УДК 519.65.652

І. В. Богач, к. т. н.; М. О. Машницький; А. Ф. Хомчук

МОДЕЛЮВАННЯ ТРИВИМІРНИХ ПОВЕРХОНЬ НА ОСНОВІ МОДИФІКАЦІЇ РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ БЕССЕЛЯ

У цій статті розроблено метод моделювання тривимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Бесселя. Розглянуто приклад використання розробленого методу.

***Ключові слова**: інтерполяція, моделювання поверхонь, різницевий метод Бесселя, функція двох змінних, тривимірна поверхня.*

Актуальність. Постановка завдання

Моделювання тривимірних поверхонь є достатньо актуальною задачею. Стрімкий розвиток електроніки та техніки призвів до необхідності дослідження ефективності розроблених пристроїв, яка залежить від їхніх координат, наприклад, зміна вологості в кімнаті – від розташування розробленого кондиціонера. Під час дослідження об'єкта, який описується функцією трьох змінних, постає завдання ідентифікації їхніх математичних моделей. Для вирішення цієї задачі потрібно застосовувати математичне моделювання, яке об'єднує експеримент та теорію. Саме таке моделювання використовується в медицині, космічних дослідженнях, геофізиці. Це значно розширює сферу впровадження результатів досліджень, окрім традиційної комп'ютерної графіки.

Одним з найпоширеніших методів моделювання функцій є інтерполяційний метод Бесселя. На цей час алгоритм методу Бесселя розроблений лише для функцій двох змінних. У цій статі пропонуємо модифікацію метода Бесселя для моделювання тривимірних поверхонь.

Задача моделювання тривимірних поверхонь на основі інтерполяції функції полягає в побудові функції $F(x,y,z)$, що приймає в деяких точках x_i, y_j, z_k $(i,j,k=\overline{0,n})$, які називаються вузлами інтерполювання, окремі значення $F(x_0,y_0,z_0)=\varphi_{000}, F(x_1,y_1,z_1)=\varphi_{111}$, …, $F(x_n,y_n,z_n)=\varphi_{nnn}$. У загальному випадку інтерполяція функція зводиться до знаходження її нетабличних значень [1 – 5].

Задачі моделювання тривимірних поверхонь необхідно розв'язувати при отриманні зображень у задачах різного типу діагностувань, топографії та в багатьох інших галузях. Зараз у цій галузі проводиться активна дослідницька робота провідних компаній з виробництва графічних прискорювачів та компаній з виготовлення програмного забезпечення для тривимірного моделювання та спеціальних ефектів.

Метою статті є підвищення ефективності моделювання шляхом розширення класичних методів на випадок трьох змінних.

Опис методу

Для виведення формули Бесселя використаємо другу інтерполяційну формулу Гауса [6]:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \varphi_{0,0,0} + p\Delta^{100}\varphi_{-1,0,0} + q\Delta^{010}\varphi_{0,-1,0} + r\Delta^{001}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p}{2!}\Delta^{200}\varphi_{-1,0,0} + \\
&+ pq\Delta^{110}\varphi_{-1,-1,0} + pr\Delta^{101}\varphi_{-1,0,-1} + qr\Delta^{011}\varphi_{0,-1,-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^{020}\varphi_{0,-1,0} + \\
&+ \frac{(r+1)r}{2!}\Delta^{002}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-2,0,0} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\times \\
&\times\Delta^{030}\varphi_{0,-2,0} + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{0,0,-2} + \frac{(p+1)pq}{2!}\Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0} + \\
&+ \frac{(p+1)pr}{2!}\Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{p(q+1)q}{2!}\Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0} + \frac{(q+1)qr}{2!}\Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1} + \\
&+ \frac{p(r+1)r}{2!}\Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{q(r+1)r}{2!}\Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1} + pqr\Delta^{111}\varphi_{-1,-1,-1} + \ldots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Візьмемо $(2n+2)^3$ рівновіддалених вузлів інтерполяції в напрямку всіх змінних інтерполювання: $(x_{-n},y_{-n},z_{-n}),(x_{-(n-1)},y_{-(n-1)},z_{-(n-1)}),\ldots,(x_0,y_0,z_0),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),(x_n,y_n,z_n),$ $(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$ з кроком h_x,h_y,h_z відповідно до напрямків інтерполяції $\varphi_{i,j,k} = f(x_i,y_j,z_k),\quad (i=\overline{-n,n+1},\quad j=\overline{-n,n+1},\ k=\overline{-n,n+1})$ – задані значення функції $\varphi = f(x,y,z)$.

Якщо взяти за початкові значення $x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0$ та $\varphi = \varphi_0$, та якщо використати вузли $(x_i,y_j,z_k),\ (i=\overline{-n,n},\ j=\overline{-n,n},k=\overline{-n,n})$, то ми отримаємо вираз:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \varphi_{0,0,0} + p\Delta^{100}\varphi_{-1,0,0} + q\Delta^{010}\varphi_{0,-1,0} + r\Delta^{001}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p}{2!}\Delta^{200}\varphi_{-1,0,0} + \\
&+ pq\Delta^{110}\varphi_{-1,-1,0} + pr\Delta^{101}\varphi_{-1,0,-1} + qr\Delta^{011}\varphi_{0,-1,-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^{020}\varphi_{0,-1,0} + \\
&+ \frac{(r+1)r}{2!}\Delta^{002}\varphi_{0,0,-1} + \frac{(p+1)p(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-2,0,0} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\times \\
&\times\Delta^{030}\varphi_{0,-2,0} + \frac{(r+1)r(r-1)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{0,0,-2} + \frac{(p+1)pq}{2!}\Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0} + \\
&+ \frac{(p+1)pr}{2!}\Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{p(q+1)q}{2!}\Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0} + \frac{(q+1)qr}{2!}\Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1} + \\
&+ \frac{p(r+1)r}{2!}\Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1} + \frac{q(r+1)r}{2!}\Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1} + pqr\Delta^{111}\varphi_{-1,-1,-1} + \ldots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Візьмемо за початкові значення $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$ та $\varphi = \varphi_1$, і використаємо вузли $(x_{1+i},y_{1+j},z_{1+k}),\ (i=\overline{-n,n},\ j=\overline{-n,n},k=\overline{-n,n})$. Тоді $\dfrac{x-x_1}{h_x} = \dfrac{x-x_0-h}{h_x} = p-1;\quad \dfrac{y-y_1}{h_y} = \dfrac{y-y_0-h}{h_y} = q-1;\quad \dfrac{z-z_1}{h_z} = \dfrac{z-z_0-h}{h_z} = r-1$, причому відповідно індекси всіх різниць у правій частині формули (2) збільшаться на одиницю. Якщо замінити в правій частині формули (2) q на $q-1$ та збільшити індекси всіх різниць на 1, то отримаємо допоміжну інтерполяційну формулу:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \varphi_{1,1,1} + (p-1)\Delta^{100}\varphi_{0,1,1} + (q-1)\Delta^{010}\varphi_{1,0,1} + (r-1)\Delta^{001}\varphi_{1,1,0} + \frac{p(p-1)}{2!}\times \\
&\times \Delta^{200}\varphi_{0,1,1} + (p-1)(q-1)\Delta^{110}\varphi_{0,0,1} + (p-1)(r-1)\Delta^{101}\varphi_{0,1,0} + 3 \\
&+ (q-1)(r-1)\Delta^{011}\varphi_{1,0,0} + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^{020}\varphi_{1,0,1} + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^{002}\varphi_{1,1,0} + \\
&+ \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-1,1,1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^{030}\varphi_{1,-1,1} + \\
&+ \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^{003}\varphi_{1,1,-1} + \frac{p(p-1)(q-1)}{2!}\Delta^{210}\varphi_{0,0,1} + \\
&+ \frac{p(p-1)(r-1)}{2!}\Delta^{201}\varphi_{0,1,0} + \frac{(p-1)q(q-1)}{2!}\Delta^{120}\varphi_{0,0,1} + \\
&+ \frac{q(q-1)(r-1)}{2!}\Delta^{021}\varphi_{1,0,0} + \frac{(p-1)r(r-1)}{2!}\Delta^{102}\varphi_{0,1,0} + \\
&+ \frac{(q-1)r(r-1)}{2!}\Delta^{012}\varphi_{1,0,0} + (p-1)(q-1)(r-1)\Delta^{111}\varphi_{0,0,0} + \ldots
\end{aligned} \tag{3}
$$

Візьмемо середнє арифметичне формул (2) та (3) і після нескладних перетворень отримаємо інтерполяційну формулу Бесселя:

$$
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{\varphi_{1,1,1} + \varphi_{0,0,0}}{2} + (p-\tfrac{1}{2})\Delta^{100}\varphi_{0,1,1} + (q-\tfrac{1}{2})\Delta^{010}\varphi_{1,0,1} + (r-\tfrac{1}{2})\Delta^{001}\varphi_{1,1,0} + \\
&+ \frac{p(p-1)}{2!}\frac{\Delta^{200}\varphi_{0,1,1} + \Delta^{200}\varphi_{-1,0,0}}{2} + (p-\tfrac{1}{2})(q-\tfrac{1}{2})\Delta^{110}\varphi_{0,0,1} + (p-\tfrac{1}{2})\times \\
&\times (r-\tfrac{1}{2})\Delta^{101}\varphi_{0,1,0} + 3(q-\tfrac{1}{2})(r-\tfrac{1}{2})\Delta^{011}\varphi_{1,0,0} + \frac{q(q-1)}{2!}\times \\
&\times \frac{\Delta^{020}\varphi_{1,0,1} + \Delta^{020}\varphi_{0,-1,0}}{2} + \frac{r(r-1)}{2!}\frac{\Delta^{002}\varphi_{1,1,0} + \Delta^{002}\varphi_{0,0,-1}}{2} + \\
&+ \frac{p(p-\frac{1}{2})(p-1)}{3!}\Delta^{300}\varphi_{-1,1,1} + \frac{q(q-\frac{1}{2})(q-1)}{3!}\Delta^{030}\varphi_{1,-1,1} + \frac{r(r-\frac{1}{2})(r-1)}{3!}\times \\
&\times \Delta^{003}\varphi_{1,1,-1} + \frac{p(p-1)(q-\frac{1}{2})}{2!}\frac{\Delta^{210}\varphi_{0,0,1} + \Delta^{210}\varphi_{-1,-1,0}}{2} + \frac{p(p-1)(r-\frac{1}{2})}{2!}\times \\
&\times \frac{\Delta^{201}\varphi_{0,1,0} + \Delta^{201}\varphi_{-1,0,-1}}{2} + \frac{(p-\frac{1}{2})q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^{120}\varphi_{0,0,1} + \Delta^{120}\varphi_{-1,-1,0}}{2} + \\
&+ \frac{q(q-1)(r-\frac{1}{2})}{2!}\frac{\Delta^{021}\varphi_{1,0,0} + \Delta^{021}\varphi_{0,-1,-1}}{2} + \frac{(p-\frac{1}{2})r(r-1)}{2!}\times \\
&\times \frac{\Delta^{102}\varphi_{0,1,0} + \Delta^{102}\varphi_{-1,0,-1}}{2} + \frac{(q-\frac{1}{2})r(r-1)}{2!}\frac{\Delta^{012}\varphi_{1,0,0} + \Delta^{012}\varphi_{0,-1,-1}}{2} + \\
&+ (p-\tfrac{1}{2})(q-\tfrac{1}{2})(r-\tfrac{1}{2})\Delta^{111}\varphi_{0,0,0} + \ldots,
\end{aligned} \tag{4}
$$

де $p=\frac{x-x_0}{h_x}$, $q=\frac{y-y_0}{h_y}$, $r=\frac{z-z_0}{h_z}$.

Введемо означення узагальненого степеня для функцій трьох змінних. Узагальненим степенем чисел p,q та r будемо називати добуток, який містить у собі n множників, перший з яких дорівнює $\left(p-\frac{1}{2}\right),\left(q-\frac{1}{2}\right)$ та $\left(r-\frac{1}{2}\right)$, за умови, що n – непарне число. Якщо n – парне число то перший множник дорівнює p,q та r, а кожний наступний на i^2 менше від попереднього ($i=\overline{1..(\lceil n/2\rceil-1)}$):

$$p^{[n]}=\left(p-\frac{1}{2}\right)^c p(p-1)(p+1)(p-2)(p+2)...(p+(w-1));$$

$$q^{[n]}=\left(q-\frac{1}{2}\right)^c q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)...(q+(w-1)); \qquad (5)$$

$$r^{[n]}=\left(r-\frac{1}{2}\right)^c r(r-1)(r+1)(r-2)(r+2)...(r+(w-1)),$$

де $c=\begin{cases}1, \text{ якщо } n=1,3,5,... \\ 0, \text{ якщо } n=2,4,6,...\end{cases}$; $w=\lceil n/2\rceil$.

$$P(x,y,z)=\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2n}\sum_{k=0}^{2n}\frac{p^{[i]}\cdot q^{[j]}\cdot r^{[k]}}{i!\cdot j!\cdot k!}\frac{\Delta^{i,j,k}\varphi_{m,l,u}+\Delta^{i,j,k}\varphi_{m+1,l+1,u+1}}{2}, \qquad (6)$$

де $m=-\lceil i/2\rceil$; $l=-\lceil j/2\rceil$; $u=-\lceil k/2\rceil$.

Інтерполяційна формула Бесселя (6), як слідує зі способу виводу, являє собою поліном, який збігається із заданою функцією $\varphi=f(x,y,z)$ в *2n+2* точках $(x_{-n},y_{-n},z_{-n}),(x_{-(n-1)},y_{-(n-1)},z_{-(n-1)}),...,(x_0,y_0,z_0),...,(x_{n-1},y_{n-1},z_{n-1}),(x_n,y_n,z_n),(x_{n+1},y_{n+1},z_{n+1})$.

Оцінка похибки інтерполяційної формули Бесселя

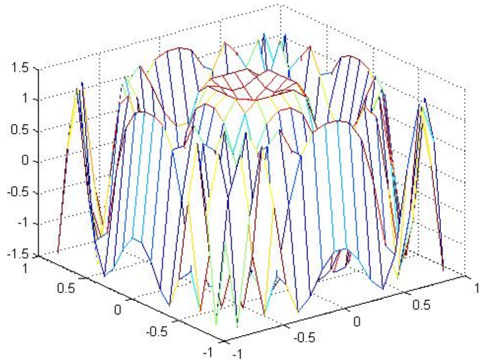
Якщо *2n+1* – порядок максимальної використовуваної різниці таблиці, $x\in[x_0-nh,x_0+nh]$, $y\in[y_0-nh,y_0+nh]$ та $z\in[z_0-nh,z_0+nh]$ то:

$$R_n(x,y,z)=q(q^2-1^2)(q^2-2^2)...(q^2-(n+1))p(p^2-1^2)(p^2-2^2)...(p^2-(n+1))r(r^2-1^2)\times$$
$$\times(r^2-2^2)...(r^2-(n+1))\frac{h^{2n+2}f^{(2n+2),(2n+2),(2n+2)}(\xi_x,\xi_y,\xi_z)}{(2n+2)!(2n+2)!(2n+2)!}, \qquad (7)$$

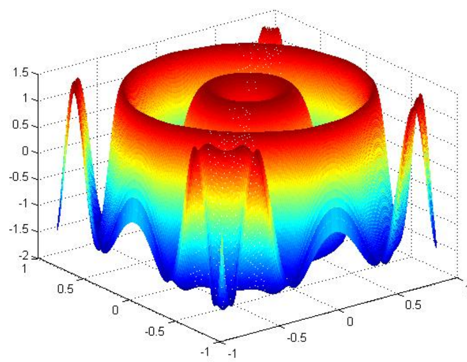
де $p=\frac{x-x_0}{h_x}$, $q=\frac{y-y_0}{h_y}$, $r=\frac{z-z_0}{h_z}$, $\xi_x\in[x_0-nh,x_0+nh]$, $\xi_y\in[y_0-nh,y_0+nh]$ та $\xi_z\in[z_0-nh,z_0+nh]$.

Якщо функція $f(x,y,z)$ задана у вигляді таблиці, то при невеликому кроці h приймають:

$$R_n(x,y,z) = q(q^2-1^2)(q^2-2^2)\dots(q^2-n^2)p(p^2-1^2)(p^2-2^2)\dots(p^2-n^2)\times \\ \times r(r^2-1^2)(r^2-2^2)\dots(r^2-n^2)\times \\ \times\frac{\Delta^{(2n+1),(2n+1),(2n+1)}y_{-n-1,-n-1,-n-1}+\Delta^{(2n+1),(2n+1),(2n+1)}y_{-n,-n,-n}}{2(2n+1)!(2n+1)!(2n+1)!}, \quad (8)$$



а)



б)

Рис. 1. Побудова поверхні методом Бесселя

На рис. 1 а зображена поверхня, яка отримана з початкових значень функції $\varphi(x,y,z)$. На рис. 1 б розташована поверхня, яку ми отримали в результаті застосування модифікованої інтерполяційної формули Бесселя для функції, яка залежить від трьох змінних.

Висновки

У цій статті запропоновано метод математичного моделювання трьохвимірних поверхонь за допомогою модифікованої інтерполяційної функції трьох змінних за методом Бесселя.

Розглянута математична модель є досить проста та ефективна і може бути використана на практиці в таких галузях, як медицина, космічні дослідження, геофізика для моделювання трьохвимірних поверхонь, інтерполяції або відновлення функції, які описують величину, яка залежить від координат простору.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Половко А. М., Бутусов П. Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 320 с.
2. Квєтний Р. Н. Методи комп'ютерних обчислень. – Навчальний посібник. – Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.
3. Бахвалов Н. С. Численные методы. – [2 изд.]. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
4. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.
5. Иванов В. В. Методы вычислений на ЕОМ. – Киев: Наукова думка,1986. – 584 с.
6. Машницький М. О. Квєтний Р. Н. Моделювання трьохвимірних поверхонь на основі модифікації різницевого методу Гауса // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – Спецвипуск, 2007. – С.105 - 108.

Богач Ілона Віталіївна – к. т. н., доцент кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки, +380-50-388-66-78, ibogatch@mail.ru.

Машницький Максим Олександрович – аспірант кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.

Хомчук Анатолій Феофанович – старший викладач кафедри автоматики та інформаційно-вимірювальної техніки.

Вінницький національний технічний університет.