УДК 691.31.536.21

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДВОМІРНОГО ТРЬОХШАРОВОГО СЕРЕДОВИЩА

В.І. Риндюк, Т.О. Міщук, С.В. Риндюк

Вступ

В зв’язку з ростом цін на енергозбереження у всьому світі і зменшенням запасів енергоресурсів в будівельній справі все гостріше стає проблема дослідження теплопровідності різноманітних матеріалів в поєднанні їх одного з одним. Метою їх компоновки є зменшення теплопровідності стін житлових будинків та інших будівельних споруд. Добре відомим фактом є той, що через стіни житлових будинків втрачається близько половини тепла. Утеплення будинів – тема особливо актуальна. Особливо якщо це приватні особняки або великі дачі. Для того, щоб в них жити і в зимку, потрібно утеплити стіни, підлогу, дах. Так, наприклад, збільшення товщини стін для підвищення термічного опору приводить до перевитрат будівельних матеріалів, тому використовують відповідні теплоізоляційні матеріали в поєднанні з легкими кам’яними матеріалами.

Підбір матеріалів з метою теплоізоляції потребує відповідних розрахунків.

В роботах [1,2] розглянуто методику теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища в одномірному і двомірному випадку з врахуванням граничних умов першого роду за допомогою інтегрального методу прямих. Разом з тим теплотехнічний розрахунок двомірних багатошарових середовищ потребує більш детального аналізу з врахуванням граничних умов другого та третього роду.

Постановка задачі, визначальні співвідношення

Метою роботи є моделювання процесу теплопровідності двомірного трьохшарового середовища, знаходження методики математичного дослідження температурних полів в кожному шарі матеріалу з врахуванням граничних умов третього роду [3].

Для моделювання теплопровідності приймемо, що досліджуване середовище складається з трьох частин з різними коефіцієнтами теплопровідності, що сприймають змінні теплові потоки на зовнішніх межах і містять в собі джерела теплоти (рис. 1).

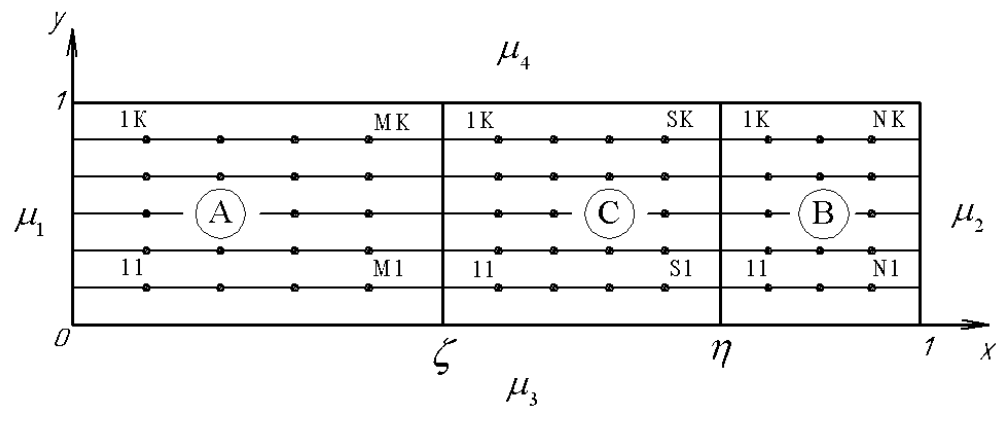

Рис. 1. Розрахункова схема теплопровідності двомірного неоднорідного середовища

Задача зводиться до розв’язання наступного рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right] + f(x,y,t), \tag{1}$$

де коефіцієнт теплопровідності $a(x, y)$ має значення

$$a_A, 0 < x < \zeta, 0 < y < 1; \quad a_B, \eta < x < 1, 0 < y < 1; \quad a_C, \zeta < x < \eta, 0 < y < 1; \tag{2}$$

в області $\{x, y, t\}, 0 < x < 1, 0 < y < 1, x \neq \zeta, x \neq \eta,$ яка задовільняє початковій умові (3), умовам на межах границь (4)

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u(0, y, t) + \beta_1 \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial \tilde{o}} = \mu_1, \quad \alpha_2 u(1, y, t) + \beta_2 \frac{\partial u(1, y, t)}{\partial \tilde{o}} = \mu_2, \\ &\alpha_3 u(\tilde{o}, 0, t) + \beta_3 \frac{\partial u(1, 0, t)}{\partial \acute{o}} = \mu_3, \quad \alpha_4 u(\tilde{o}, 1, t) + \beta_4 \frac{\partial u(\tilde{o}, 1, t)}{\partial \acute{o}} = \mu_4, \end{aligned}, \tag{4}$$

і умовам спряження (5-6)

$$u\Big|_{x=\zeta-0} = u\Big|_{x=\zeta+0}, \quad u\Big|_{y=\eta-0} = u\Big|_{y=\eta+0}, \tag{5}$$

$$a_A \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta-0} = a_C \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\zeta+0}, \quad a_C \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\eta-0} = a_B \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\eta+0}. \tag{6}$$

Для чисельного розв'язання задачі (1-6) по вісі x вводиться вводиться сітка відповідно з кроком

$$h_{Ax} = \frac{\zeta}{M+1}, \quad h_{Cx} = \frac{\eta - \zeta}{S+1}, \quad h_{Bx} = \frac{1-\eta}{N+1}.$$

Відносно осі y на інтервалі (0, 1) введемо сітку з кроком

$$h_{Ay} = h_{Cy} = h_{By} = \frac{1}{K+1}.$$

Наближений розв'язок задачі (1-6) будемо шукати у вигляді квадратичного поліному

$$\begin{aligned} &P_{nk}(x, x_n, y, y_k, t) = \sum_{i,j=0}^{2} B_{ij}(t)(x - x_n)^i (y - y_k)^j, x \in [\eta, 1], y \in [0, 1], \\ &P_{ml}(x, x_m, y, y_k, t) = \sum_{i,j=0}^{2} A_{ij}(t)(x - x_m)^i (y - y_l)^j, x \in [0, \zeta], y \in [0, 1], \\ &P_{sl}(x, x_s, y, y_k, t) = \sum_{i,j=0}^{2} C_{ij}(t)(x - x_s)^i (y - y_l)^j, x \in [\zeta, 1], y \in [0, 1], \end{aligned} \tag{7}$$

де $k = \overline{1, K}$, $m = \overline{1, M}$, $n = \overline{1, N}$, $s = \overline{1, S}$.

Проінтегруємо (1) на інтервалах

$$[x_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ax},x_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ax}],[y_{mk}-\alpha_{mk}h_{Ay},y_{mk}+\alpha_{mk}h_{Ay}];$$
$$[x_{sk}-\alpha_{sk}h_{Cx},x_{sk}+\alpha_{sk}h_{Cx}],[y_{sk}-\alpha_{sk}h_{Ay},y_{sk}+\alpha_{sk}h_{Ay}];$$
$$[x_{nk}-\alpha_{nk}h_{Bx},x_{nk}+\alpha_{nk}h_{Bx}],[y_{nk}-\alpha_{nk}h_{By},y_{nk}+\alpha_{nk}h_{By}],$$

з урахуванням наближеного розв'язку (7), де $\alpha_{mk},\alpha_{sk},\alpha_{nk}$ – числові коефіцієнти, отримаємо таку систему M×K + S×K + N×K лінійних звичайних диференційних рівнянь відносно $A_{00}^{mk},C_{00}^{sk},B_{00}^{nk}$

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_{00}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2h_{Ax}^2}{3}\dot{A}_{20}^{mk}+\frac{\alpha_{mk}^2h_{Ay}^2}{3}\dot{A}_{02}^{mk}=2a_AA_{20}^{mk}+2a_AA_{02}^{mk}+\Phi_A^{mk};\\
&\dot{C}_{00}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2h_{Cx}^2}{3}\dot{C}_{20}^{sk}+\frac{\alpha_{sk}^2h_{Cy}^2}{3}\dot{C}_{02}^{sk}=2a_CC_{20}^{sk}+2a_CC_{02}^{sk}+\Phi_C^{sk};\\
&\dot{B}_{00}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2h_{Bx}^2}{3}\dot{D}_{20}^{nk}+\frac{\alpha_{nk}^2h_{Dy}^2}{3}\dot{B}_{02}^{nk}=2a_DD_{20}^{nk}+2a_DD_{02}^{nk}+\Phi_D^{nk},
\end{aligned}\tag{8}$$

де Φ – подвійний інтеграл від f (x,y) на відповідному інтервалі інтегрування;

$$k=\overline{1,K},\ m=\overline{1,M},\ n=\overline{1,N}.$$

Для розв'язання отриманої системи перепишемо (3) з урахуванням (7)

$$\begin{aligned}
&P_{mk}\left(x_m,x_m,y_k,y_k,0\right)=A_{00}^{mk}\left(0\right)=u\left(x_m,y_k,0\right);\\
&P_{sk}\left(x_s,x_s,y_k,y_k,0\right)=C_{00}^{sk}\left(0\right)=u\left(x_s,y_k,0\right);\\
&P_{nk}\left(x_n,x_n,y_k,y_k,0\right)=B_{00}^{nk}\left(0\right)=u\left(x_n,y_k,0\right).
\end{aligned}\quad ,\tag{9}$$

Підставляючи (7) в (4), (5) і враховуючи умови неперервності температури на межах інтервалів розбиття відповідно на (0, ζ)×(0, 1), (ζ, η)×(0, 1) і (η, 1)×(0, 1) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів поліномів (7). Після її розв'язання знаходимо рекурентні вирази для коефіцієнтів $A_{20}^{mk},A_{02}^{mk},C_{20}^{sk},C_{02}^{sk},B_{20}^{nk},B_{02}^{nk}$, так як вони входять в систему (8)

$$\begin{aligned}
&A_{20}^{1k}=\left[\mu_1\cdot h_{Ax}+A_{00}^{2k}\left(\gamma_1\cdot h_{Ax}-\beta_1\right)-A_{00}^{1k}\left(2\gamma_1\cdot h_{Ax}-\beta_1\right)\right]\Big/\left(2\gamma_1\cdot h_{Ax}^3-3\beta_1\cdot h_{Ax}^2\right),\ k=\overline{1,K}\\
&B_{20}^{Nk}=\left[\mu_2\cdot h_{Bx}-B_{00}^{N-1,k}\left(\gamma_2\cdot h_{Bx}+\beta_2\right)-B_{00}^{Nk}\left(2\gamma_2\cdot h_{Bx}+\beta_2\right)\right]\Big/\left(2\gamma_2\cdot h_{Bx}^3+3\beta_2\cdot h_{Bx}^2\right),\ k=\overline{1,K}\\
&A_{02}^{m1}=\left[\mu_3\cdot h_{Ay}+A_{00}^{m2}\left(\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)-A_{00}^{m1}\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)\right]\Big/\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}^3-3\beta_3\cdot h_{Ay}^2\right),\ m=\overline{1,M}\\
&C_{02}^{s1}=\left[\mu_3\cdot h_{Ay}+C_{00}^{s2}\left(\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)-C_{00}^{s1}\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)\right]\Big/\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}^3-3\beta_3\cdot h_{Ay}^2\right),\ s=\overline{1,S}\\
&B_{02}^{n1}=\left[\mu_3\cdot h_{Ay}+B_{00}^{n2}\left(\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)-B_{00}^{n1}\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}-\beta_3\right)\right]\Big/\left(2\gamma_3\cdot h_{Ay}^3-3\beta_3\cdot h_{Ay}^2\right),\ n=\overline{1,N}\\
&A_{02}^{mK}=\left[\mu_4\cdot h_{Ay}+A_{00}^{m,K-1}\left(\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)-A_{00}^{mK}\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)\right]\Big/\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}^3+3\beta_4\cdot h_{Ay}^2\right),\ m=\overline{1,M}
\end{aligned}\ ,\tag{10}$$

$$C_{02}^{sK}=\left[\mu_4\cdot h_{Ay}+C_{00}^{s,K-1}\left(\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)-C_{00}^{sK}\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)\right]\Big/\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}^3+3\beta_4\cdot h_{Ay}^2\right),\ s=\overline{1,S}$$

$$B_{02}^{nK}=\left[\mu_4\cdot h_{Ay}+B_{00}^{n,K-1}\left(\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)-B_{00}^{nK}\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}+\beta_4\right)\right]\Big/\left(2\gamma_4\cdot h_{Ay}^3+3\beta_4\cdot h_{Ay}^2\right),\ n=\overline{1,N}$$

$$A_{20}^{mk}=\frac{A_{00}^{m-1,k}-2A_{00}^{mk}+A_{00}^{m+1,k}}{2h_{Ax}^2},\begin{cases}m=\overline{2,M-1}\\ k=\overline{2,K}\end{cases};\ C_{20}^{sk}=\frac{C_{00}^{s-1,k}-2C_{00}^{sk}+C_{00}^{s+1,k}}{2h_{Cx}^2},\begin{cases}s=\overline{2,S-1}\\ k=\overline{2,K}\end{cases}$$

$$A_{02}^{mk}=\frac{A_{00}^{m,k-1}-2A_{00}^{mk}+A_{00}^{m,k+1}}{2h_{Ay}^2},\begin{cases}m=\overline{2,M}\\ k=\overline{2,K-1}\end{cases};\ B_{20}^{nk}=\frac{B_{00}^{n-1,k}-2B_{00}^{nk}+B_{00}^{n+1,k}}{2h_{Bx}^2},\begin{cases}n=\overline{2,N-1}\\ k=\overline{2,K}\end{cases}$$

$$B_{02}^{sl}=\frac{B_{00}^{s,l-1}-2B_{00}^{sl}+B_{00}^{s,l+1}}{2h_{Dy}^2},\begin{cases}n=\overline{2,N}\\ k=\overline{2,K-1}\end{cases};\ C_{02}^{sk}=\frac{C_{00}^{s,k-1}-2C_{00}^{sk}+C_{00}^{s,k+1}}{2h_{Ay}^2},\begin{cases}s=\overline{2,S}\\ k=\overline{2,K-1}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}A_{20}^{Mk}=&[-2A_{00}^{Mk}\left(3h_{Ax}^2a_C^2+3h_{Cx}^2a_A^2+10a_Aa_Ch_{Ax}h_{Cx}\right)+4C_{00}^{1k}a_Ch_{Ax}\left(h_{Ax}a_C+3a_Ah_{Cx}\right)-\\&-C_{00}^{2k}a_Ch_{Ax}\left(3a_Ah_{Cx}+a_Ch_{Ax}\right)+A_{00}^{M-1,k}\left(11a_Aa_Ch_{Ax}h_{Cx}+3a_C^2h_{Ax}^2+6a_A^2h_{Cx}^2\right)]/\\&/[6h_{Ax}^2\left(3a_Ah_{Cx}+a_Ch_{Ax}\right)\left(a_Ah_{Cx}+a_Ch_{Ax}\right)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{20}^{Sk}=&[-2C_{00}^{Sk}\left(3h_{Cx}^2a_B^2+3h_{Bx}^2a_C^2+10a_Ba_Ch_{Cx}h_{Bx}\right)+4B_{00}^{1k}a_Bh_{Bx}\left(h_{Cx}a_B+3a_Ch_{Bx}\right)-\\&-B_{00}^{2k}a_Bh_{Cx}\left(3a_Ch_{Bx}+a_Bh_{Cx}\right)+C_{00}^{S-1,k}\left(11a_Ca_Bh_{Cx}h_{Bx}+3a_B^2h_{Cx}^2+6a_C^2h_{Bx}^2\right)]/\\&/[6h_{Cx}^2\left(3a_Ch_{Bx}+a_Bh_{Cx}\right)\left(a_Ch_{Bx}+a_Bh_{Cx}\right)]\end{aligned}$$

$$C_{20}^{1k}=\frac{4a_Ah_{C\tilde{o}}A_{00}^{Mk}-2\left(h_{A\tilde{o}}a_C+3a_Ah_{C\tilde{o}}\right)C_{00}^{1k}+C_{00}^{2k}\left(2a_Ch_{A\tilde{o}}+3a_Ah_{C\tilde{o}}\right)-A_{00}^{M-1,k}a_Ah_{C\tilde{o}}}{6h_{Cx}^2\left(a_Ah_{Cx}+a_Ch_{Ax}\right)},\ k=\overline{1,K}$$

$$B_{20}^{1k}=\frac{4a_Ch_{B\tilde{o}}C_{00}^{Sk}-2\left(h_{C\tilde{o}}a_B+3a_Ch_{B\tilde{o}}\right)B_{00}^{1k}+B_{00}^{2k}\left(2a_Bh_{C\tilde{o}}+3a_Ch_{B\tilde{o}}\right)-C_{00}^{S-1,k}a_Ch_{B\tilde{o}}}{6h_{Bx}^2\left(a_Ch_{Bx}+a_Bh_{Cx}\right)},\ k=\overline{1,K}$$

Знайдені коефіцієнти підставляємо в (8) та отримуємо систему M*K + S*K + N*K лінійних диференційних рівнянь відносно коефіцієнтів $A_{00}^{mk},C_{00}^{sk},B_{00}^{nk}$..

З врахуванням початкових умов (9) запишемо данну систему в такій матричній формі:

$$\dot{R}_{00}=\alpha R_{00}+\beta\psi+\varPhi, \tag{11}$$

де $\dot{R}_{00}=\left\{\dot{A}_{00}^{m,k},\dot{C}_{00}^{s,k},\dot{D}_{00}^{m,l},\dot{E}_{00}^{s,l},\right\}^T,\ R_{00}=\left\{A_{00}^{m,k},C_{00}^{s,k},D_{00}^{m,l},E_{00}^{s,l},\right\}^T,\ \psi=\psi\left(\mu_\kappa,\dot{\mu}_\kappa\right).$

α,β - відповідні матриці з числовими коефіцієнтами при стовпцях R_{00} і ψ,

Ф – матриця-стовпець подвійних інтегралів від $f\left(x,t\right)$.

Для поліпшення розв'язку числові коефіцієнти α_{ij} знайдемо з умови того, що наближені розв'язки (7) при t = 0 із врахуванням початкових умов (3) задовільняли б рівняння (1):

$$\begin{aligned}
&\dot{A}_{00}^{m,k}(0)=\varphi_{xx}(x_m,y_k)+\varphi_{yy}(x_m,y_k)+f(x_m,y_k,0),\ m=\overline{1,M};k=\overline{1,K}\\
&\dot{C}_{00}^{s,k}(0)=\varphi_{xx}(x_s,y_k)+\varphi_{yy}(x_s,y_k)+f(x_s,y_k,0),\ s=\overline{1,S};k=\overline{1,K}\\
&\dot{B}_{00}^{n,k}(0)=\varphi_{xx}(x_n,y_k)+\varphi_{yy}(x_n,y_k)+f(x_n,y_k,0),\ m=\overline{1,M};n=\overline{1,N}
\end{aligned}, \qquad (12)$$

З урахуванням (12) і (11) отримаємо систему M×K + S×K + N×K незалежних алгебраїчних рівнянь відносно відповідних числових коефіцієнтів α_{ij} та з врахуванням знайдених коефіцієнтів α_{ij} розв'язуємо (11), наприклад, по методу Рунге-Кутта і знаходимо покращені розв'язки у відповідних вузлових точках розбиття інтервалів неоднорідного середовища з граничними умовами третього роду. Розв'язок системи можна отримати при наступних значеннях α_{ij}:

$\alpha_{ij} = 0$ - розв'язок аналогічний звичайному методу сіток;

$\alpha_{ij}{}^2 = 0.5$ - розв'язок аналогічний покращеному методу сіток;

$\alpha_{ij} = 1$ – звичайний інтегральний метод [3].

З урахуванням різних значень α_{ij} та отримання відповідних розв'язків, можна робити висновок про їх достовірність, що особливо важливо у випадку осциляцій функцій. Практика показує, що з малим числом вузлів при $\alpha_{ij} = 0$ розв'язок задачі отримуємо з великою похибкою.

Висновки

– Запропонована методика дозволяє аналізувати компоновку матеріалів в їх поєднанні з метою теплоізоляційних властивостей відповідних конструкцій.
– Алгоритм розв'язання задачі застосовується і для задач з врахуванням граничних умов першого та другого роду в режимі створеної загальної програми розрахунку на електронно-обчислювальних машинах.

Список літератури

1. Риндюк В.І. Методика теплотехнічного розрахунку багатошарового середовища / В.І. Риндюк, Т. В. Прилипко // Вісник ВПІ. – 2003. – №3. – С. 35 – 38.
2. Риндюк В.І. Моделювання теплопровідності двомірних неоднорідних багатошарових середовищ / В.І. Риндюк, Т.О. Міщук, С.В. Риндюк // Сучасні технології, матеріали і конструкції в будівництві. Науково – технічний збірник. – 2006. – №3. – С. 105 – 111.
3. Рындюк В.И. Применение улучшенного интегрального метода прямых к решению задач теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом / В.И. Рындюк // Ред. Инженерно-физический журнал. – Минск, 1989-9с. деп. в ВИНИТИ 30.02.89, №2069-В.

Риндюк Володимир Іванович – к.ф-м.н., доцент кафедри теплогазопостачання і вентиляції Вінницького національного технічного університету.

Міщук Тетяна Олексіївна – студентка Вінницького національного технічного університету.

Риндюк Світлана Володимирівна – студентка Вінницького національного технічного університету.