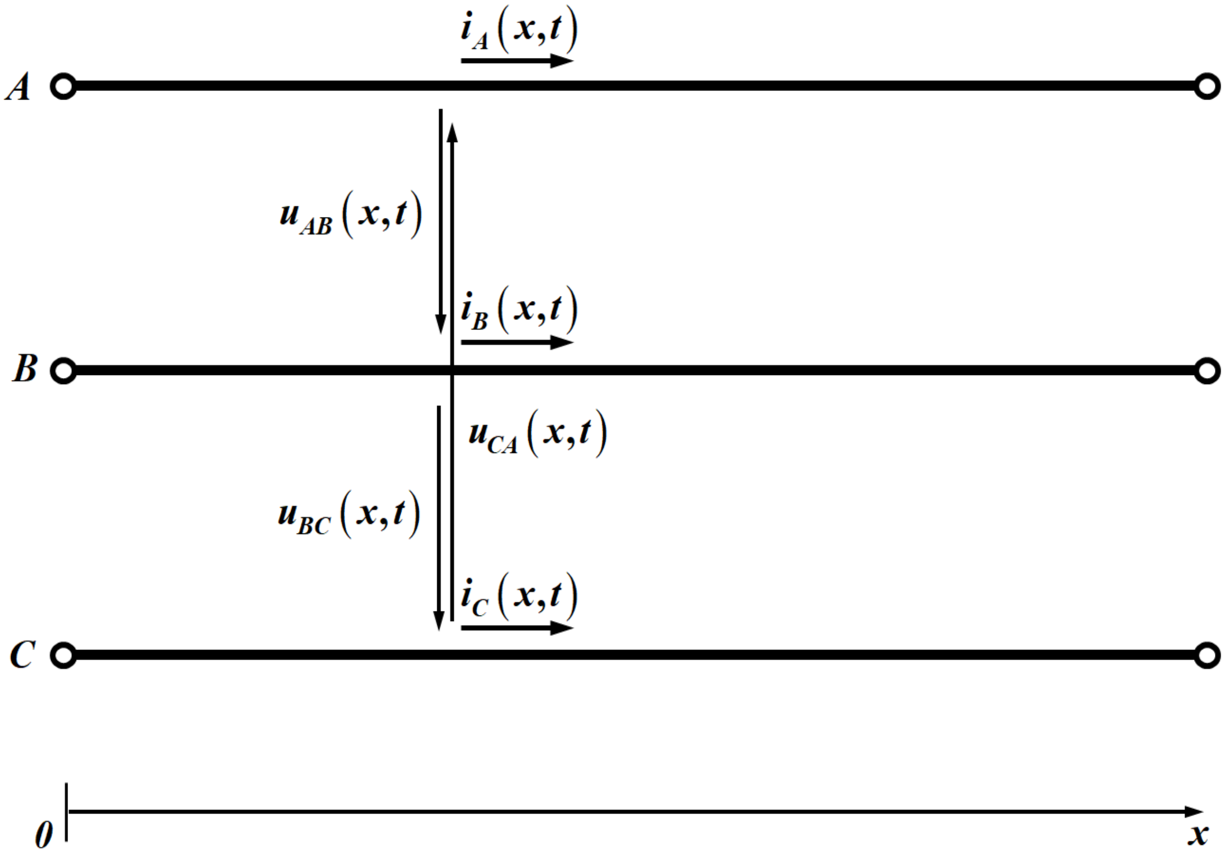

Рис. 1. Схема трипровідної довгої лінії (без урахування впливу поверхні землі)

В такій системі координат миттєві струми (i_A, i_B, i_C) в проводах та напруги (u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}) поміж ними виявляють себе як функції двох незалежних змінних, однією з яких є просторова координата x, а іншою – час t.

В трипровідній довгій лінії спостерігатимуться різноманітні фізичні явища. До уваги візьмемо лише окремі з них, але за виявами енергетичної активності найістотніші. Це – і незворотні втрати (розсіювання) електричної енергії внаслідок проходження струмів провідності в проводах довгої лінії та струмів витоку в міжпровідному середовищі, і збудження першими магнітних полів з наступним урахуванням явищ самоіндукції та взаємоіндукції між проводами, і збудження електричними зарядами електричних полів, які у разі зміни у часі породжуватимуть в міжпровідному діелектричному середовищі струми зміщення.

Внаслідок вияву зазначених фізичних явищ в трипровідній довгій лінії спостерігатиметься зміна миттєвих напруг і струмів, просторово розподілена вздовж довгої лінії. А їх зміна ще й у часі виявлятиме існування і рух (окрім, можливо, деяких випадків) вздовж заданої трипровідної лінії сукупності електромагнітних хвиль.

Телеграфні рівняння наразі побудуємо *без урахування* (!) впливу поверхні землі.

Відтак телеграфні рівняння мають встановити математичний зв'язок поміж трьома функціями миттєвих струмів (i_A, i_B, i_C) і миттєвих напруг (u_{AB}, u_{BC}, u_{CA}), кожна з яких є функцією двох незалежних змінних – одновимірного простору x і часу t.

Аналіз проведемо у класичний спосіб, скориставшись законами Кірхгофа в інтегральній формі [1-6]. Для цього подамо трипровідну довгу лінію як послідовну сукупність нескінченно маленьких ділянок довжиною $d\,x$, в межах яких кожну вважатимемо електричним колом із зосередженими параметрами, які враховують і характеризують вищезазначені фізичні явища, що спостерігаються в довгій лінії. Виокремимо одну з них.

Схему заміщення такої ділянки показано на рис. 2. А система диференціальних рівнянь в частинних похідних, яку для неї складено за 1-им та 2-им законами Кірхгофа (в інтегральній формі), має вигляд:

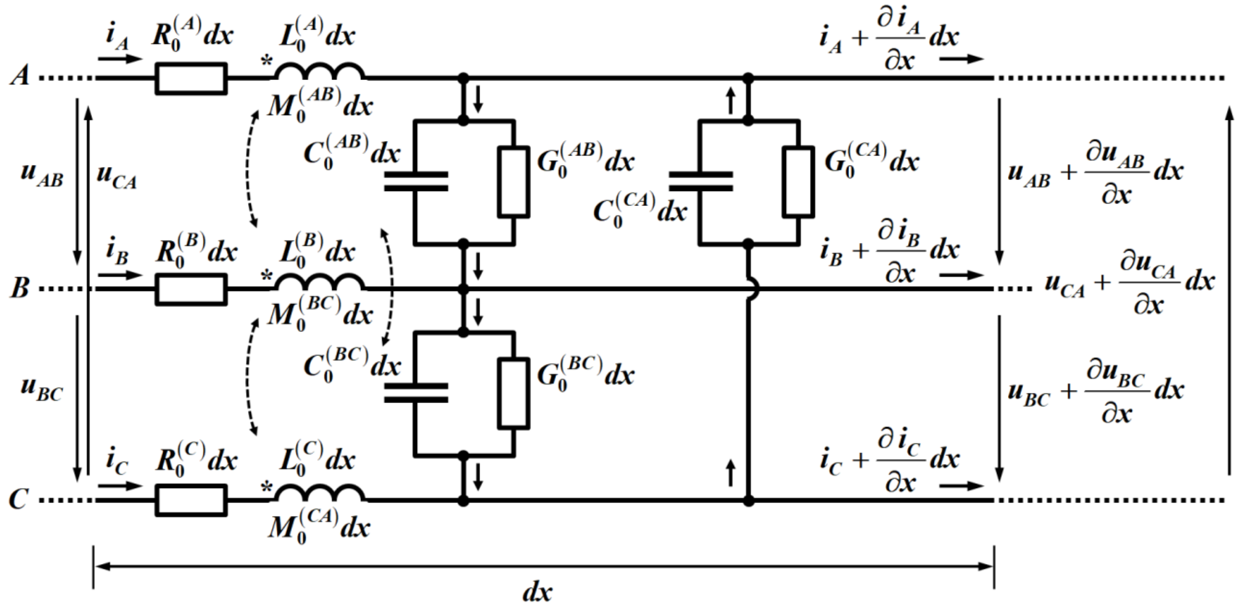

Рис. 2. Схема заміщення нескінченно малої ділянки трипровідної довгої лінії
(без урахування впливу поверхні землі)

$$\left\{\begin{aligned}
&u_{AB} - \left(u_{AB} + \frac{\partial u_{AB}}{\partial x}dx\right) = R_0^{(A)}dx \cdot i_A + \left(L_0^{(A)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} + M_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} + M_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t}\right) - \\
&\qquad - R_0^{(B)}dx \cdot i_B - \left(L_0^{(B)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} + M_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} + M_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t}\right); \\
&u_{BC} - \left(u_{BC} + \frac{\partial u_{BC}}{\partial x}dx\right) = R_0^{(B)}dx \cdot i_B + \left(L_0^{(B)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} + M_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} + M_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t}\right) - \\
&\qquad - R_0^{(C)}dx \cdot i_C - \left(L_0^{(C)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} + M_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} + M_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t}\right); \\
&u_{CA} - \left(u_{CA} + \frac{\partial u_{CA}}{\partial x}dx\right) = R_0^{(C)}dx \cdot i_C + \left(L_0^{(C)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t} + M_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} + M_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t}\right) - \\
&\qquad - R_0^{(A)}dx \cdot i_A - \left(L_0^{(A)}dx \cdot \frac{\partial i_A}{\partial t} + M_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial i_B}{\partial t} + M_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial i_C}{\partial t}\right); \\
&i_A - \left(i_A + \frac{\partial i_A}{\partial x}dx\right) = G_0^{(AB)}dx \cdot \left(u_{AB} + \frac{\partial u_{AB}}{\partial x}dx\right) + C_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{AB} + \frac{\partial u_{AB}}{\partial x}dx\right) - \\
&\qquad - G_0^{(CA)}dx \cdot \left(u_{CA} + \frac{\partial u_{CA}}{\partial x}dx\right) - C_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{CA} + \frac{\partial u_{CA}}{\partial x}dx\right); \\
&i_B - \left(i_B + \frac{\partial i_B}{\partial x}dx\right) = G_0^{(BC)}dx \cdot \left(u_{BC} + \frac{\partial u_{BC}}{\partial x}dx\right) + C_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{BC} + \frac{\partial u_{BC}}{\partial x}dx\right) - \\
&\qquad - G_0^{(AB)}dx \cdot \left(u_{AB} + \frac{\partial u_{AB}}{\partial x}dx\right) - C_0^{(AB)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{AB} + \frac{\partial u_{AB}}{\partial x}dx\right); \\
&i_C - \left(i_C + \frac{\partial i_C}{\partial x}dx\right) = G_0^{(CA)}dx \cdot \left(u_{CA} + \frac{\partial u_{CA}}{\partial x}dx\right) + C_0^{(CA)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{CA} + \frac{\partial u_{CA}}{\partial x}dx\right) - \\
&\qquad - G_0^{(BC)}dx \cdot \left(u_{BC} + \frac{\partial u_{BC}}{\partial x}dx\right) - C_0^{(BC)}dx \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{BC} + \frac{\partial u_{BC}}{\partial x}dx\right).
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Після нескладних математичних перетворень в кожному з рівнянь (3) та нехтування нескінченно малих величин другого порядку остаточно отримуємо:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u_{AB}}{\partial x} = R_0^{(A)} \cdot i_A + \left(L_0^{(A)} - M_0^{(AB)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_A}{\partial t} - R_0^{(B)} \cdot i_B - \left(L_0^{(B)} - M_0^{(AB)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_B}{\partial t} - \left(M_0^{(BC)} - M_0^{(CA)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_C}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial u_{BC}}{\partial x} = R_0^{(B)} \cdot i_B + \left(L_0^{(B)} - M_0^{(BC)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_B}{\partial t} - R_0^{(C)} \cdot i_C - \left(L_0^{(C)} - M_0^{(BC)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_C}{\partial t} - \left(M_0^{(CA)} - M_0^{(AB)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_A}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial u_{CA}}{\partial x} = R_0^{(C)} \cdot i_C + \left(L_0^{(C)} - M_0^{(CA)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_C}{\partial t} - R_0^{(A)} \cdot i_A - \left(L_0^{(A)} + M_0^{(CA)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_A}{\partial t} - \left(M_0^{(AB)} - M_0^{(BC)}\right) \cdot \dfrac{\partial i_B}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i_A}{\partial x} = G_0^{(AB)} \cdot u_{AB} + C_0^{(AB)} \cdot \dfrac{\partial u_{AB}}{\partial t} - G_0^{(CA)} \cdot u_{CA} - C_0^{(CA)} \cdot \dfrac{\partial u_{CA}}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i_B}{\partial x} = G_0^{(BC)} \cdot u_{BC} + C_0^{(BC)} \cdot \dfrac{\partial u_{BC}}{\partial t} - G_0^{(AB)} \cdot u_{AB} - C_0^{(AB)} \cdot \dfrac{\partial u_{AB}}{\partial t}; \\ -\dfrac{\partial i_C}{\partial x} = G_0^{(CA)} \cdot u_{CA} + C_0^{(CA)} \cdot \dfrac{\partial u_{CA}}{\partial t} - G_0^{(BC)} \cdot u_{BC} - C_0^{(BC)} \cdot \dfrac{\partial u_{BC}}{\partial t}. \end{cases} \quad (4)$$

Отримана система диференціальних рівнянь в частинних похідних (4) є просторово-часовою математичною моделлю трипровідної довгої лінії за умови відсутності впливу поверхні землі або інших сторонніх тіл.Назвемо цю систему телеграфними рівняннями трипровідної довгої лінії (за вищезазначеної умови).

Висновки

В роботі проведено математичну ідентифікацію фізичних процесів, що спостерігаються в електричних колах з розподіленими параметрами – наразі трипровідній довгій лінії. Отримано диференціальні рівняння в частинних похідних, які названо за історичною традицією телеграфними.

Результат роботи виявляє себе як математичне підґрунтя для подальшого розв’язування задач аналізу та синтезу трипровідних електричних кіл як в усталених режимах роботи, так і перехідних процесах в них. Зазначене стосується ліній електропередачі електричної енергії, ліній зв’язку, високочастотних радіотехнічних, телевізійних, інформаційних систем, а також електромеханічних систем та трансформаторів у разі дії на них імпульсних струмів і напруг, тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретичні основи електротехніки: Підручник / В. С. Бойко, В. В. Бойко. – К.: ІВЦ “Політехніка”, 2004. – 272 с.
2. ТОЕ. Електромагнітне поле : підручник /. Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2014. – 392 с.
3. ТОЕ. Усталені режими лінійних електричних кіл із зосередженими та розподіленими параметрами : підручник / Ю. О. Карпов, С. Ш. Кацив, В. В. Кухарчук, Ю. Г. Ведміцький ; під ред. проф. Ю. О. Карпова – Вінниця : ВНТУ, 2011. – 377 с.
4. ТОЕ. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола: підручник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив, за ред. проф. Ю. О. Карпова. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2019. – 456 с.
5. ТОЕ. Методи розрахунку нелінійних електричних і магнітних кіл в прикладах та задачах : навч. посібник / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук. – Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2017. – 262 с.
6. Ведміцький Ю. Г. Тектологія динамічних систем і явище гіперсилової взаємодії в структурних рівняннях узагальненого електричного кола / Ю. Г. Ведміцький // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. – 2018. – №2. – С. 1-11.

Юрій Григорович Ведміцький — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп’ютеризованих електромеханічних систем і комплексів, ВНТУ, м. Вінниця, wjg@ukr.net

Yurii G. Vedmitskyi — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of Department of Theoretical Electrical Engineering and Electrical Measurements, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, wjg@ukr.net