УДК 519.6.075

В. О. Комар, к.т.н.; В. В. Тептя

АНАЛІЗ ЯКОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ КРИТЕРІАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

У статті пропонується метод, оснований на поєднанні теорії марковських процесів і принципів критеріального моделювання, що дозволяє, не втрачаючи загальності підходу, зробити вибір найкращого варіанту функціонування системи, що досліджується, за одним критерієм без визначення абсолютного (числового) значення вихідного ефекту. Крім цього цей метод дозволяє враховувати надійність системи при прийнятті рішення з її оптимізації.

Ключові слова: *якість функціонування, марковський процес, критеріальна модель.*

Вступ

Розвиток сучасної науки та техніки, а також нові економічні умови ініціюють нові задачі в галузі керування електроенергетичними системами (ЕЕС). Завдяки зростаючим можливостям обчислювальної та мікропроцесорної техніки стає реальним автоматизувати оптимальне керування режимами [1, 2], метою якого є збільшення надійності електропостачання і зменшення втрат електроенергії під час її вироблення, транспортування і розподілу.

У наш час системи управління в масштабі реального часу широко використовуються в електроенергетиці [3]. В ЕЕС система керування технологічним процесом відома як автоматизована система диспетчерського керування (АСДК). Вона відповідає за дистанційний моніторинг і керування енергетичними об’єктами генерувальних, передавальних і розподільних компаній.

АСДК належать до складних систем, тобто вони мають здатність під час відмови елементів продовжувати виконання своїх функцій, але з пониженою ефективністю, тобто можуть перебувати в декількох робочих станах. Ця особливість автоматизованих систем керування вимагає визначення такого показника як якість функціонування для оцінки ефективності її роботи, яка безпосередньо впливає на рівень досягнутого об’єктом керування (електроенергетичною системою) оптимального режиму [4]. Якість функціонування – це ступінь пристосованості системи до виконання визначених для неї функцій. Кількісний показник, що виражає міру корисності системи для споживача, називається показником або критерієм якості функціонування. Звичайно, в ньому враховується надійність системи як один з факторів, що впливає на результат задачі, яка вирішується [4, 5].

У зв’язку з цим розробка математичних методів дослідження АСДК з розподіленою архітектурою є важливим і **актуальним** завданням. **Мета** статті полягає у розробці математичної моделі якості функціонування систем оптимального керування станами таких динамічних систем як ЕЕС для підвищення ефективності їх експлуатації.

Математична модель якості функціонування системи

Розглядається система, яка в процесі експлуатації може набувати різних станів. Ці стани є робочими, але вони відрізняються між собою якістю виконання системою своїх функцій. Зміна станів зумовлена зміною рівня надійності елементів системи. У такому разі критерієм оптимальності при порівнянні варіантів функціонування системи є максимум знаходження її в станах, коли параметри знаходяться в межах допустимих значень. Зміну станів системи можна зобразити за допомогою графів, прикладом може служити граф на рисунку 1.

За графом (рис. 1) можна скласти систему диференційних рівнянь Колмогорова [6]. Взявши до уваги допущення про не врахування динаміки перехідних процесів між окремими станами ($\frac{dp_i}{dt} = 0$), система диференційних рівнянь буде мати вигляд:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} \nu_{ji} p_i = 0,\ j = \overline{2, n} \\ &\sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де p_i – вектор імовірностей станів досліджуваної системи; ν_{ij} – елементи матриці $\mathbf{\nu}$, яка є матрицею інтенсивностей переходів з одного стану в інший; m – кількість можливих станів досліджуваної системи; n – кількість напрямків зміни станів, що виходять з робочого стану 1 (див. рисунок 1).

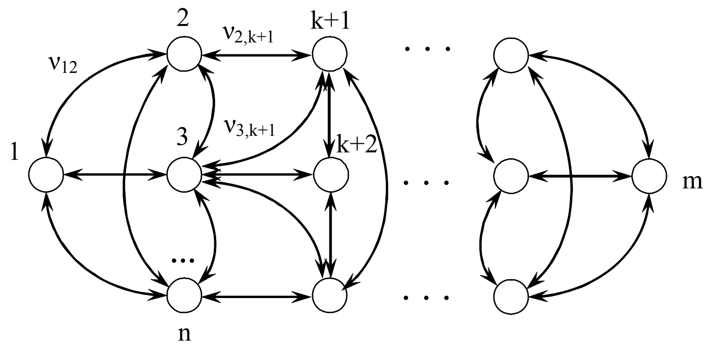

Рис. 1. Граф зміни станів системи

Для визначення імовірностей робочих станів і оцінки якості функціонування досліджуваної системи необхідно розв’язати алгебраїчну систему рівнянь (1), яка в більш загальному вигляді записується:

$$\mathbf{\nu} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

У критеріальному програмуванні систему рівнянь ортогональності та нормування можна записати [7]:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi} = \mathbf{b}, \tag{3}$$

де α – матриця показників; π – вектор критеріїв подібності.

Проаналізувавши системи рівнянь (2) та (3), можна відзначати, що матриця коефіцієнтів ν системи рівнянь (2) є аналогічною до матриці розмірностей α системи рівнянь (3), що застосовується в теорії подібності [7, 8, 9]. Вектор **p**, компоненти якого є по суті ваговими коефіцієнтами станів досліджуваного процесу, за своїм змістом відповідає вектору критеріїв подібності π, елементи якого є безрозмірними співвідношеннями параметрів системи, і в тому випадку, коли вони визначаються методом інтегральних аналогів, також є ваговими коефіцієнтами складових цільової функції (пронормовані до одиниці) [7]. Отже, можна провести аналогію між системою рівнянь (2) та (3).

Для підтвердження аналогії (одного з видів подібності) між системою рівнянь ортогональності та системою рівнянь Колмогорова використаємо теореми теорії подібності. Для цього побудуємо багаточлени від матриць α та ν.

Якщо скористатись інтерполяційним багаточленом [10], то матрицю $\boldsymbol{\alpha}$ системи рівнянь ортогональності (2) критеріального програмування і матрицю переходів $\mathbf{\nu}$ системи рівнянь (4) можна привести до матричного багаточлена. Використаємо для цього експоненціальну функцію $f(z) = e^{zt}$. Якщо мінімальний багаточлен (у даному випадку це характеристичний багаточлен $\Delta(z)$) складається тільки з лінійних множників $(z - z_k)$, то достатньо визначити функцію $f(z)$ в характеристичних точках $z_1, z_2, ..., z_m$. При цьому система рівнянь для коефіцієнтів інтерполяційного багаточлена має вигляд:

$$f(z_k) = a_0 + a_1 z_k + ... + a_{m-1} z_k^{m-1}, \tag{4}$$

або в матричній формі

$$\begin{bmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ ... \\ f(z_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \; z_1 \; z_1^2 \; ... \; z_1^{m-1} \\ 1 \; z_2 \; z_2^2 \; ... \; z_2^{m-1} \\ ... ... \; ... \\ 1 \; z_m \; z_m^2 \; ... \; z_m^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ ... \\ a_{m-1} \end{bmatrix}.$$

Розв'язавши цю систему відносно $a_0, a_1, ..., a_{m-1}$, отримаємо:

$$f(A) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i A^i .$$

Отже, в загальному вигляді матриця $\boldsymbol{\alpha}$ буде мати багаточлен виду:

$$f(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \boldsymbol{\alpha}^i . \tag{5}$$

А матриця $\mathbf{v}$:

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \mathbf{v}^i . \tag{6}$$

Зробивши таке перетворення, можна використовувати всі властивості скалярних багаточленів, в тому числі і наслідки теорем теорії подібності.

Відомо [11], що для встановлення подібності між оригіналом і моделлю замість умов:

$$\pi_i = \frac{a_i \prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_{ji}}}{f} = \text{idem}, \tag{7}$$

можуть використовуватися рівнозначні їм вирази:

$$\mu_i = \frac{\mu_{a_i} \prod_{j=1}^{n} \mu_{u_j}^{\alpha_{ji}}}{\mu_f} = 1, \tag{8}$$

де π_i – критерії подібності, визначені способом інтегральних аналогів; μ_i – індикатори подібності, які визначаються масштабами відповідних коефіцієнтів та параметрів моделі.

Використавши ці умови, можна довести подібність матричних багаточленів і відповідних їм матриць.

Для матричних багаточленів (5) та (6) умову (8) можна записати:

$$\frac{\mu_{a_1}}{\mu_f} = 1; \; \frac{\mu_{a_2} \mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f} = 1; \; \frac{\mu_{a_3} \mu_{\alpha/\nu}}{\mu_f} = 1 \text{ і т.д.},$$

де $\mu_{a_i} = \dfrac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}}$; $\mu_{\alpha/\nu} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}^{-1}$; $\mu_f = \dfrac{e^{|\boldsymbol{\alpha}|t}}{e^{|\mathbf{v}|t}}$.

У теорії матриць є розділ матричних перетворень [10]. Згідно з ним еквівалентне перетворення можна розглядати як переходи до нових координатних базисів для вектора x та у, тобто $x' = Q^{-1}x$ і $y' = Py$. Тобто перетворення $\widetilde{A} = PAQ$ відповідає незалежним перетворенням координат, які визначаються матрицями Q^{-1} та P (неособливі квадратні матриці).

Якщо вектори х та у перетворюються до одного координатного базису, то можна записати $P = Q^{-1}$. Тобто переходимо до перетворення подібності $\widetilde{A} = Q^{-1}AQ$. Важливою властивістю перетворення подібності є те, що визначник матриці інваріантний відносно цього перетворення:

$$\det \widetilde{A} = \det A.$$

Отже, таке перетворення не змінює власних значень матриці, тому можна записати:

$$\det[zE - \widetilde{A}] = \det[zE - A].$$

Результат розв'язку системи рівнянь (4) для матриць $\widetilde{A}$ і A буде однаковим.

Роль перетворювальної матриці Q грає модальна матриця H [10], тобто $\widetilde{A} = H^{-1}AH$. Вона може бути визначена як сукупність стовпців $\mathrm{h}^{(\mathrm{i})}$, які є розв'язком однорідних рівнянь:

$$(z_i E - A)h^{(i)} = 0 \quad i = \overline{1,n}, \tag{9}$$

де n – ранг матриці A.

За побудовою матриць $\boldsymbol{\alpha}$ та $\mathbf{v}$ можна відшукати таку матрицю H, яка б задовольняла системі однорідних рівнянь (9). Отже, $\mu_{a_i} = \frac{a_{i\alpha}}{a_{i\nu}} = 1$; $\mu_{\alpha/\nu} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v}^{-1} = 1$; $\mu_f = \frac{e^{\left|\boldsymbol{\alpha}^t\right|}}{e^{\left|\mathbf{v}^t\right|}} = 1$, а тому виконуються умови (8), які підтверджують подібність матриць ортогональності критеріального програмування та переходів системи рівнянь Колмогорова.

Подібність моделювання марковських процесів та критеріального моделювання дозволяє застосувати до системи рівнянь (2) принципи критеріального програмування.

Система рівнянь (3) у критеріальному програмуванні відповідає прямій задачі [7]:

$$\min \left\{ y(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \prod_{\mathrm{j}=1}^{n} x_j^{\alpha_{ji}} \right\}, \tag{10}$$

де $y(x)$ – деякий узагальнюючий техніко-економічний показник, який характеризує процес, що досліджується; x_j – змінні параметри системи, значення яких оптимізуються; a_i, α_{ji} – постійні коефіцієнти, значення яких визначаються властивостями системи; m – кількість членів цільової функції; n – кількість змінних.

За аналогією цільова функція критеріальної програми для системи рівнянь (2) запишеться так:

$$\min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\nu_{ji}} \right\}, \tag{11}$$

де $f(x)$ – функція відмов, що відображає вплив елементів системи на здатність виконувати нею поставлену задачу; c_i – постійні коефіцієнти (в задачах розглядуваного типу c_i=1); x_j – незалежні параметри, що характеризують стани системи.

Таким чином, отримана залежність (11) замість системи рівнянь, яка відображає функціонування системи керування, що досліджується.

Продовжуючи використовувати аналогії до прямої задачі КП можна записати двоїсту задачу [7]. Для рівняння (11) двоїста задача матиме вигляд:

$$d(P)=\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_i}{P_i}\right)^{P_i}, \tag{12}$$

де P_i – критерій подібності, який в даному випадку є ймовірністю перебування системи в стані і.

Отже, завдяки використаній подібності замість системи рівнянь (1) отримано дві функціональні залежності (11) та (12), які дозволяють оцінювати такі властивості системи, як відмова та якість функціонування.

Критеріальне моделювання якості функціонування системи

Функція (11) зручна у використанні, якщо її перевести до критеріального вигляду шляхом ділення на базис. За базис береться значення функції (11) для системи на моменти введення її в експлуатацію. Критеріальна функція відмов має такий вигляд:

$$f(x_*)=\sum_{i=1}^{m}P_i\prod_{j=1}^{n}x_{*j}^{\nu_{ji}}. \tag{13}$$

Графічний вид функції (13) показано на рисунку 2. Критерії подібності P_i визначаються з системи рівнянь (1). Для знаходження відносного значення коефіцієнтів впливу x_{*j} необхідно визначити обернену матрицю $\tilde{\boldsymbol{\nu}}$ до транспонованої матриці $\mathbf{v}^t$ [8], в якій останній стовпчик складається з –1. Далі знаходиться відношення між значеннями змінних x_j (після останнього тестування системи) та x_{0j} (після тестування перед вводом в експлуатацію).

$$x_{*j}=\frac{\prod_{i=1}^{m}P_i^{\tilde{\nu}_{ji}}}{\prod_{i=1}^{m}P_{0_i}^{\tilde{\nu}_{0ji}}}.$$

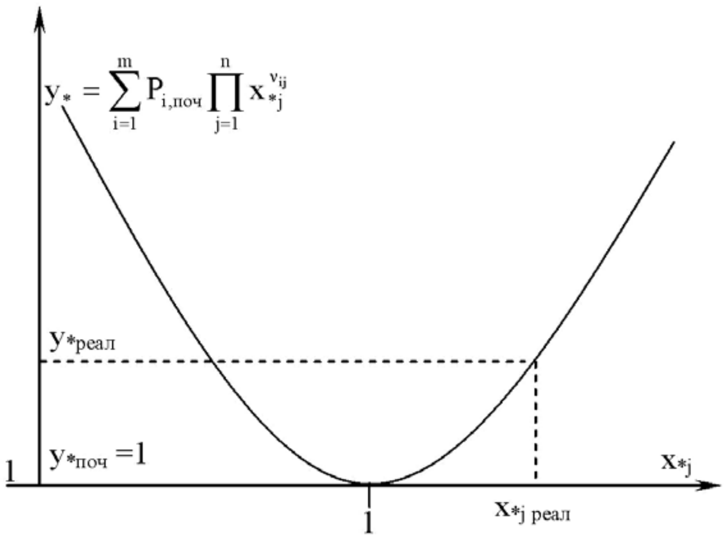

Рис. 2. Критеріальна функція відмов

У процесі експлуатації характеристики надійності елементів системи змінюються, що в свою чергу призводить до зміни стану системи в цілому. Тобто відбувається зміна ймовірностей перебування системи в тому чи іншому стані. Уточнення ймовірностей здійснюється за теоремою Байєса:

$$P_{i,реал} = P_{i,поч} \frac{p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_i)}{\sum_{j=1}^{m} P_{j,поч} p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_j)},$$

де $P_{i,реал}$ – апостеорні імовірності; $P_{i,поч}$ – апріорні імовірності, які визначені з системи рівнянь (1); $p(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n / s_i)$ – щільність ймовірностей визначення стану s_i для визначених ознак (параметрів) системи $\bar{x}$, якщо ознаки безперервні, і розподіл імовірностей, якщо ознаки дискретні.

Функція відмов може використовуватися як для оцінки реального стану системи, так і для уточнення зони нечутливості, враховуючи рівень надійності, під час реалізації закону керування, наприклад, у таких складних системах як електроенергетична.

Для оцінки якості функціонування системи та розробки стратегії по відновленню елементів системи використовується функція (12). Для зручності використання функції якості функціонування її необхідно привести до виду:

$$d_*(P_*) = \prod_{i=1}^{m} \frac{P_i^{P_i}}{P_{0i}^{P_{0i}}}.$$

Графічне зображення цієї функції зображено на рисунку 3.

Якщо розглянути задачу планування робіт по підвищенню якості функціонування системи, то краще розглянути годограф функції якості (див. рисунок 4). По осях відкладається зміна безвідмовності та ремонтопридатності. Ці параметри взяті умовно. Відповідно поле годографа розбито на п’ять областей по безвідмовності та ремонтопридатності. Ці області також розбиті умовно.

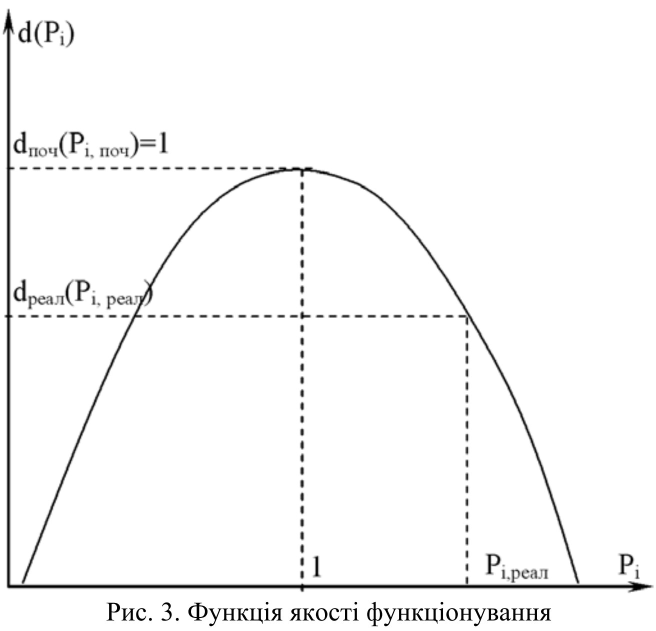

Рис. 3. Функція якості функціонування

Рис. 4. Розподіл вимог до надійності елементів

На рисунку 4 точка Т – досягнутий рівень надійності системи; М – точка, де функція якості функціонування досягає свого максимального значення; В – точка, яка відповідає бажаному рівню надійності системи; криві L_1, L_2, L_3 – лінії годографа функції $d(P_i)$, тобто геометричне місце точок, де функція зберігає своє значення. Кожна лінія годографа L_i відповідає певному рівню якості функціонування.

Кожний план заходів, спрямованих на зміну показників надійності елементів системи з метою підвищення якості її функціонування, представляє собою траєкторію S_i. Наприклад, на рисунку 4 траєкторія S_1 передбачає передусім реалізацію заходів, спрямованих на підвищення безвідмовності, і ремонтопридатності. З іншого боку, траєкторія S_2, передусім, підвищує характеристики ремонтопридатності. Якщо відома функція ресурсів, тобто функція затрат певного ресурсу для досягнення заданого рівня якості функціонування, то можна визначити вартість виконання траєкторії.

Висновки

Використовуючи описаний вище підхід, можна розв’язувати такі задачі:

1. Визначати область значень показників безвідмовності та ремонтопридатності елементів, які забезпечують заданий рівень якості функціонування системи (області обмежені лініями годографа).
2. Визначати мінімальні вимоги до ремонтопридатності та безвідмовності елементів, що забезпечують заданий рівень якості функціонування системи.
3. Оцінювати ступінь впливу показників надійності елементів на якість функціонування системи.
4. Визначати стратегію підвищення якості функціонування системи до заданого рівня в умовах природного старіння елементів та обмежень на ресурси.
5. Оцінювати необхідність та визначити черговість заходів з модернізації елементів.
6. Оцінювати необхідність та визначати види заходів для реконструкції системи за критерієм якості функціонування.
7. Оцінювати необхідність і визначати черговість заходів для продовження залишкового ресурсу елементів.

Досить суттєвим під час розв’язання цих задач є той факт, що результат отримується у відношенні до початкового стану. Це дозволяє значно скоротити кількість розрахунків для порівняння станів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Джексон П. Введение в экспертные системы. – М.: Издат. дом «Вильямс», 2001. – 624 с.

2. Основы теории оптимального управления/ Под ред. Кротова. – М.: Высшая школа, 1990. – 429 с.

3. Арзамасцев Д.А., Холен А.Н., Бартоломей П.И. АСУ и оптимизация режимов энергосистем. – М.: Наука, 1983. – 256 с.

4. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированых систем. Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: "Энергия", 1977. – 536 с.

5. Кузьмін І.В. Критерії оцінки ефективності, якості та оптимальності складних систем. // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – № 1(2). – 1994. – С. 5 – 10.

6. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. – М.: Наука, 1977. – 176 с.

7. Астахов Ю.Н., Лежнюк П.Д. Применение критериального метода в электроэнергетике. – К.: УМК ВО, 1989. – 137 с.

8. Бевз С.В. Розробка засобів критеріального моделювання для задач оптимального керування. Автореф. дис. к-та техн. наук: 01.05.02. – Вінниця, 1999. – 19 с.

9. Лежнюк П.Д., Комар В.О., Томашевський Ю.В. Критеріальне моделювання в задачах оцінки якості функціонування систем // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2003. – №3. – С. 48 – 52.

10. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. – К.: Техніка, 1977. – 768 с.

11. Лежнюк П.Д., Собчук Н.В. Параметрична подібність в задачах оптимізації електричних систем. Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2005. – 100 с.

Комар В’ячеслав Олександрович – доцент кафедри,

Тептя Віра Володимирівна – асистент кафедри.

Кафедра електричних станцій та систем, Вінницький національний технічний університет