УДК 691.31.536.21

МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ З ВРАХУВАННЯМ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

С.В. Риндюк, І.Н. Дудар

Вступ

В розв'язку задач підвищення ефективності промисловості будівельних матеріалів, виробів та конструкцій велика увага приділяється розробці нових енергозберігаючих технологій.

Розрахунки температурних полів, які виконані на основі лінійних математичних моделей процесу теплопровідності, не завжди приводять до задовільних результатів, особливо у тих випадках, коли температура змінюється в значному діапазоні. Тому для побудови найбільш адекватної реальному процесу математичної моделі необхідно врахувати залежність від температури теплофізичних характеристик матеріалів, щільність поверхневих потоків і внутрішніх джерел енергії (теплоти).

В даному випадку коефіцієнт теплопровідності може залежати не тільки від змінних x і t, але і від температури U.

А це приводить до розгляду не лінійних крайових задач теплопровідності, розв'язання яких, в аналітичній формі, проблематичне.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

В даній роботі розглядається методика розв'язання однорідного нелінійного рівняння теплопровідності, яке має вигляд:

$$Ut = [Q(U)\ Ux]x;\ (0 > x < 1,\ t > 0\ ). \tag{1}$$

Початкові умови:

$$U(x,0)=\varphi(x);\ 0 \le x \le 1. \tag{2}$$

Граничні умови:

$$\beta 1\ Ux(0,\ t) + \gamma 1U(0,\ t) = \psi 1(t)\ ; \tag{3}$$

$$\beta 2\ Ux(1,\ t) + \gamma 2U(1,\ t) = \psi 2(t);$$

де залежність коефіцієнта температуропровідності $Q(U)$ буде в наступній формі:

$$Q(U)=1+U. \tag{4}$$

Тоді рівняння (1) буде мати вигляд:

$$Ut = Uxx + U\cdot Uxx+U^2x \tag{5}$$

Розв'язання рівняння (5) будемо шукати у вигляді квадратичного полінома:

$$\Phi(x,xk,t) = \sum_{i=0}^{e} Ai(t)(x-xk)^i \tag{6}$$

$i=0$ в околі k-того вузла,

де $xк$ - координата k-того вузла інтервалу рівномірного розбиття з кроком $k=(1+n)$,
n - кількість внутрішніх вузлів.

Перепишемо початкові умови (2) і граничні умови (3) з врахуванням (6), маємо:

$$U(x\kappa,\ 0) = \Phi(x\kappa,\ x\kappa,\ 0) \tag{7}$$

$$\beta 1\ \Phi x(0,x1,\ t) + \gamma 1\ \Phi x(0,x1,\ t) = \psi 1(t)\ ; \tag{8}$$

$$\beta 2\ \Phi x(0,xn,\ t) + \gamma 2\ \Phi x(0,xn,\ t) = \psi 2(t)\ ; \tag{9}$$

Рівняння неперервності температури на суміжних межах інтервалів розбиття:

$$\Phi(xk \pm h\ ,\ x\kappa,\ t) = \Phi(\ x\kappa \pm 1,\ x\kappa \pm 1,\ t\ ); \tag{10}$$

Підстановка табличного розв'язку (6) в (8) і (9) призводить до наступної системи алгебраїчних рівнянь відносно $A1^{\kappa}$ і $A2^{\kappa}$;

$$\begin{gathered}
(A'1\ -2\,A'2\cdot h)\cdot\beta 1 + (A'0\ -\ A'1\cdot h + A'2\cdot h^2)\cdot\gamma 1 = \psi 1 \\
A0^{k} + A1^{k}\cdot h + A2^{k}\cdot h^2 = A0^{k+1},\ k=1,\ n-1 \\
A0^{k} - A1^{k}\cdot h + A2^{k}\cdot h^2 = A0^{k-1},\ k=2,n \\
(A1^{n}\ -2\,A2^{n}\cdot h)\cdot\beta 2 + (A0^{n}\ -\ A1^{n}\cdot h + A2^{n}\cdot h^2)\cdot\gamma 2 = \psi 2
\end{gathered} \tag{11}$$

Розв'язуючи (11), знаходимо не коректні вирази для $A1^{k}$ та $A2^{k}$ через $A0^{k}$, $\psi 1$ та $\psi 2$.

$$A^11 = [A^20\,(2\,\beta 1 - \gamma 1\cdot h) - A^10\,\beta 1 + \psi 1\cdot h\,]\ /\ [(3\beta 1 - 2\,\gamma 1\cdot h)\cdot h], \tag{12}$$

$$A^12 = [A^20\,(\,\beta 1 - \gamma 1\cdot h) - A^10(\,\beta 1 - 2\,\gamma 1\cdot h) - \psi 1\cdot h\,]\ /\ [(3\beta 1 - 2\,\gamma 1\cdot h)\cdot h^2], \tag{13}$$

$$A1^{k} = [\,A0^{k+1} - A0^{k-1}\,]/2h, \tag{14}$$

$$A2^{k} = [\ A0^{k+1} - 2\ A0^{k}\ +\ A0^{k-1}\,]\ /2h^2, \tag{15}$$

$$A1^{n} = [2A0^{n}\,\beta 2 -\ A0^{n-1}\,(2\beta 2 + \gamma 2\cdot h) + \psi 2\cdot h)]\ /\ [(3\beta 2 + 2\gamma 2\cdot h)\cdot h], \tag{16}$$

$$A2^{n} = [A0^{n-1}\,(\,\beta 2 + \gamma 2\cdot h) - A0^{n}\,(\beta 2 + 2\gamma 2\cdot h) + \psi 2\cdot h)]\ /\ [(3\beta 2 + 2\gamma 2\cdot h)\cdot h^2], \tag{17}$$

Про інтегруємо (5) з врахуванням (6) на інтервалах ($x\kappa - \alpha k\ h,\ \ x\kappa + \alpha k\ h$), де αk – числовий коефіцієнт зі значенням від 0 до 1, маємо:

$$\dot{A0}^{k} + \alpha^2 k\ \ h^2\,\dot{A2}^{k}/3 = 2A2^{k}\,(1 + A0^{k}) + 2(\,A2^{k}\,)^2\,\alpha^2 k\ \ h^2 + (\,A1^{k}\,)^2 \tag{18}$$

Підставляючи (12) – (17) в (18) отримуємо згідно крайових умов відповідну систему нелінійних диференціальних рівнянь для n- вузлових точок.

Так, наприклад, для першої кураєвої задачі теплопровідності (при $\gamma 1 = \gamma 2 = 1,\ \beta 1 = \beta 2 = 0$)

Отримаємо наступну нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}
A^10(1 - \alpha^21\ /3) + \alpha^21\ A^20\ /6 = \{A^10\ [(1 - 2\alpha^21)(\,A^20 + \psi 1) - 2A^10 - 2 - 2\alpha 1\ A^10]/h^2\} + \\
+\{A^20\ [1 + \psi 1(\alpha^21 - 0{,}5)]/\ h^2\} + \{[(0{,}25 + 0{,}5\alpha^21)][(\,A^20)^2 + \psi^21]/h^2\} - \\
-[\alpha^21\ \psi 1]/6 + \psi 1\ /\ h^2
\end{gathered}$$

$$\overset{k}{A0}\ (1 - \alpha^2\mathrm{k}h^2/3)+ \alpha^2\,\mathrm{k}h^2/3(A0 + \overset{k-1}{A0}) =[\overset{k+2}{A0}\ (4+4\overset{k-1}{A0} +2\alpha^2\overset{k}{\mathrm{k}}\ ) - \overset{k}{A0}\ (16+4\alpha^2\,\mathrm{k})+$$

$$+ \overset{\kappa+1}{A0}\ (4+2\alpha^2\,\mathrm{k}+4\overset{k}{A0} - 2\overset{k-1}{A0})+(\overset{k-1}{A0}\ )^2+(\overset{k+1}{A0})^2]/4h^2,\ k=2,n-1 \qquad (19)$$

$$\overset{n}{A0}\ (1 - \alpha^2 n/3\ ) + \alpha^2 n\ \ \overset{n-1}{A0}\ /6 = \overset{n}{A0}\ [(1-2\alpha\mathrm{k})(\ \overset{n-1}{A0} +\psi 2\ )+2(\alpha n\ \ \overset{n}{A0} - \overset{n}{A0} - 1)]/h^2+$$

$$+ \overset{n}{A0}\ [1+\psi 2\ (\alpha^2\mathrm{k} - 0{,}5)]/h^2+(1+2\alpha^2\mathrm{k}\ )[(\overset{n-1}{A0}\ )^2+\psi^2 2\ ]/4h^2+ \psi 2\ /h^2 - \alpha^2 n\ \psi 2\ /6$$

Для визначення регулюючих параметрів інтегрування (αk) використаємо вираз при t =0;

$$\dot{\overset{k}{A0}}\ (0) = \overset{k}{\varphi}xx\ +\ \overset{k}{\varphi}\ \overset{k}{\varphi}xx\ \ +(\overset{k}{\varphi}x\ )^2$$

в системі (19).

В результаті маємо систему алгебраїчних рівнянь відносно αk.

Отримавши αk і підставивши їх в (19), отримуємо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих $\overset{k}{A0}$, розв'язання якої визначаємо чисельними методами, наприклад, по методу Фуже-Кутта.

Зауважимо, що розв'язок задачі при визначених αk буде покращеним, а при

α^2k = 0,5 – покращений метод прямих [2];

αk = 0 – метод прямих [2];

αk = 1 – інтегральний метод прямих [1].

Виконуючи аналогічну процедуру з врахуванням граничних умов другого і третього роду отримуємо розв'язання відповідно другої та третьої кураєвої задачі теплопровідності

Висновки

- Отримано методику розв'язання нелінійної однорідної задачі теплопровідності з врахуванням зміни коефіцієнта температуропровідності.
- За рахунок рекурентних співвідношень (12) - (17) для невідомих коефіцієнтів квадратичного поліному (6) і інтегрування основного нелінійного рівняння (1) в околі k-тих вузлів отримуємо інваріантну систему нелінійних диференціальних рівнянь відносно невідомої температури в кожному внутрішньому вузлі досліджуваного інтервалу.
- Розв'язок отриманої системи диференціальних рівнянь при різних значеннях коефіцієнта αk дозволяє зробити висновок про достовірність отриманих рішень.

Список літератури

1. Рындюк В.И. Применение лучшего интегрального метода прямых к решению краевых задач теплопроводности. ИФЖ / В.И. Рындюк. – 1987. – т. 52. – №2. – 6 с.
2. Березин И.С. Методы вычисления : Т.2 / И.С. Березин, И.П. Жидков. – М: Физматгиз, 1966 – 640 с.
3. Беляев Н.М. Методы теории теплопроводности / Н.М. Беляев, А.А. Рядко. – М: Высшая школа, 1982. – 327 с.

Дудар Ігор Никифорович – д.т.н., професор, зав. кафедри містобудування та архітектури Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – студентка Вінницького національного технічного університету.