УДК 004.627+517.962.27

В. А. Лужецький, д. т. н., проф.; В. М. Михалевич, д. т. н., проф.; О. В. Михалевич; В. А. Каплун

ОЦІНКА КІЛЬКОСТІ УНІКАЛЬНИХ ЛІНІЙНИХ РЕКУРЕНТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінійні рекурентні послідовності, для яких кожен член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх, досліджено з погляду можливого ущільнення та шифрування інформації. Отримано співвідношення для визначення всіх членів таких послідовностей, що належать деякому інтервалу, за умови певних обмежень на їх перші два члени. Встановлено, що щільність заповнення послідовності натуральних чисел указаними членами є недостатньою для здобуття ефекту з високою практичною цінністю.

Ключові слова: *лінійні рекурентні послідовності, m-значні числа, щільність, ущільнення.*

Вступ

Відомі підходи до ущільнення, що ґрунтуються на використанні статистичних властивостей даних і на використанні словника, а також на певних представленнях числових даних [1]. Проте тривають пошуки більш ефективних методів ущільнення. Один із підходів у цьому напрямку ґрунтується на використанні певних функціональних залежностей даних, що представлені як цілі числа. У роботах [2, 3] запропоновано підхід до ущільнення даних, який ґрунтується на компактному представленні великих чисел за допомогою лінійних однорідних рекурентних послідовностей другого порядку. Однак відсутні теоретичні оцінки кількості унікальних послідовностей такого типу, за певних обмежень на перші члени, які, у свою чергу, дозволили б отримати оцінку потенційних можливостей такого способу ущільнення даних.

Мета цієї роботи полягає в дослідженні щільності заповнення членами вказаних послідовностей певних діапазонів натуральних чисел.

Завдання представленої роботи:

– розробка методики оцінки кількості унікальних лінійних однорідних рекурентних послідовностей другого порядку за певних обмежень на їх перші два члени;

– отримання співвідношення для визначення кількості унікальних послідовностей указаного типу;

– отримання оцінки для визначення щільності заповнення діапазону натуральних чисел членами досліджуваних послідовностей.

Основна частина

Розглянемо узагальнені послідовності Фібоначчі [4], а саме: послідовності, для яких кожен член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

$$u_1, u_2, ..., u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, ... \quad n = 3, 4, ..., \tag{1}$$

де u_1, u_2 – додатні цілі числа.

У [5] сформульовано та доведено таку властивість: будь-яка послідовність чисел, що визначається співвідношенням (1), при $m>2$ містить 4 або 5 m-значних чисел. Дійсно, відповідно до наведеного доведення [0], формулювання цієї властивості має бути таким: для будь-яких u_1, u_2 послідовності (1) існує таке ціле число $M=M(u_1, u_2)$, що для всіх $m \geq M$ у послідовності зустрічається тільки 4 або 5 m-значних чисел.

Приведене формулювання є узагальненням властивості, що сформульована в [6] щодо послідовності чисел Фібоначчі, для якої $M=2$.

Ґрунтуючись на замкненому співвідношенні для загального члена послідовності (1),

$$u_n = u_1 \cdot \frac{\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}}{\sqrt{5}} + u_2 \cdot \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\sqrt{5}}, \qquad (2)$$

де

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad (3)$$

можна отримати формулу для обчислення кількості k_m m-значних чисел послідовності (1) залежно від значень m, u_1, u_2:

$$k_m = \begin{cases} 5, & \{M\} \le \left\{\dfrac{1}{\lg\alpha}\right\} \approx 0,78972, \\ 4, & \{M\} > \left\{\dfrac{1}{\lg\alpha}\right\} \approx 0,78972, \end{cases} \qquad (4)$$

$$M = \frac{0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(\dfrac{u_2 - u_1}{\alpha} + u_1\right)}{\lg\alpha},$$

де дробова частина числа x позначена $\{x\}$.

Безпосереднім обчисленням у середовищі системи символьної математики Maple було здійснено перевірку правильності співвідношення (4) для таких діапазонів варіювання аргументів: m=8÷20, u_1=1÷300, u_2=1÷300.

Фіксуванням двох параметрів із трьох і зміною третього параметра в зазначеному діапазоні досліджувалася частота появи значень k_m=4, k_m=5. На основі отриманих даних побудовано таблицю розподілу можливої кількості k_m m-значних чисел послідовності (1).

Таблиця 1

Розподіл k_m

$(k_n)_i$	4	5
p_i	0,21	0,79

Такий самий результат випливає із співвідношення (4) та припущення про рівномірний розподіл мантис чисел, що визначаються за співвідношенням

$$\left\{\left(0,5 \cdot \lg 5 + m - \lg\left(u_2 - u_1/\alpha + u_1\right)\right)/\lg\alpha\right\}.$$

Очевидно, що щільність заповнення ряду натуральних чисел членами окремої рекурентної послідовності (1) є дуже малою вже для m>4 і швидко зменшується зі збільшенням m. Разом з тим, для оцінки перспективності застосування перетворень цілих чисел за допомогою послідовностей (1), необхідно оцінити кількість унікальних послідовностей за певних обмежень на перші два члени.

Обмежимо діапазон зміни перших двох членів послідовності відрізком [1, 99]. Обчислимо загальну кількість послідовностей (1), що можуть бути утворені за таких обмежень. Ця кількість дорівнює числу розміщень із повтореннями з множини N=99 елементів по k=2 елементи:

$$\overline{A}_N^k = N^k = 99^2 = 9801. \qquad (5)$$

Але не всі такі послідовності є унікальними. Під множиною унікальних послідовностей розумітимемо такий набір послідовностей, для кожної з яких виконується умова: ця послідовність не може бути отримана відкиданням скінченої кількості p>0 перших членів будь-якої іншої послідовності зазначеної множини. Наведемо приклад двох послідовностей типу (1):

1) 3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898, 1453, 2351, 3804, 6155, 9959, 16114, 26073, 42187, …

2) 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898, 1453, 2351, 3804, 6155, 9959, 16114, 26073, 42187, 68260,110447, …

Очевидно, що другу послідовність можна отримати із першої відкиданням її перших семи членів.

Отже, нашою задачею є визначення множини унікальних послідовностей та обчислення їх кількості за наявності певних обмежень на діапазон зміни перших двох членів послідовності. Для цього запропоновано такий алгоритм:

1. Створюється пуста множина $M^{(2)}$, елементами якої є упорядковані пари чисел.
2. Для кожної із 9801 пари чисел $a_1 \in [1, 99]$, $a_2 \in [1, 99]$ послідовність (1) продовжується вліво до найменшого додатного u_1. Фіксується отримана пара чисел $[u_1, u_2]_i$.
3. Перевіряється існування поточного елемента у множині $M^{(2)}$. Якщо такий елемент не існує, то поточна пара чисел вноситься до зазначеної множини.

В результаті формується множина $M^{(2)}$ унікальних послідовностей (1), кожна з яких представлена її першими двома членами u_1, u_2, що задовольняють умову $u_2-u_1 \le 0$.

На рис. подано графічну ілюстрацію до розташування унікальних послідовностей для різних діапазонів можливих значень перших двох членів послідовностей (вертикальна колонка чисел – значення u_1, горизонтальна – u_2). Знаком "+" позначено всі клітини, які є перетином пари чисел, що породжують унікальну послідовність. Знаком "–" – неунікальну послідовність.

На основі наведених даних побудовано співвідношення для обчислення кількості унікальних послідовностей q_N, перші два члени яких задовольняють умови

$$u_2 - u_1 \le 0;\ u_1 \in [1, N],\ u_2 \in [1, N]. \tag{6}$$

Це співвідношення має вигляд

$$q_N = N^2 - \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (2i-1) - N + 1 - \sum_{i=1}^{\frac{N-3}{2}} 2i. \tag{7}$$

Після нескладних перетворень отримаємо співвідношення для обчислення кількості унікальних послідовностей q_N залежно від діапазону зміни перших двох членів

$$q_N = \frac{1}{2} \cdot N \cdot (N+1). \tag{8}$$

При N=99 ефект ущільнення може бути виявлений на 8-значних числах. Згідно з (4), припустимо, що кількість k_m=5 m-значних чисел послідовності (1) трапляється в $\frac{0,79}{0,21} \approx 3,76$ разів частіше, ніж k_m =4. Тоді щільність заповнення діапазону натуральних чисел $10^7 \div 10^8$ -1 членами послідовності (1) можна визначити як відношення всіх чисел послідовності, які потрапляють у заданий діапазон до довжини цього діапазону:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{q_{99} \cdot (5 \cdot 0,79 + 4 \cdot 0,21)}{(10^8 - 1) - (10^7 - 1)} = \\ &= \frac{4950 \cdot 4,79}{9 \cdot 10^7} \approx 0,00027 \end{aligned}. \tag{9}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+	-	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	-	+	+	+	+	+
3	-	-	+	-	-	-	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	+
5	-	-	-	-	+	-	-	-	-
6	-	-	-	+	+	+	-	-	-
7	-	-	+	+	+	+	+	-	-
8	-	+	+	+	+	+	+	+	-
9	+	+	+	+	+	+	+	+	+

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	-	+	+	+	+	+	+
3	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+
5	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
6	-	-	-	-	+	+	-	-	-	-
7	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-
8	-	-	+	+	+	+	+	+	-	-
9	-	+	+	+	+	+	+	+	+	-
10	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+
3	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+
5	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+
6	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
7	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-
8	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-
9	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-
10	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
2	-	+	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
3	-	-	+	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+
4	-	-	-	+	-	-	-	-	+	+	+	+	+
5	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	+	+
6	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+
7	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	-
9	-	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	-	-
10	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
11	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-
12	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-

Рис. Ілюстрація до закономірностей розташування унікальних послідовностей для різних діапазонів можливих значень перших двох членів послідовностей (1)

Із збільшенням діапазону зміни перших двох чисел послідовності зростає й довжина чисел, для яких проявляється ефект ущільнення. Узагальнюючи (8) за умови N=10^r-1 (r=2, 3, …), запишемо

$$p_r = \frac{10^r \cdot \left(10^r - 1\right) \cdot 4,79}{2 \cdot \left(10^{2r+4} - 10^{2r+3}\right)} \approx \approx \frac{4,79}{18 \cdot 10^3} \approx 0,00027, \tag{10}$$

звідки випливає, що щільність заповнення послідовності натуральних чисел числами послідовності (1) не змінюється з ростом діапазону N за вказаним законом.

Відповідно до співвідношення (9), кількість m-значних чисел для всіх послідовностей (1), що задовольняють умови (6) при N=99, дорівнює 4950*4,79≈23711. Для перевірки точності отриманої оцінки щільності p_r за спеціально складеною програмою в середовищі системи символьної математики Maple визначено множину m-значних чисел для різних значень m. Результати обчислень приведено в табл. 2.

Таблиця 2

Кількість n_m m-значних чисел послідовності

m	n_m	Похибка δ, %
8	23667	0,19
9	23682	0,12
10	23712	0,004
11	23692	0,08
12	23668	0,18

Очевидно, що отримана щільність надто мала і це зумовлює необхідність подальших пошуків для здобуття результатів, що мають більшу практичну цінність.

Висновки

1. Розроблено методику визначення кількості унікальних рекурентних послідовностей (1), які задовольняють умови (6). Побудована для декількох окремих випадків наглядна ілюстрація до визначення унікальних рекурентних послідовностей (1) дозволила отримати співвідношення для обчислення кількості унікальних послідовностей та сумарної кількості їх членів, що належать певному інтервалу (залежно від діапазону зміни перших двох членів).
2. Запропоновано співвідношення для визначення щільності заповнення діапазону натуральних чисел членами послідовності (1) у вигляді відношення кількості всіх членів унікальних послідовностей, які потрапляють у заданий діапазон, до довжини цього діапазону.
3. Теоретична оцінка вказаної щільності не перевищує $3 \cdot 10^{-4}$ і за певних умов не змінюється із зростанням інтервалу варіювання перших двох членів послідовностей та відповідного збільшення досліджуваного діапазону.
4. Експериментальна перевірка за допомогою спеціально складеної програми в середовищі системи символьної математики Maple підтвердила достовірність висновків для певного діапазону значень перших двох членів послідовності.
5. Невисоке значення щільності зумовлює необхідність подальших пошуків у обраному напрямку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ватолин Д. Методы сжатия данных. Устройство архиваторов, сжатие изображений и видео / Д. Ватолин, А. Ратушняк, М. Смирнов, В. Юкин. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 2003. – 384 с.
2. Анисимов А. В. Обратное преобразование Фибоначчи / А. В. Анисимов, Я. П. Рындин, С. Е. Редько //

Кибернетика. – 1982. – № 3. – С. 9 – 11.

3. Кшановський О. Д. Арифметичні методи ущільнення цифрової інформації / О. Д. Кшановський, С. В. Тітарчук, В. А. Лужецький // Вісник ВПІ. – 1999. – № 5. – С. 83 – 87.

4. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи / Н. Н. Воробьёв. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

5. Лужецький В. А. Щільність заповнення ряду натуральних чисел членами лінійних рекурентних послідовностей другого порядку / В. А. Лужецький, В. М. Михалевич, О. В. Михалевич, В. А. Каплун // Вісник Вінницького політехнічного університету. – 2010. – № 4. – С. 41 – 45.

6. Алфутова Н. Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. – М.: МЦНМО, 2002. – 264 с. – ISBN 5-94057-038-0.

Лужецький Володимир Андрійович – д. т. н., професор, завідувач кафедри захисту інформації, тел.: (0432)-598-386, E-mail: lva_zi@mail.ru.

Михалевич Володимир Маркусович – д. т. н., професор, завідувач кафедри вищої математики, тел.: (0432)-598-594, (0432)-598-591, E-mail: vmykhal@gmail.com.

Михалевич Олексій Володимирович – студент гр. 1БС-07, e-mail: mikhal.alex@gmail.com.

Каплун Валентина Аполінаріївна – старший викладач кафедри захисту інформації.

Вінницький національний технічний університет.