Міністерство освіти і науки України
Вінницький національний технічний університет

В. І. Риндюк, І. В. Коц, В. О. Приятельчук

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ. ПРИКЛАДИ ТА ЗАВДАННЯ

Вінниця ВНТУ 2010

УДК 519.87(075.8)
Р 95

С. К. Ткаченко, доктор технічних наук, професор
П. С. Анісімов, доктор технічних наук, професор

Рекомендовано до видання Ученою радою Вінницького національного технічного університету Міністерства освіти і науки України

Р 95 В. І. Риндюк, І. В. Коц, В. О. Приятельчук. Математичне моделювання в системному аналізі. Приклади та завдання : Навчальний посібник - Вінниця : ВНТУ, 2010. - 102 с.

Навчальний посібник присвячений висвітленню основних положень системного аналізу, а саме: понять системи, процедур та постулатів математичного моделювання і програмування, Мета його сприяти закріпленню теоретичного матеріалу із основ системного аналізу, широкому впровадженню математичного моделювання у технологію будівельного виробництва та розробку, спорудження і експлуатацію систем теплогазопостачання і вентиляції.

Навчальний посібник розрахований на студентів бакалаврського напряму "Будівництво".

УДК 519.87(075.8)

ЗМІСТ

Вступ

Науково-технічна революція привела до виникнення таких понять, як великі і складні системи, яким притаманні специфічні проблеми. Необхідність розв'язання цих проблем викликала до життя множину прийомів, методів, підходів, які накопичувались, розвивались, узагальнювались, створюючи цим цілі технології змагання кількісних і якісних складнощів.

Як сказав академік М.М. Амосов: "Є декілька важливих проблем, які шкодять людям бути щасливими: хвороби, виховання дітей, соціальні відношення. Причина одна: невміння керувати складними системами організмом, психікою...Щоб керувати, необхідно знати."

Термін "система" з'явився в науковій літературі давно і є таким же невизначеним, як "множина" або "сукупність". Даний термін спочатку використовувався в механіці, де він означає матеріальну систему, тобто сукупність матеріальних точок. Основний інтерес для подібних систем представляють задачі динаміки, які виявляють причинно-наслідковий механізм їх руху.

Становлення динаміки як науки пов'язано з іменами Галілея, Гюйгенса, Ньютона, Лагранжа. Генію Ньютона ми зобов'язані не тільки точним формулюванням основних законів механіки, але і побудовою диференціального числення, на якому базуються адекватні математичні моделі механічних систем. Моделі, які використовують диференціальні рівняння, виявились настільки вдалими, що були потім використані для опису різноманітних фізичних явищ: електричних, електромагнітних, гідравлічних і т. п. В останні десятиліття вони використовувались для опису бойових операцій, глобальних процесів, які відбуваються в світі, та інших явищ, в яких провідна роль належить живій природі взагалі і людині в окремих випадках.

Створення складних технічних систем, проектування складних народногосподарських комплексів і управління ними, аналіз екологічних ситуацій та інші напрямки інженерної, наукової і господарської діяльності потребували організації досліджень, які б носили нетрадиційний характер.

Вони потребували об'єднання зусиль спеціалістів різних наукових профілів, уніфікації і погодження інформації, яка отримується в результаті дослідження конкретного характеру. Успішний розвиток системних і комплексних досліджень з використанням математичних методів і обробка інформації завдячують появі електронно-обчислювальної техніки. Отже системний аналіз виник в епоху ЕОМ і його розвиток визначається її сучасними можливостями і перспективами.

Результатом системи досліджень є вибір конкретної альтернативи, план розвитку регіону параметрів конструкцій. Таким чином, <u>системний аналіз</u> це дисципліна, яка займається проблемами прийняття рішення в умовах, коли вибір альтернативи потребує аналізу складної інформації різної фізичної природи.

Іноді ситуація виявляється такою складною, що у людини, яка приймає рішення, вже немає впевненості, що вибір правильний. В таких випадках виникає необхідність в наукових методах прийняття рішення. В результаті розвиток цих методів і сприяв виникненню окремої дисципліни теорії прийняття рішень. На сучасному етапі її апарат та інструментарій, що опираються на широке використання ЕОМ, перетворились в складну і розвинуту наукову теоретичну систему, що стала називатися системним аналізом.

Становлення нової дисципліни розпочалось в кінці XIX і на початку XX століття, коли з'явились перші праці з теорії регулювання, коли в економіці почали вперше говорити про функцію мети (корисності), коли В. Паретто був сформульований перший принцип компромісу.

Автори висловлюють глибоку вдячність редактору видання Дружиніній Валентині Олександрівні за кропітку і наполегливу роботу під час підготовки рукопису до друку та доброзичливе ставлення до них.

1 Основні положення системного аналізу

Необхідний словник основних термінів з системного аналізу наведений у розділі 13 даного навчального посібника (див. с. 103 - 115).

На сьогодні системний аналіз це широка синтетична дисципліна, що містить в собі цілий ряд розділів, які носять характер самостійних наукових дисциплін, таких як: диференціальні рівняння, чисельні методи, методи оптимізації. варіаційне числення, елементи дослідження операцій, теорія оптимального управління та ін:

Дослідження операцій є основним витоком системного аналізу. Ця дисципліна характеризується трьома головними напрямками, які завжди присутні в дослідженні.

Перший етап побудова моделі, тобто формалізація досліджуваного процесу або явища. Вона зводиться до опису процесу мовою математики. На цьому етапі мова йде про побудову моделі процесу. За допомогою однієї і тієї ж моделі можуть вивчатися різні операції.

Другий етап опис операції, постановка задачі. Формулюється мета операції, тобто проведення необхідного аналізу невизначеностей, обмежень, що приводить до деякої задачі оптимізації.

Третій етап розв'язання задачі оптимізації. Для її завершення можуть знадобитися відповідні математичні методи.

Математичне програмування та інші методи розв'язання екстремальних задач складають основу апарату дослідження операцій.

В зв'язку з тим, що побудова та дослідження математичних моделей є основою всього системного аналізу, основна увага буде звернута на принцип моделювання, оптимізацію та математичне програмування.

1.1 Поняття і процедура моделювання

Однією з центральних задач системного аналізу є проблема заміни точної моделі процесу більш простою моделлю.

Моделювання - це дослідження фізичних процесів на моделях. Таке моделювання відноситься до використання моделей, які відтворюють досліджуване явище ("оригінал") зі збереженням його фізичної природи геометричної подібності, а відрізняється від оригіналу лише деякими параметрами і габаритами. Цей найпростіший випадок називають фізичним моделюванням, на відміну від більш складних випадків, коли модель відноситься до другої області фізичних явищ або не зберігає геометричної подібності. Більш складні випадки моделювання об'єднують умовним терміном **математичне моделювання.**

Математичним моделюванням називають дослідження об'єкта або явища за допомогою математичної моделі, яка відтворює найбільш важливі властивості оригіналу.

Так чи інакше, ми підходимо до висновку, що основним продуктом моделювання є нова інформація про досліджуваний об'єкт або явище, яка допомагає розширити і поглибити її опис. Моделювання можна вважати завершеним, якщо отримана інформація достатня для прийняття конкретного рішення.

Процес моделювання можна показати на рис.1

Рисунок1.1**Ошибка!**

1.2 Постулати моделювання

1. Постулат доповнювальності. Складна система при взаємодії із середовищем може виявляти різні властивості в різних ситуаціях. Прикладом цього постулату є природа електронна, яка в певних ситуаціях веде себе як частка (пружні зіткнення), а в інших ситуаціях як хвиля (дифракція).

2. Постулат дії. Реакція системи на зовнішні дії має стрибкоподібний характер. Наприклад, система диференціальних рівнянь Максвелла, яка зв'язує електричні сили з магнітними.

3. Постулат невизначеності. Чим точніше ми визначаємо (вимірюємо) одну властивість системи, тим менше ми знаємо другу властивість цієї системи. Наприклад, закон Планка в квантовій механіці. Добуток похибки при вимірюванні координати частинки на похибку при вимірюванні імпульсу частинки не може бути меншим постійної Планка при будь-якій точності експерименту.

4.Постулат вибору. Складні системи мають область вибору поведінки, що носить стохастичний характер.

Приведемо необхідний матеріал для моделювання, оптимізації та математичного програмування.

2 Обчислення обернених матриць

В курсі вищої математики обернена матриця обчислюється за допомогою алгебраїчних доповнень. Але цей метод для комп'ютера непридатний. Тому розроблено метод "приклеювання" для обчислення обернених матриць [14]. Розглянемо приклад. Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 11 & 2 \\ 6 & 13 & 19 & 5 \end{bmatrix}$$

Перший крок. До матриці А "приклеюємо" одиничну матрицю справа:

$$A = A \oplus I$$

Маємо: $$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 11 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 13 & 19 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Перша ітерація.</u> Перший рядок матриці А ділимо на діагональний член, тобто на 2 почленно. Отриманий рядок назвемо головним і запишемо його першим рядком матриці A_1. Перший рядок виглядатиме так: (1 3/2 2 1/2 1/2 0 0 0). Ми тепер повинні утворити нулі у першому стовпці матриці A_0, починаючи з другого рядка. Головний рядок множимо на (-4) і результат плюсуємо з другим рядком матриці A_0. Отримаємо:

Другий рядок: (0 2 1 0 -2 1 0 0).

Головний рядок множимо на (-2) і плюсуємо почленно з третім рядком матриці A_0 . Отримаємо: (0

4 7 1 -1 0 1 0) (Третій рядок).

Головний рядок множимо на (-6) і плюсуємо з четвертим рядком матриці A_0 .Маємо:

(0 4 7 2 -3 0 0 1) (Четвертий рядок).

І остаточно маємо матрицю A_1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Наголосимо, що після першої ітерації матриці A_1 перший стовпець являє собою перший стовпець одиничної матриці **І.**

Друга ітерація. Другий рядок матриці A_1 почленно ділимо па діагональний член, тобто на 2 і результат наведемо головним рядком, записавши його другим рядком матриці A_2:

(Другий рядок) (0 1 1/2   0 -1 1/2 0 0).

Тепер потрібно "утворити" нулі в другому стовпці. Отже, головний рядок множимо на (-3/2) і плюсуємо з першим рядком матриці A_1 Отримаємо:

(Перший рядок) (1 0 0 1/4 5/4   -1 7 4   -3/4 0).

Множимо головний рядок на (-4) і плюсуємо почленно з третім рядком матриці A_1 Отримаємо:

(Третій рядок) (0 0 5 1   3 -2 1 0).

Головний рядок множимо на (-4) і плюсуємо з четвертим рядком матриці A_1. Отримаємо:

(Четвертий рядок) (0 0 5 2 1 -2 0 1).

Матриця A_2 має такий вигляд:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/4 & 1/2 & 2 & -3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Після другої ітерації матриця A_2 містить перший і другий стовпці одиничної матриці I.

<u>Третя ітерація</u>, Третій рядок матриці A_2 ділимо на діагональний член, тобто на 5, і отримаємо третій головний рядок матриці A_3. Маємо:

(Третій рядок) (0 0 1 1/5 3/5 -2/5 1/5 0).

Тепер звертаємо увагу на третій стовпець матриці A_2 , щоб в ньому сформувати третій стовпець одиничної матриці I . Третій головний рядок множимо на (-5/4) і почленно плюсуємо з першим рядком A_2 .Маємо:

(Перший рядок) (1 0 0 1/4 5/4 1/4 1/4 0). Третій головний рядок множимо на (-1/2), почленно плюсуємо з другим рядком A_2. Отримаємо :

(Другий рядок) (0 1 0 -1/10 -13/10 7/10 -1/10 0).

Третій головний рядок множимо на (-5), почленно плюсуємо з четвертим рядком матриці A_2. Маємо:

(Четвертий рядок) (0 0 0 1 -2 -1 1).

Остаточно маємо матрицю Аз:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 5/4 & -1/4 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/10 & -13/10 & 7/10 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 3/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Після третьої ітерації перший, другий та третій стовпці матриці A_3 являють собою перший, другий та третій стовпці одиничної матриці I.

<u>Четверта ітерація</u> . Четвертий рядок матриці A_3 ділимо почленно, тобто на +1. Отримаємо четвертий головний рядок матриці Aj, який множимо відповідно на (-1/4) і плюсуємо з першим рядком матриці A_3. Маємо:

(Перший рядок) (1 0 0 0 7/4 -1/4 0 -1/4).

Головний рядок множимо на (+1/10) і плюсуємо з другим рядком A_3. Маємо:

(Другий рядок) (0 1 0 0 -3/2 7/10 -1/5 1/10).

Головний рядок множимо на (-1/5) і плюсуємо з третім рядком матриці A_3. Маємо: (Третій рядок) (0 0 1 0 1 -2/5 2/5 -1/5). Отримаємо матрицю A_4, яка має такий вигляд:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/2 & 7/10 & -1/5 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Після четвертої ітерації маємо:

$$A_4 = I \oplus A^{-1}.$$

Отже, шукана обернена матриця A^{-1} знаходиться в п'ятому, шостому, сьомому та восьмому стовпцях матриці A_4. Маємо:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7/4 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & 7/10 & -1/5 & 1/10 \\ 1 & -2/5 & 2/5 & -1/5 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Якщо обчислення оберненої матриці виконані правильно, то справедлива рівність :

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Перевірка:

$$\frac{1}{20}\begin{bmatrix} 35 & -5 & 0 & -5 \\ -30 & 14 & -4 & 2 \\ 20 & -8 & 8 & -4 \\ -40 & 8 & -20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 7 & 11 & 2 \\ 6 & 13 & 19 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Обернена матриця знайдена вірно.

Запишемо програму мовою Turbo Pascal «abba» та мовою BASIC «ABC» для обчислення оберненої матриці, зауваживши, що ми будемо вводити в пам’ять комп’ютера матрицю $A_0 = A \oplus I$.

```
Program abba;
Const m=4; n=8; Label 2,3,4, 99;
Type g1= array [1..m,1..m] of real;
q2=ar ray [1..m,1..m] of real;
Var A∅,A1,A2,A3,A4: q2;A,A11,l1:q1;
I, j, k: intger; S: real;
Begin
For i:=1 to m do begin
For j:=1 to n do begin
Writeln ( ’ Введіть A∅[i,j]= ’);
Readln (A∅[i,j]); end; end;
Writeln (перша ітерація);
For j:=1 to m do
A1[1,j]:=A∅[1,j]/A∅[1,1];
For i:=2 to m do begin
For i:=1 to n do begin
A1[1,j]:=A∅[i,j]-A1[1,j]*A∅[i,1]
End; end;
Writeln (друга ітерація);
```

```
If(A1[2,2]=∅) then  goto 2;
For j:=1 to n do
 A2[2,j]:=A∅[2,j]/A∅[2,2];
For i:=1 to m do begin
For j:=1 to n do begin

If(i=2) then i:=i+1;
A2[i,j]:=A1[i,j]-A2[2,j]*A1[i,2]; end;end;
Writeln (' Третя ітерація ');
If(A2[3,3]=∅) then goto 3;
For j:=1 to n do
A3[3,j]:=A2[3,j]/A2[3,3];
For i:=1 to m do begin
For j:=1 to n do begin
A3[i,j]:=A2[i,j]-A3[3,j]*A2[i,3]; end;end;
Writeln (' Четверта ітерація ');
If(A3[4,4]=∅) then goto 4;
For j:=1 to n do
A4[4,j]:=A3[4,j]/A3[4,4];
For i:=1 to m-1 do begin
For j:=1 to n do begin
A[i,j]:=A3[i,j]-A4[4,j]*A3[i,4]; End;End;
For i:=1 to m do begin
For j:=1 to m do begin
A11[i,j]:=A4[i,j+m];
A[i,j]:=A∅[ij];end; end;
{A11 – обернена матриця; A- дана матриця}[i,j]
[ij] [i,j] [i,j] [i,j]
for i:=1 to m do begin
for i:=1 to m do begin
Writeln (`a11[.ij.]=` , A1[ij]:1∅:4); end;end;
```

```
Writeln (’ Перевірка ’);
For i:=1 to m do begin
For j:=1 to m do begin
S:=∅;
For k:=1 to m do begin
S:=S+A[i,k]*A11[kj];end;
II[i,j]:= S; Writeln (`II, [`,ij],` ]=`, I1[i,j]);
end;end;goto 99;
2: Writeln (` A1[2,2]=∅` ); goto 99;
3: Writeln (` A2[3,3]=∅` ); goto 99;
4: Writeln (` A3[4,4]=∅` );
99: End.
```

Програма "ABC":

```
05 PRINT"……….PROGRAM "ABC……….."
10 REM ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ +1
20 INPUT N,M
30DIM
  Al(M,N),A2(M,N),A3(M,N),A4(M,N),A0(M,N)
  A0(M,N),A(M,N)
31 REM ЗАПИС МАТРИЦІ +ОДИНИЧНА
40 FOR 1=1 TO M
50 FOR J=1 TO N
60 PRINT "A0(“I”, “J”)=”
70 INPUT AO(I,J)
80 NEXT J
90 NEXT I
100 REM ПЕРША ІТЕРАЦІЯ
110 FOR J=l TO N
120 Al(l,J)=A0(l,J)/A0(l,l)
130 NEXT J
```

```
140 FOR I=2 TO M
150 FOR J=l TO N
160 A1(I,J)=AO(I,J)-A1(1,J> A0(U)
170 NEXT J
180 NEXT I

190 REM ДРУГА ІТЕРАЦІЯ
200 IF Al(2,2)-0 GOTO 661
210 FOR J=l TO N
220 A2(2,J)-A1(2,J)/A1(2,2)
230 NEXT J
240 FOR I=1 TO M
250 FOR J=l TO N
260 IF 1=2 THEN I=I+1
27O A2(U)-A1(I,J)-A2(2,J)* A1(I,2)
280 NEXT J
290 NEXT I
300 REM ТРЕТЯ ІТЕРАЦІЯ
310 IF A2(3,3)=0 GOTO 662
320 FOR J=l TO N
330 A3(3,J)=A2(3,J)/A2(3,3)
340 NEXT J
350 FOR I=1 TO M
360FOR J=l TO N
361IF I=3 THEN I=I+1
370 A3(I,J)=A2(I,J)-A3(3,J)* A2(I,3)
380 NEXT J
390 NEXT I
400 REM ЧЕТВЕРТА ІТЕРАЦІЯ
410 IF A3(4,4)=0 GOTO 663
```

```
420 FOR J=l TO N
430 A4(4,J)=A3(4,J)/A3(4,4)
440 NEXT J
450 FOR 1=1 TO M-l
460 FOR J=l TO N
 470 A4(I,J)=A3(I,J)-A4(4,J)* A3(I,4)
 480 NEXT J
 490 NEXT I
 500 FOR I=1 TO M
 510 FOR J=l TO N
 520 A0(I,J)=A4(I,J+M)
 530 A(I,J)=A0(I,J)
 531 PRINT “A0(“I”,“J”)=”;A0(I,J)
 540 NEXT J
 550 NEXT I
 560 FOR I=1 TO M
 570 FOR J=l TO N
 590 REM ПЕРЕВІРКА A^-1 * A=l
 600 A0(I,J)=0
 610 FOR K=l TOM
 620 A0(I,J)=A0(I,J)+A(I,К)* A0(K,J)
 640NEXT К
 641PRINT “A0(“I”,“J”)=”;A0(I,J)
 650 NEXT J

660NEXT I
661PRINT “Al (2,2)=0”
662PRINT “A2(3,3)=0”
663PRINT “A3(4,4)=0”
680 END
```

2.1 Визначення оберненої матриці

Маємо систему m лінійних рівнянь, що містять m невідомих:

$$AX=R \qquad (2.1)$$

Обчислюємо методом приклеювання обернену матрицю A^{-1}. Рівність (2.1) зліва множимо на A^{-1}. Маємо:

$$A^{-1}\ AX=A^{-1}\ R <=> X=A^{-1}\ R. \qquad (2.2)$$

<u>Приклад</u> : Розв'язати систему рівнянь :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -4 & 8 & -7 & -3 \\ 10 & -13 & 26 & 6 \\ 6 & -9 & 22 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ -32 \\ 96 \\ 66 \end{bmatrix}.$$

Розв'язування

Самостійно обчисліть матрицю A^{-1} і покажіть, що:

$$A^{-1} = {}^{1}\!/_{20} \begin{bmatrix} 414 & 80 & -65 & 27 \\ 188 & 40 & -30 & 14 \\ -166 & -20 & 20 & -8 \\ 220 & 40 & -40 & 20 \end{bmatrix}.$$

Тепер за формулою (2.2) обчисліть:

$$X = {}^{1}\!/_{20} \begin{bmatrix} 414 & 80 & -65 & 27 \\ 188 & 40 & -30 & 14 \\ -166 & -20 & 20 & -8 \\ 220 & 40 & -40 & 20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 17 \\ -32 \\ 96 \\ 66 \end{bmatrix} =$$

$$= {}^{1}\!/_{20}\begin{bmatrix} 7038 & -2560 & -6240 & 1782 \\ 3196 & -1280 & -2880 & 924 \\ -1972 & 640 & 1920 & -528 \\ 3740 & -1280 & -3840 & 1320 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 20 \\ -40 \\ 60 \\ -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Відповідь: x_1=1; x_2=-2; x_3=3; x_4=-3.

3. Знаходження власних чисел і власних векторів матриць

Будемо розглядати матриці 3х3. Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тоді дане рівняння для даної матриці являє собою визначник третього порядку, який прирівнюємо до нуля:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.1)$$

Обчислюємо цей визначник і отримаємо:

$$\lambda^3 - \mathrm{trA}\cdot\lambda^2 + \mathrm{S}\lambda - \det \mathrm{A} = 0 \qquad (3.2)$$

Пояснення: trA=a_{11} +a_{22} +a_{33} - слід матриці А.

$$S=A_{11} + A_{22} + A_{33} \qquad (3.3)$$

S- сума діагональних алгебраїчних доповнень.

Із курсу вищої математики відомо, що для симетричної матриці A характеристичне рівняння має три дійсних і різних корені. Ці корені називають власними значеннями матриці A.

Приклад: обчислити власні значення матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

Обчислюємо: $trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1+5+1 = 7$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8\,;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\mathbf{S} = A_{11} + A_{22} + A_{33} = 4-8+4 = 0.$$

Визначник матриці A визначимо за теоремою Лапласа:

$$\det A = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}.$$

Маємо: $A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -14$;

$$\det A = 1\cdot 4 + 1\cdot 3 + 3\cdot(-14) = 36.$$

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^3 - 7\cdot\lambda^2 + 36 = 0$$

Нехай $f(\lambda) = \lambda^3 - 7\cdot\lambda^2 + 36$ Тоді:

$$f'(\lambda) = 3\cdot\lambda^2 - 14\lambda\,;$$

$$f''(\lambda) = 6\lambda - 14.$$

Прирівняємо першу похідну до нуля:

$3 \cdot \lambda^2 - 14\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 14/3$

$F''(\lambda_1) = f''(0) = -14 < 0$; $\lambda_1 = 0$ точка максимуму;

$F''(\lambda_2) = f''(14/3) = 6 \cdot 14/3 - 14 = \frac{84-42}{3} = 14 > 0$.

Отже $\lambda_2 = \frac{14}{3}$ - точка мінімуму.

$f_{max} = f(0) = 36$; $f_{min} = f(14/3) = -400/27 \approx 14,8$

Графік функції $f(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36$ виглядає так:

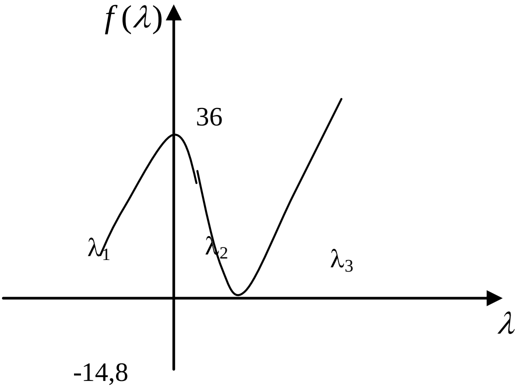


Рисунок 3.1

З цього графіка робимо висновок, що $f(\lambda)$ має три дійсних корені, причому має таку оцінку: $0 < \lambda 2 < \lambda 3 \Leftrightarrow 0 < \lambda 2 < 14/3$.

Ясно, що $f(3) = 27 - 7 \cdot 9 + 36. = 0$

Отже. $\lambda 2 = 3$. Тоді за теоремою Безу $f(x)$ ділиться на двочлен $\lambda - 3$.

Розв'язуємо квадратне рівняння:

$\lambda 2 – 4\lambda – 12 \Rightarrow \lambda 1 = -2$; $\lambda 3=6$.

Відповідь. Матриця А має три власні значення: $\lambda 1=-2$; $\lambda 2=3$; $\lambda 3=6$.

Означення: Вектор X(m;n;p) називається власним вектором матриці А, якщо справедлива рівність:

$$AX=\lambda X \tag{3.5}$$

Без доведення запишемо робочу формулу для знаходження проекції m; n; та p.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Підставляючи в систему (3.6) $\lambda 1$, $\lambda 2$, знайдемо проекції трьох власних векторів. Запишемо форму для знаходження розв'язків системи(3.6).

$$m = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22}-\lambda & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t;\ n = -\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t;\ p = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} \cdot t; \tag{3.7}$$

У формулі (3.7) t є R.

Для матриці А (3.4) ми отримали три власні значення $\lambda_1=-2$; $\lambda_2=3$; $\lambda_3=6$.

Обчислимо власні вектори цієї матриці.

а) Для $\lambda_1=-2$ за формулами (3.7) маємо:

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = -20t; \quad n = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot t = 0; \quad p = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \cdot t = 20t \cdot$$

Виберемо t=1/20, тоді отримаємо: $a_1=-i+к=$ $=(-1;0;1)$.

б) Для $\lambda_2=3$ маємо аналогічно: $a_2=-i+j+k=(-1;1;-1)$.

в) Для $\lambda_3=6$ маємо: $a_3=i+2j+k=(1;2;1)$.

Легко переконатись, що $a_1 \cdot a_2=0$; $a_1 \cdot a_3=0$; $a_2 \cdot a_3=0$.

Без доведення приймаємо такий факт: власні вектори симетричної матриці взаємно перпендикулярні. Сформулюємо матрицю V, стовпцями якої є проекції власних векторів:

$$V=\begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

Розглянемо систему трьох лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

Без доведення запишемо розв'язок цієї системи:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathrm{V}_{11} & \mathrm{V}_{12} & \mathrm{V}_{13} \\ \mathrm{V}_{21} & \mathrm{V}_{22} & \mathrm{V}_{23} \\ \mathrm{V}_{31} & \mathrm{V}_{32} & \mathrm{V}_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{c}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} \\ \mathrm{c}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}} \\ \mathrm{c}_3\mathrm{e}^{\lambda_3 \mathrm{t}} \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

C_i (i=1,3) – довільні константи.

Зауважимо, що λi в формулі (3.10) є власним значенням матриці A для формули (3.9).

Приклад. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Розв'язування.

Для матриці A формуємо характеристичне рівняння, яке має вигляд:

$$\lambda^3\text{-}9\lambda^2\text{+}23\lambda\text{-}15\text{=}0.$$

Легко обчислити такі три власні значення матриці А:

$$\lambda_1=1;\ \lambda_2=3;\ \lambda=5.$$

Власні вектори мають такі значення:

$$\bar{a}_1 = \{1;1;1\};$$

$$\bar{a}_2 = \{1;1;-1\};$$

$$\bar{a}_3 = \{1;-1;1\}.$$

Тоді матриця V прийме такий вигляд:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

За формулою (3.10) маємо:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{t} \\ c_2 \cdot e^{3t} \\ c_3 \cdot e^{5t} \end{pmatrix}$$

На основі даного прикладу наведемо ще один важливий фактор. Знаючи матрицю V(3.11), методом "приклеювання" обчислимо обернену матрицю V-1.

$$V^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.12)$$

Тепер обчислимо такий добуток: $V^{-1} \cdot AV$.

$$V^{-1}AV = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Отримали так звану діагональну матрицю, яка складається з нулів, а на головній діагоналі стоять власні значення матриці А.

Без доведення запишемо таку важливу формулу (3.14):

$$\Delta = V^{-1}AV \qquad (3.14)$$

Якщо нам відома матриця V, що формувалася із проекцій власних векторів матриці А, то формула (3.14) дає можливість обчислити діагональну матрицю Δ.

Для прогнозування знаків коренів характеристичного рівняння (3.2) без їх обчислення розглянемо питання про його належність до полінома Гурвіца.

3.1 Критерій від'ємності дійсних частин коренів полінома P(λ)

Для того щоб стандартний поліном був поліномом Гурвіца необхідно і достатньо, щоб всі головні діагональні мінори матриці Гурвіца були додатними, тобто

$\Delta_к > 0$ (к=1,n).

Нехай $P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n$ -деякий характеристичний многочлен.

Тоді матриця розміром n x n:

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & . & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{bmatrix} \qquad (3.15)$$

називається матрицею Гурвіца.

Матриця будується таким чином: по головній діагоналі відкладаються коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$. Вправо по рядку від цих елементів розміщені коефіцієнти зі зменшенням номерів, вліво зі збільшенням.

Головні діагональні мінори цієї матриці будуть мати вигляд:

$$\Delta_1 = a_1;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1}.$$

Приклад 1. Визначити умови від'ємності дійсної частини коренів характеристичного полінома другого степеня.

$$P(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2,\ a>0$$

Матриця Гурвіца в цьому випадку буде мати вигляд:

$$M=\begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Її головні діагональні мінори: $\Delta=a_1$. $\Delta=a_1\ a_2$. Таким чином, додатність коефіцієнтів рівняння $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ є необхідною і достатньою умовою, щоб характеристичний поліном був поліномом Гурвіца.

Приклад 2. Дослідити стійкість розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних однорідних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \alpha y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + \beta z,$$
$$\frac{dz}{dt} = -z + \alpha x.$$

Характеристичне рівняння цієї системи:

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & \alpha & 0 \\ 0 & -1-\lambda & \beta \\ \alpha & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

або $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + (1 - \alpha^2 \beta) = 0$.

Матриця Гурвіца має вигляд:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1-\alpha^2\beta & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\alpha^2\beta \end{bmatrix}.$$

Визначники Гурвіца:

$$\Delta_1=3>0,\ \Delta_2=9-(1-\alpha^2\beta),$$
$$\Delta_3=\Delta_2(1-\alpha^2\beta).$$

Таким чином, для додатності головних діагональних мінорів матриці Гурвіца необхідно, щоб параметр β задовольняв нерівності:

$$\beta > -\frac{8}{\alpha^2} \qquad \beta < -\frac{1}{\alpha^2}$$

4 Метод градієнтного спуску

Загальна задача нелінійного програмування без обмежень полягає в мінімізації $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заданій в n - вимірному евклідовому просторі. Функція f(x) називається цільовою функцією.

Градієнт функції в деякій точці $x^{(k)}$ направлений в сторону найшвидшого локального зростання функції. Отже, напрямок, протилежний градієнтному, вкаже шлях, який веде вниз вздовж найбільш крутої лінії. Вектор, протилежний градієнту, називається антиградієнтом.

Ідея методу градієнтного спуску полягає в наступному. Вибираємо деяку початкову точку і вираховуємо в ній градієнт функції f(x). Робимо крок в напрямку, протилежному градієнтному:

$$x^{(к+1)} = x^{(к)} - \alpha_к \text{ grad } f(x),\ x = x^{(к)}. \qquad (4.1)$$

Значення $\alpha_к$ визначається з умови:

$$f\,(x^{(к)} - \alpha_{\,к} \text{ grad } f(x^{(k)})) \rightarrow \min f(x^{(k)} - \alpha \text{ grad } f(x^{(k)})).$$

Тобто на кожному кроці розв'язується одновимірна задача оптимізації. В результаті приходимо в точку, значення функції в якій менше попереднього. Якщо ця умова не виконується, то необхідно зменшити крок. В новій точці процедуру повторюємо: вираховуємо градієнт і знову робимо крок в зворотному до нього напрямку. Процес продовжується до отримання найменшого значення цільової функції. Момент закінчення пошуку наступить тоді, коли рух з отриманої точки з будь-яким кроком приводить до зростання цільової функції. Якщо мінімум функції досягається всередині розглянутої області, то в цій точці градієнт дорівнює нулеві, що також може служити сигналом про закінчення процесу оптимізації.

В описаному методі необхідно вираховувати на кожному кроці оптимізації градієнт цільової функції $f\,(x_1, x_2,\ldots, x_n)$:

$$grad\_f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\},$$

де $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ - частинна похідна від функції f по змінній $x_к$.

Формули для частинних похідних можна отримати в явному вигляді лише в тому випадку, коли цільова функція задана аналітично. В іншому випадку похідні вираховуються за допомогою чисельного диференціювання :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \approx \frac{1}{2\Delta x_к}[f(x_1,..., x_k + \Delta x_k,..., x_n) - f(x_1,..., x_k - \Delta x_k,..., x_n)],$$

де $k = \overline{1,n}$, Δx_k - крок (різниця між сусідніми значеннями аргументу), його приймають 0,001 або 0,005.

Значення градієнта функції f визначаємо за формулою $|gradf| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)^2}$

В даній роботі для мінімізації функції використовуємо метод градієнтного спуску з розбиттям кроку. Тобто вибираємо деяке початкове значення $x^{(0)}$. Загальних правил вибору $x^{(0)}$ немає : якщо є інформація про область розміщення шуканої точки $x^{(0)}$, то вибираємо деяке $\alpha_к = \alpha = const$ і на кожному кроці процесу (4.1) перевіряємо умову монотонності $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)})$. Якщо ця умова порушується, то α розбиваємо до тих пір, поки монотонність не відновиться. Для закінчення розрахунку повинна виконуватись така умова:

$$\left| gradf\,(x^{(\kappa+1)}) \right| < \varepsilon$$

В цьому випадку маємо

$x_{min} = x^{(\kappa+1)}$.

Порядок виконання роботи мовою BASIC.

1. Скласти головну програму, яка містить підпрограми: обчислення градієнта функції f-GR та його складових, V (I) обчислення цільової функції F.

2. Провести обчислення на ПЕОМ і роздрукувати результати.

<u>**Примітка:**</u> Значення коефіцієнта α_k можна визначити по-іншому. Для цього вводиться одиничний вектор $t = (t_1;...;t_n) = \Delta f(V) / |\Delta f(V)|$,

де $\Delta f(V)$ - загальний вид градієнта функції в точці *V*,

$|\Delta f(V)|$ - довжина вектора градієнта.

Після цього вибирається початкова точка $V_0 = \left(X_1^{\ 0},...,X_n^{\ 0}\right)$ і визначається координати одиничного вектора $t(V_0)$. Координати нової точки V_1 при русі по напрямку вектора *t* (для *max*-му функції) $V_1 = V_0 + at(V_0)$, або в зворотньому напрямку (для *min*-му функції) $V_1 = V_0 - at(V_0)$, де *a*-числовий коефіцієнт.

Підставляємо нові координати у вираз функції, маємо $f(V_1)$. Знаходимо $\frac{df}{da} = 0$ екстремум функції по коефіцієнту а: , звідки і визначаємо а (крок зміни координат). В результаті отримуємо координати нової точки $V_1 = \left(X_1^{\ 1}, X_2^{\ 1},..., X_n^{\ 1}\right)$. Знаходимо в цій точці значення функції $f(V_1)$ і градієнт $|\Delta f(V_1)|$.

Знову повторюємо процедуру до тих пір, коли значення функції буде не змінюватися і оцінка градієнта буде дорівнювати 0.

Приклад. Мінімізувати функцію f(x_1, x_2) $= e^{(x_1^2+x_2^2)}$ + 2 x_1-3.5 x_2. За початкове наближення $x^{(0)}$ виберемо точку (0,0) і покладемо ε =0,0001.

Складемо програму, яка реалізує розв'язування задачі.

Вхідні параметри: N=2 розмірність простору, в якому задана функція f; AL – початкове значення параметра α; x - масив, в елементах якого розміщені значення координат початкової точки $x^{(0)}$; У - значення цільової функції f; E – значення величини ε, що характеризує критерій закінчення ітераційного процесу. Вихідні параметри: к-кількість ітерацій; F – значення функції f; GR – значення градієнта.

ТЕКСТ ПРОГРАМИ

```
5 INPUT N,AL, EL, E
10 DIM X(N),V(N)
20 DEF FNA (X(1),X(2)) = EXP(x(l)^2 +x(2)^2)+2*x(1)-3.5*x(2))
25 FOR I=1 T ON
30 INPUT X(l)
40 PRINT "X("I") = "; X(I)
50 NEXT I
60 GOSUB 210
65 K = 0
70 GOSUB 220
80 IF GR<E GOTO 170
90 К=К+1
100 FOR I = l, TO N
```

```
110 X(I)=X(I) – AL*V(I)/|GR|
120 NEXT I
125F1=F
130 GOSUB 210
140 IF F<F1 GOTO 70
145 F=F1
150 AL=0.5*AL
160 GOTO 90
165 PRINT "ТОЧКА MIN"
170 FOR I=1, TO N
180 PRINT "Х("Г)-";X(I)
185 NEXT I
190 PRINT "F="; F; "КІЛЬК.ІТЕРАЦІЙ = " ; К ; "ГРАДІЄНТ - " ; GR
200 END
210 F=FNA(X(1),X(2)
215 RETURN
220 VE = EXP (X(1)^2 + X(2)^2)
230 V(l)=VE*2*X(l) + 2
240 V(2)=VE*2*X(2)-3.5
250 GR = SQR(V(1) ^2 + V(2) ^2)
260 RETURN
```

В результаті розрахунків маємо:

точка MIN. X(1) = -0,445472, X(2) = 0,779575.

F = - 0,0138011 , КІЛЬК. ІТЕРАЦІЙ = 17 , ГРАДІЄНТ - 0,0008

5 Лінійне програмування

Важливим розділом математичного програмування с лінійне програмування, яке вивчає задачі оптимізації, в яких цільова функція є лінійною функцією проектних параметрів, а обмеження задаються в вигляді лінійних рівнянь і нерівностей.

Канонічна постановка задачі лінійного програмування формулюється так: Знайти значення $x_1, x_2, \dots x_n$ які:

1. Задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = b_i; (i = 1, m); \qquad (5.1)$$

2. Є додатними, тобто

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots x_я \geq 0; \qquad (5.2)$$

3. Забезпечують найменше значення лінійної цільової функції

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \qquad (5.3)$$

Будь-який розв'язок системи рівнянь (5.1), за умови (5.2), називається допустимим розв'язком. Якщо допустимий розв'язок мінімізує цільову функцію (5.3) , то він називається оптимальним розв'язком.

Розглянемо приклад задачі лінійного програмування (транспортну) задачу.

<u>Приклад.</u> Автобаза обслуговує три магазини будівельних матеріалів, причому товари доставляються в магазин з двох складів. Необхідно спланувати перевезення так, щоб їх загальна вартість була мінімальною.

Щоденно вивозиться з першого складу (бази) 12 т товару, з другого 15 т. При цьому завозиться в перший магазин 8 т, в другий - 9 т, в третій - 10 т.

Вартість перевезення 1 т. товару (в гривнях) з баз в магазин характеризується такою таблицею:

Таблиця 5.1

База	Магазин		
	Перший	Другий	Третій
Перша	0,8	1,1	0,9
Друга	1	0,7	$1_5 2$

Розв'язування. Позначимо через x_1 , x_2 , x_3 кількість товару, який необхідно доставити з першої бази, відповідно, в перший, другий і третій магазини, а через x_4, x_5, x_6 кількість товару, який необхідно доставити з другої бази у вище перераховані магазини.

Згідно з умовою задачі маємо:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ &x_4 + x_5 + x_6 = 15, \\ &x_1 + x_4 = 8, \\ &x_2 + x_5 = 9, \\ &x_3 + x_6 = 10. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Перших два рівняння системи (5.4) описують кількість товару, який необхідно вивезти з першої і другої бази, а три останніх - скільки необхідно завести товару в кожний магазин.

До даної системи необхідно додати систему нерівностей

$$x_1 \geq 0,\ i=1,6, \tag{5.5}$$

яка означає, що товар назад з магазинів (крамниць) на бази не вивозиться. Загальну вартість перевезень з врахуванням розцінок запишемо у вигляді

$$f = 0{,}8x_1 + 1{,}\ 1x_2 + 0{,}9x_3 + x_4 + 0{,}7x_5 + 1{,}2x_6\ . \qquad (5.6)$$

Оскільки в (5.4) останнє рівняння є результатом інших, тому ми його відкидаємо. В результаті маємо:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 = 12\ , \\ &x_4 + x_5 + x_6 = 15, \\ &x_1 + x_4 = 8, \\ &x_2 + x_5 = 9. \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Виразимо через x_1 і x_2 інші невідомі. Отримаємо:

$$\begin{aligned} &x_3 = 12 - x_1 - x_2, \\ &x_4 = 8 - x_1, \\ &x_5 = 9 - x_2, \\ &x_6 = x_1 + x_2 - 2. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

З врахуванням (5.5), отримаємо таку систему нерівностей:

$$\begin{aligned} &x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0\ , \\ &12 - x_1 - x_2 \geq 0\ , \\ &8 - x_1 \geq 0,\ 9 - x_2 \geq 0, \\ &x_1 + x_2 - 2 \geq 0\ . \end{aligned} \qquad (5.9)$$

Перепишемо (5.9) в більш компактній формі:

$$0 \leq x_1 \leq 8,\ 0 \leq x_2 \leq 9,\ 2 \leq x_1 + x_2 \leq 12 \qquad (5.10)$$

Цільова функція (5,6) з врахуванням (5.8) виражається через x_1 і x_2:

$$f = 22{,}7 + 0{,}1x_1 + 0{,}7x_2\ . \qquad (5.11)$$

Враховуючи, що при x_1 і x_2 коефіцієнти додатні, то вартість буде зростати зі збільшенням їх значень. Тому приймаємо з (5.9) $x_1 + x_2 = 2$. Виключимо один з параметрів, наприклад, x_2. Тоді

$$f=24.l-0.6x_1. \qquad (5.12)$$

Вартість перевозок буде мінімальною , якщо $x_1=2$, а $x_2=0$.

Оптимальні значення інших проектних параметрів такі: $x_3 = 10$, $x_4= 6$, $x_5 =9$, $x_6 =0$. В цьому випадку мінімальна загальна вартість перевезень 22,9 грн.

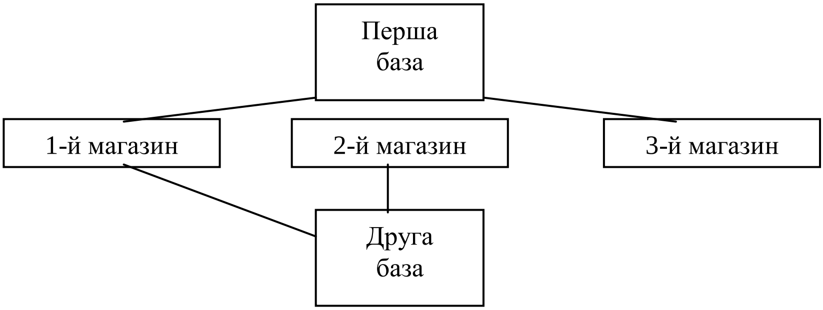


Схема перевезень

Для розв'язання задачі лінійного програмування використовують геометричний метод. Областю розв'язків системи нерівності типу (5.8) є переріз кінцевого числа півплощин, які описуються кожна окремою нерівністю. Але даний метод достатньо простий для двох чи навіть трьох змінних.

Одним із методів, за допомогою якого ефективно можна розв'язувати задачі, є симплекс-метод. Ідея симплекс-методу полягає в наступному. Приймаємо в якості початкового наближення координати деякої вершини багатогранника допустимих розв'язків і знайдемо всі ребра, які виходять з цієї вершини. Рухаємося вздовж того ребра, по якому цільова функція спадає. Приходимо в нову вершину, знаходимо всі ребра, які з неї виходять і т.д. В результаті приходимо в таку вершину, рух з якої по будь-якому ребру призводить до зростання цільової функції. Отже, мінімум цільової функції досягнутий в останній вершині з відповідними координатами.

Розглянемо розв'язування задачі (5.1-5.3) симплекс-методом. Якщо в (5.1) задані нерівності, то їх можна перетворити в рівності шляхом введення додаткових невід'ємних змінних, які називають балансовими.

Будемо вважати, що всі рівняння (5.1) лінійно незалежні. В іншому випадку лінійно залежні рівняння відкидаємо.

При m = n система (5.1) має єдиний розв'язок, що виключає деяку оптимізацію.

Виразимо m змінних $x_1,...,x_m$ через інші за допомогою рівнянь (5.1):

$$x_i=p_i+\sum q_{i,m+j}x_{m+J},\ j=\overline{1,n},\quad pi\geq 0. \qquad (5.13)$$

Змінні x_i називаються базовими, а x_{m+1}, $x_{m+2},\ldots,x_n$ – вільними змінними.

З врахуванням (5.13) цільову функцію (5.3) перепишемо у вигляді:

$$f=d_o+d_{m+1}x_{m+1}+...+d_nx_n \qquad (5.14)$$

Процес оптимізації починаємо з деякого початкового (опорного) розв'язку, наприклад , при нульових значеннях вільних змінних . Тоді отримаємо :

$$x_i=pi,\ x_{m+1}=0,...,x_n=0 \qquad (5.15)$$

Цільова функція (5.13) прийме значення:

$f^{(O)} = d_o$.

Перевіряємо на оптимальність розв'язок (5.15). Якщо в (5.14)

коефіцієнти $d_{m+1},\ldots,d_n$ невід'ємні, то при збільшенні вільних змінних цільова функція не може зменшитись. В цьому випадку розв'язок (5.15) є оптимальним.

Тепер нехай серед коефіцієнтів (5.14) є хоч один від'ємний, наприклад, $d_{m+1} < 0$. Тоді, в якості нового опорного розв'язку вибираємо змінні при таких значеннях параметрів:

$$x_{m+1}=x^{(0)}_{m+1}, x_{m+2}=0,\ldots,x_n=0 \qquad (5.16)$$

Тоді базисні змінні згідно (5.13) будуть мати вигляд:

$$x_i=p_i+q_{i,m+1}x^{(1)}_{m+1},\ i=\overline{1,m}. \qquad (5.17)$$

Якщо всі коефіцієнти $q_{i.m+1}$ невід'ємні, то x_{m+i} можна збільшувати необмежено. Тоді не існує оптимального розв'язку задачі. Коли серед коефіцієнтів $q_{i,m+1}$ є від'ємні, то необхідно контролювати знак $x_з$ при збільшенні змінної x_{m+1}. Цю умову можна записати у вигляді :

$$p_i + q_{i,\,m+1}x^{(l)}_{m+1} \geq 0,\quad i=\overline{1,m}. \qquad (5.18)$$

Серед всіх від'ємних коефіцієнтів $q_{i,\ m+1}$ вибираємо найбільший за модулем. Нехай його значення дорівнює Q, а відповідне йому значення p_i дорівнює P. Тоді з (5.18) отримаємо максимальне значення (5.16):

$$x^{(1)}_{m+1}=-P/Q \qquad (P>0,Q<0),$$

і новий опорний розв'язок запишемо у вигляді:

$$x_i = p_i - \frac{P}{Q}q_{i,m+1}, x_{m+1} = -\frac{P}{Q}, x_{m+2} = 0,\ldots, x_n = 0. \qquad (5.19)$$

Нова цільова функція дорівнює:

$$f^{(l)}=d_o-d_{m+1}\frac{P}{Q} \qquad (5.20)$$

На цьому закінчується перший крок оптимізації. Тепер необхідно зробити наступний крок, використовуючи аналогічну процедуру. Для цього вибираємо новий базис: $x_1,..., x_{m-1},. x_{m+1}$ Після другого кроку знаходимо нове значення цільової функції $f^{(2)}$. Якщо $f^{(2)}< f^{(1)}$, то ми знаходимо нові оптимальні значення змінних або показуємо, що розв’язок (5.19) є оптимальним .

В будь-якому випадку після кінцевого числа кроків ми приходимо до оптимального розв'язку.

Розв'яжемо попередню транспортну задачу симплекс-методом. Приймаємо x_3, x_4, x_5, x_6 в якості базисних і виражаємо їх через вільні змінні x_1 і x_2. Тоді маємо систему (5.8).

В якості опорного розв'язку візьмемо такі значення, які відповідають нульовим значенням вільних параметрів:

$x^{(0)}{}_1=0$, $x^{(0)}{}_2=0$, $x^{(0)}{}_3=12$, $x^{(0)}{}_4=8$, $x^{(0)}{}_5=9$, $x^{(0)}{}_6=-2$

Маємо протиріччя : $x^{(0)}{}_6< 0$.

Нехай x_2, x_4 вільні параметри і $x^{(0)}{}_3 = 0$, $x^{(0)}{}_4 = 0$, тоді $x^{(0)}{}_1 = 8$,$x^{(0)}{}_3=4$, $x^{(0)}{}_5=9$, $x^{(0)}{}_6=6$ і $f=23,5$.

Дослідимо отриманий розв'язок з врахуванням вигляду опорного розв'язку і цільової функції через вільні параметри x_2, x_4.

З врахуванням (5.6) і (5.7) маємо:

$$x_1 = 8 - x_4,$$
$$x_3=4 – x_2 + x_4,$$
$$x_5=9–x_2, \qquad (5.21)$$

$$x_6=6+x_2-x_4,$$
$$f=23{,}5-0{,}1x_4+0{,}7x_2. \qquad (5.22)$$

Коефіцієнт при x_4 - від'ємний, а при x_2 додатний. Для мінімуму функції f можна збільшувати значення x_4 при мінімальному значенні x_2. Покладемо $x_2=0$. З системи (5.21) маємо:

$$x_1 = 8 - x_4,$$
$$x_3=4 + x_4,$$
$$x_5=9, \qquad (5.23)$$
$$x_6=6 - x_4,$$

З системи (5.23) знаходимо, що максимальне значення x_4 буде 6. Тоді цільова функція дорівнює :

$f = 23{,}5 - 0{,}1\cdot 6 = 22{,}9$

і згідно з (5.23) опорні розв'язки будуть мати вигляд:

$x_1 = 2, x_2 = 0,\ x_3 = 10, x_4=6,\ x_5 = 9,\ x_6=0.$

Відповідь збіглася з попередньою.

5.1 Метод північно-західного кута

При знаходженні опорного плану транспортної задачі методом північно-західного кута на кожному кроці розглядаємо перший з пунктів відправлення, що залишилися, та перший з пунктів призначення, що залишилися. Заповнення клітинок таблиці умови починається з лівої верхньої клітинки для невідомого x_{11} ("північно-західний кут") і закінчується клітинкою для невідомого x_{mn}, тобто йде по діагоналі таблиці.

Приклад

На три бази A_1, A_2, A_3 поступив однорідний вантаж в кількостях, відповідно рівних 140, 180 і 160 одиниць. Цей вантаж треба перевезти в п'ять пунктів призначення B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 відповідно в кількостях 60, 70, 120, 130 і 100 одиниць. Тарифи перевезення одиниць вантажу з кожного з пунктів відправлення у відповідні пункти призначення вказані в таблиці:

Таблиця 5.2

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреб	60	70	120	130	100	480

Знайти план перевезень даної транспортної задачі методом північно-західного кута.

Розв'язання.

Тут кількість пунктів відправлення $m = 3$, а кількість пунктів призначення $n = 5$. Отже, опорний план задачі визначається числами, які знаходяться в 5+3-1=7 заповнених клітинках.

Заповнення таблиці почнемо з клітинки для невідомого x_{11}, тобто будемо намагатися задовольнити потреби першого пункту призначення за рахунок запасів першого пункту відправлення. Так як запаси пункту A_1 і більші, ніж потреби пункту B_1 то вважаємо $x_{11} = 60$, записуємо це значення у відповідній клітинці таблиці 5.3 і тимчасово виключаємо з розгляду стовпець B_1, вважаючи при цьому запаси пункту A_1 рівними 80.

Таблиця 5.3

Пункти відправ	Пункти призначення					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Розглянемо перші з пунктів відправлення A_1 та призначення B_2, що залишилися. Запаси пункту A_1 більше потреб пункту B_2. Покладемо x_{12} = 70, запишемо це значення у відповідній клітинці таблиці 5.3 і тимчасово виключимо з розгляду стовпець B_2. В пункті A_1 запаси вважаємо рівними 10 одиницям. Знову розглянемо перші з пунктів відправлення A_1 та призначення B_3, що залишилися. Потреби пункту B_3 більші запасів, що залишилися в пункті A_1. Покладемо x_{13} = 10 та виключимо з розгляду стовпець A_1. Значення x_{13} = 10 запишемо у відповідну клітинку таблиці 5.3 і будемо вважати потреби пункту B_3 рівними 110 одиницям.

Тепер перейдемо до заповнення клітинок для невідомого x_{23} і т.д. Через шість кроків залишається один пункт відправлення A_3 з запасом вантажу 100 одиниць і один пункт призначення B_5 з потребою в 100 одиниць. Відповідно є одна вільна клітинка, яку і заповнюємо, вважаючи x_{35} =100 (таблиця 5.3).

В результаті отримуємо опорний план:

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 70 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 110 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 100 \end{bmatrix}$$

Згідно даному планові перевезень, загальна вартість перевезень всього вантажу складає:

$F = 2\cdot60 + 3\cdot70 + 4\cdot10 + 1\cdot110 + 4\cdot70 + 7\cdot60 + 2\cdot100 = 1380.$

5.2 Метод мінімального елемента

Суть метода мінімального елемента полягає у виборі клітинки з мінімальним тарифом. Слід відмітити, що цей метод, як правило, дозволяє знайти опорний план транспортної задачі, при якому загальна вартість перевезень вантажу менша, ніж загальна вартість перевезень при планові, знайденому для даної задачі за допомогою метода північно-західного кута. Тому найбільш доцільно опорний план транспортної задачі знаходити методом мінімального елемента.

Приклад.

Вхідні дані задачі запишемо у вигляді таблиці 5.4

Таблиця 5.4

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Покладемо x_{23} = 120 і запишемо це значення у відповідну клітинку таблиці 5.5. Виключимо тимчасово з розгляду стовпець B_3.

В частині таблиці, що залишилася з трьома рядками і з чотирма стовпцями B_1, B_2, Вз і B_5, клітинка з найменшим значенням тарифу C_{25} знаходиться на перетині рядка A_2 і стовпця B_5. Покладемо x_{25} = 60 і внесемо це значення у відповідну клітинку таблиці 5.5.

Таблиця 5.5

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	2 10	3	4	2 130	4	140
A_2	8	4	1 120	4	1 60	180
A_3	9 50	7 70	3	7	2 40	160
Потреби	60	70	120	130	100	480

Тимчасово виключимо з розгляду рядок A_2. Так як тариф 2 зустрічається у клітинках тричі, то доцільно вибрати тариф C_{14}. Покладемо x_{14} = 130, стовпець B_4 виключаємо з розгляду. Після цього з врахуванням мінімальних тарифів заповнюємо стовпець B_5: x_{35} = 40 і стовпець B_1: x_{11} = 10. Знову розглядаємо частину таблиці, що залишилася. В ній мінімальний тариф C_{ij} знаходиться в клітинці на перетині рядка A_3 і стовпця B_2, що дорівнює 7.

Заповнимо приведеним вище способом цю клітинку і аналогічно заповнюємо (у відповідній послідовності) клітинку, що знаходиться на перетині рядка A_3 і стовпця B_1. В результаті отримаємо опорний план:

$$X = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 1 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 0 & 60 \\ 50 & 70 & 0 & 0 & 40 \end{bmatrix}$$

При даному плані перевезень загальна вартість транспортування складає:
$F = 2 \cdot 10 + 9 \cdot 50 + 7 \cdot 70 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 130 + 1 \cdot 60 + + 2 \cdot 40 = \quad = 1480.$

5.3 Метод апроксимації Фогеля

При визначенні оптимального плану транспортної задачі методом апроксимації Фогеля на кожній ітерації по всім стовпцям і по всім рядкам знаходять різницю між двома записаними в них мінімальними тарифами. Ці різниці записують в спеціально відведених для цього рядку та стовпці в таблиці умови задачі. В рядку (чи в стовпці), де максимальна різниця, якій дана різниця відповідає, визначають мінімальний тариф. Клітинку, в якій він записаний, заповнюють на даній ітерації.

Якщо мінімальний тариф однаковий для декількох клітинок даного рядка (стовпця), то для заповнення вибирають ту клітинку, яка знаходиться в стовпці (рядку), що відповідає найбільшій різниці між двома мінімальними тарифами, які знаходяться в даному стовпці (рядку).

<u>Приклад.</u>
Використовуючи метод апроксимації Фогеля, знайдемо опорний план попередньої задачі (таблиця 5.4).

<u>Розв'язання.</u>
Для кожного рядка і стовпця таблиці умови знайдемо різницю між двома мінімальними тарифами, записаними в даному рядку або стовпці та помістимо їх у відповідному додатковому стовпці або в додатковому рядку таблиці. Так в рядку A_1 мінімальний тариф дорівнює 2, який зустрічається двічі, тому різниця дорівнює 0.

Аналогічна ситуація і в рядку A_2 з мінімальними тарифами 1. В рядку A_3 мінімальні тарифи 3 і 2. Отже, різниця між ними: 3-2=1. Аналогічно отримуємо різницю в стовпці B_1: 8-2=6. Вирахувавши всі ці різниці, бачимо, що найбільша з них відповідає стовпцю B_1. Таким чином, необхідно заповнити клітинку, що знаходиться на перетині рядка A_1 та B_1, так як в ній найменша ціна. Заповнивши її, ми тим самим задовольнили потреби пункту B_1, тому виключаємо з розгляду стовпець B_1 і будемо рахувати запаси пункту A_1 рівними 140-60=80 одиниць. Після цього визначимо наступну клітинку для заповнення. Знову знаходимо різниці між мінімальними тарифами в кожному з рядків і стовпців, що залишились. Запишемо їх відповідно в другому додатковому стовпці і рядку таблиці 5.14. Як видно з цієї таблиці, найбільша різниця (в даному випадку однакова) буде в стовпцях B_3 і B_4. Вибираємо той стовпець, в якому найменший мінімальний тариф.

Це буде стовпець B_3. На перетині цього стовпця з рядком A_2 визначаємо клітинку з мінімальним тарифом і заповнюємо її з врахуванням потреб пункту B_3 та запасів пункту A_2, виключаємо з розгляду стовпець B_3 і будемо рахувати запаси пункту A_2 рівними 180-120=60 одиниць.

Продовжимо ітераційний процес, послідовно заповнюючи клітинки, що знаходяться на перетині рядка A_3 і стовпця B_5, рядка A_1 та стовпця B_4, рядка A_2 і стовпця B_2, рядка A_3 і стовпця B_4, рядка A_3 і стовпця B_2.

Таблиця 5.6

Пункти відправлення	Пункти призначення					Запаси	Різниці по рядкам				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5						
A_1	^{2} 60	^{3}	^{4}	^{2} 80	^{4}	140	0	1	1	1	
A_2	^{8}	^{4} 60	^{1} 120	^{4}	^{1}	180	0	0	3	0	0
A_3	^{9}	^{7} 10	^{3}	^{7} 50	^{2} 100	160	1	1	$5^{(3)}$	0	0
Потреби	60	70	120	130	100	480					
Різниці по стовпцям	$6^{(1)}$	1	2	2	1						
	-	1	$2^{(2)}$	2	1						
	-	1	-	2	1						
	-	1	-	$2^{(4)}$	-						
	-	$3^{(5)}$	-	3	-						

В результаті отримаємо опорний план:

$$X = \begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 & 80 & 0 \\ 0 & 60 & 120 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 50 & 100 \end{bmatrix}$$

При цьому плані загальна вартість перевезення така:

$F = 2 \cdot 60 + 4 \cdot 60 + 7 \cdot 10 + 1 \cdot 120 + 2 \cdot 80 + 7 \cdot 50 + +2 \cdot 100 = 1260.$

Як правило, використання методу апроксимації Фогеля дозволяє отримати опорний план, близький до оптимального, або сам оптимальний план.

5.4 Розв'язання транспортної задачі методом потенціалів

Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Але найбільш часто використовуються метод потенціалів і метод диференціальних рент.

Загальний принцип визначення оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів аналогічний принципу розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом, тобто: на початку знаходять опорний план транспортної задачі, а потім його послідовно покращують до отримання оптимального плану. Планом транспортної задачі буде матриця

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

в якій спостерігається баланс по рядках і стовпцях. Це відповідає вимогам обмежень задачі. Опорний план транспортної задачі буде містити (*m*+*n*-*1*) базисну компоненту. Система обмежень складається з (*m*+*n*) обмежень – рівнянь, однак незалежних рівнянь (*m*+*n*-*1*) (вимога $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ робить систему залежною).

Якщо число базисних компонент менше, ніж (*m*+*n*-*1*), то опорний план вироджений, тоді деякі нульові компоненти необхідно вважати базисними. Їх кількість така, що базисних усього буде (*m*+*n*-*1*).

Опорний план може бути визначений різними способами. Наприклад, метод північно-західного кута, метод найменших елементів, метод Фогеля. Алгоритмічно визначити опорний план це значить знайти місця розташування додатних компонент і їх величини таким чином, щоб був баланс по рядках і стовпцях (умова плану) і їх кількість було (*m*+*n*-*1*) (умова опірності плану).

Метод потенціалів заснований на ідеї знаходження потенціалів (величин α_i і β_j) і виборі компоненти, що вводиться в базис, якщо опорний план не оптимальний. Для цього кожному постачальнику і кожному споживачеві ставлять у відповідність певні числа $\alpha_i\,(i=\overline{1,m})$, і $\beta_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, які називають відповідно потенціалами постачальників і споживачів.

Метод потенціалів базується на теоремах теорії потенціалів [24].

Теорема 1. Якщо план $\overline{X}^{*} = \{x^{*}_{ij}\}$ транспортної задачі (ТЗ) є оптимальним, то йому відповідає система з m + n чисел α_i і β_i, яка задовольняє умови:

$$\alpha_i + \beta_i = c_{ij} \text{ для } x_{ij} > 0 \quad (i = \overline{1,m}),$$

$$\alpha_i + \beta_i \le c_{ij} \text{ для } x_{ij} = 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Теорема 2. Якщо при підстановці компонент оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі i -те обмеження перетворюється в нерівність, то i -та компонента оптимального плану ТЗ дорівнює нулеві.

З теореми 1 випливає, що для оптимальності опорного плану необхідне виконання наступних умов: а) для кожної заповненої клітинки $(i, j),(x_{ij} > 0)$: $\alpha_i + \beta_i = c_{ij}$; б) для кожної незаповненої клітинки ($x_{ij} = 0$): $\alpha_i + \beta_i \le c_{ij}$, тобто $\alpha_i + \beta_i - c_{ij} \le 0$.

Алгоритм методу потенціалів представляє покроковий процес, що складається з перевірки на оптимальність опорного плану, виродженість і перехід на повний опорний план. Процес керується ознакою оптимальності. Опишемо цей процес.

Крок 1. Звести дані в таблицю і визначити опорний план. Якщо план вироджений, то ввести нульові базисні елементи.

Крок 2. Скласти систему рівнянь для $x_{ij} \ne 0$ і обчислити всі потенціали відповідно пунктів відправки і пунктів призначення α_i і β_j. Ці числа знаходять з системи рівнянь

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}, \qquad (5.2.6)$$

де c_{ij}– тарифи, що стоять в заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі.

Так як кількість заповнених клітинок *n+m-1*, то система (5.2.6) з *n+m* невідомими містить *n+m-1* рівнянь. Оскільки кількість невідомих перевищує на одиницю кількості рівнянь, то одне з невідомих можна покласти рівним довільному числу, наприклад, α_i=0, і знайти послідовно з рівнянь (5.2.6.) значення інших невідомих. Після того, як всі потенціали визначені, для кожної вільної клітинки визначають числа

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij}.$$

Якщо серед чисел α_{ij} немає додатних, то знайдений опорний план є оптимальним. В противному випадку необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають всі вільні клітинки, для яких α_{ij}>0, і серед даних чисел вибирають максимальне. Клітинку, якій це число відповідає, необхідно заповнити.

Заповнюючи вибрану клітинку, необхідно змінити об'єми поставок, записаних в ряді інших зайнятих клітинок.

Процедура переходу від одного опорного плану до іншого виконується таким чином. Нехай вибраний деякий небазисний елемент x_{ij}, який вводиться в базис. Відмітимо його знаком “+”. Далі будується замкнений ланцюжок вершинами якого будуть базисні елементи опорного плану. Вершини ланцюжка позначаються знаком “+” і “-” по черзі, дотримуючи правило: кожний рядок і стовпець повинні мати стільки елементів, відмічених знаком “-”, скільки “+”. Серед елементів, відмічених знаком “-” вибирається мінімальний елемент. Позначимо через θ.

θ додається до елементів відмічених знаком “+” і віднімається з елементів, відмічених знаком “-”.

Крок 3. Після цієї процедури отриманий новий опорний план перевіряємо на оптимальність, тобто знову повторюємо всі дії кроку 2.

Зауважимо, що в процесі розв’язання задачі може бути отриманий вироджений опорний план. Щоб уникнути в цьому випадку зациклювання, необхідно відповідні нульові елементи опорного плану замінити малим додатнім числом E і розв’язувати задачу як невироджену. В оптимальному плані такої задачі необхідно вважати E рівним нулеві.

Приклад.

Визначимо оптимальний план транспортної задачі методом потенціалів.

Вхідні дані задачі запишемо у вигляді таблиці 5.7

Таблиця 5.7

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	1	6	170
Потреби	120	50	190	110	470

В першу чергу, використовуючи метод мінімального елементу, знаходимо опорний план задачі. Цей план записаний в таблицю (5.8)

Таблиця 5.8

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	1 30	6 90	170
Потреби	120	50	190	110	470

Складемо систему рівнянь:

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1;$$
$$\alpha_3 + \beta_4 = 6;$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 4;$$
$$\alpha_2 + \beta_4 = 8;$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 2;$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 1;$$

Нехай $\alpha_1 = 0.$ Тоді $\beta_3 = 1,$ $\alpha_3 = 0,$ $\beta_4 = 6,$ $\alpha_2 = 6$, $\beta_1 = -2,$ $\beta_2 = 2$.

Тепер для кожної вільної комірки визначимо числа $\alpha_{ij} = \alpha_i + \beta_J - c_{ij}$:

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - \tilde{n}_{11} = 0 - 2 - 7 = -9;$$
$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - \tilde{n}_{12} = 0 + 2 - 8 = -6;$$
$$\alpha_{22} = \alpha_2 + \beta_2 - \tilde{n}_{22} = 6 + 2 - 5 = 3;$$
$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - \tilde{n}_{23} = 6 + 1 - 9 = -2;$$
$$\alpha_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - \tilde{n}_{31} = 0 - 2 - 9 = -11;$$
$$\alpha_{14} = \alpha_1 + \beta_4 - \tilde{n}_{14} = 0 + 6 - 2 = 4.$$

Заключаємо знайдені числа в рамки і записуємо їх відповідно в кожну вільну комірку таблиці 5.9.

Таблиця 5.9

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 $\boxed{-9}$	8 $\boxed{-6}$	1 160	2 $\boxed{4}$	160
A_2	4 120	5 $\boxed{3}$	9 $\boxed{-2}$	8 20	140
Aз	9 $\boxed{-11}$	2 50	1 30	6 90	170
Потреби	120	50	190	110	470

План не оптимальний, так як $\alpha_{14} = 4 > 0$. Потрібно компонент x_{14} ввести в базис. Побудуємо ланцюжок.

		-160	+
120			20
	50	+30	-90

Найменше з чисел в мінусових клітинках дорівнює 90. Отже, клітинка в якій знаходиться це число, стає вільною в новій таблиці 5.10. Інші числа в табл.5.10 отримуються так: до чисел, що стоять в плюсових клітинках ланцюжка додамо числа, що знаходиться в мінусових клітинках з урахуванням потреб та запасів. Клітинка на перетині стрічки A_3 і стовпця B_4 стає вільною.

Після цих перетворень отримуємо новий опорний план (табл.5.10).

Таблиця 5.10

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 -2	8 -19	1 70	2 90	160
A_2	4 120	5 -16	9 -16	8 20	140
Аз	9 -8	2 50	3 120	6 -8	170
Потреби	120	50	190	110	470

Перевіримо цей план на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправки і призначення. Для цього складемо наступну систему рівнянь:

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1;$$
$$\alpha_1 + \beta_4 = 2;$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 4;$$
$$\alpha_2 + \beta_4 = 8;$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 2;$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

Покладемо $\alpha_1 = 0$. Отримаємо: $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = 2$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = -2$, $\alpha_2 = 6$, $\beta_2 = 2$.

Для кожної вільної клітинки обчислимо числа:

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - \tilde{n}_{11} = 0 - 2 - 7 = -9;$$
$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - \tilde{n}_{12} = 0 + 2 - 8 = -6;$$
$$\alpha_{22} = \alpha_2 + \beta_2 - \tilde{n}_{22} = 6 + 2 - 5 = 3;$$
$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - \tilde{n}_{23} = 6 + 1 - 9 = -2;$$
$$\alpha_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - \tilde{n}_{31} = 0 - 2 - 9 = -11;$$
$$\alpha_{34} = \alpha_3 + \beta_4 - \tilde{n}_{34} = 0 + 2 - 6 = -4.$$

В даному випадку $\alpha_{22} > 0$, отже опорний план не є оптимальним. Побудуємо ланцюжок.

		-70	+90
120	+		-20
	-50	+120	

Найменше з чисел у мінусових клітинках дорівнює 20 і його запишемо у клітинку A_2 B_2. Отже клітинка, в якій знаходилось це число, стає вільною у новій таблиці 5.11. Інші числа у таблиці 5.11 отримуються так: до числа 90 додаємо 20 і одночасно від числа 70 віднімаємо 20 і додаємо його до числа 120 та віднімаємо число 20 від 50. Після цих перетворень отримуємо новий опорний план (табл. 5.11). Перевіримо цей план на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправки і призначення. Для цього складемо наступну систему рівнянь:

$$\alpha_1 + \beta_3 = 1;$$
$$\alpha_1 + \beta_4 = 2;$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 4;$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = 5;$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 2;$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

Покладемо $\alpha_1 = 0$. Отримаємо: $\beta_3 = 1,\quad \beta_4 = 2,$ $\alpha_3 = 1 - 1 = 0,\ \ \beta_2 = 2 - 0 = 2,\ \ \alpha_2 = 3,\ \ \beta_1 = 1.$

Для кожної вільної клітинки обчислимо числа:

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - \tilde{n}_{11} = 0 + 1 - 7 = -6;$$

$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - \tilde{n}_{12} = 0 + 2 - 8 = -6;$$

$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - \tilde{n}_{23} = 3 + 1 - 9 = -5;$$

$$\alpha_{24} = \alpha_2 + \beta_4 - \tilde{n}_{24} = 3 + 2 - 8 = -3;$$

$$\alpha_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - \tilde{n}_{31} = 0 + 1 - 9 = -8;$$

$$\alpha_{34} = \alpha_3 + \beta_4 - \tilde{n}_{34} = 0 + 2 - 6 = -4.$$

В даному випадку всі α_{ij}<0 і опорний план є оптимальний.

Таблиця 5.11

Пункти відправлення	Пункти призначення				Запас
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7 $\boxed{-6}$	8 $\boxed{-6}$	1 50	2 110	160
A_2	4 120	5 20	9 $\boxed{-5}$	8 $\boxed{-3}$	140
Аз	9 $\boxed{-8}$	2 30	1 140	6 $\boxed{-4}$	170
Потреби	120	50	190	110	470

Сумарні транспортні витрати:

F = 1·50 + 2·110 + 4·120 + 5·20 + 2·30 + 1·140 = =1050.

Отже, отримуємо наступний оптимальний план:

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{bmatrix}$$

6 Стержневі системи

6.1 Загальні положення

Розглянемо конструкцію з плоскої шарнірно-стержневої ферми (рис. 6.1). Будемо вважати, що стержні ферми не мають попередньої напруженості, а зовнішні навантаження у вигляді сил $R_к$ прикладені у вузлах.

Сили завантаження F_2 і F_3, діючі в навантаженнях па типовий елемент e_2, представимо в вигляді проекцій Fx_2, Fy_2, Fx_3 і Fy_3, відповідно, (рис.6.1,а).

Зміщення вузлів елемента від їх початкового положення (без зусиль діючих на ферму) позначимо відповідно через δx_2, δy_2, δx_3, δy_3.

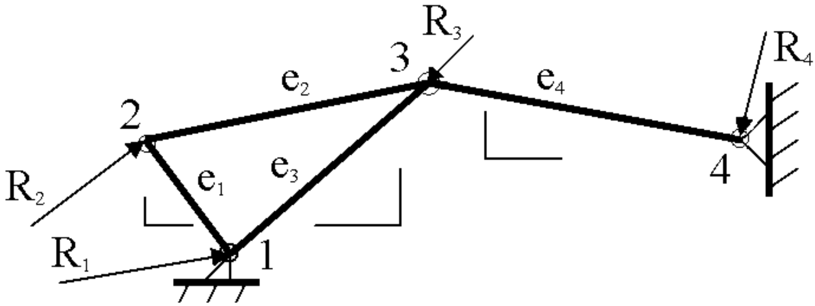


Рисунок 6.1

Розтяг або стиск стержня не завантаженої довжини L визначається величиною $((\delta x_3 - \delta x_2)\cos\varphi + (\delta y_3 - \delta y_2)\sin\varphi)$ і деформація отримається в результаті ділення цієї величини на L . Оскільки напруження дорівнює модулю Юнга E=[Н/м^2 (кГ/см^2)] помноженому на деформацію, то

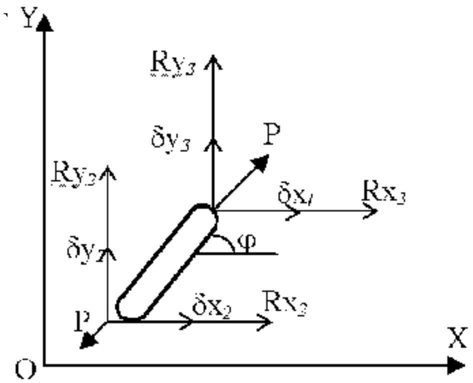


Рисунок 6.1 а

повздовжня сила, яка прикладена до стержня (рис.6.1 а) описується виразом

$$P = \left(\frac{EA}{L}\right)\left((\delta x_3 - \delta x_2)\cos\varphi + (\delta y_3 - \delta y_2)\sin\varphi\right), \qquad (6.1.1)$$

де A - площа поперечного перерізу стержня.

Компоненти повздовжньої сили P можуть бути прирівняні компонентам шарнірних сил:

$$F^{e2} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P\cos\varphi \\ -P\sin\varphi \\ P\cos\varphi \\ P\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (6.1.2)$$

$$Fx_2 = \left(\frac{EA}{L}\right)\left[\cos^2\varphi \quad \sin\varphi\cos\varphi \quad -\cos^2\varphi \quad -\sin\varphi\cos\varphi\right]\begin{pmatrix}\delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{pmatrix}, \qquad (6.1.3.а)$$

$$Fy_2 = \left(\frac{EA}{L}\right)\left[\sin\varphi\cos\varphi \quad \sin^2\varphi \quad -\sin\varphi\cos\varphi \quad -\sin^2\varphi\right]\begin{pmatrix}\delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{pmatrix}, \qquad (6.1.3.б)$$

$$Fx_3 = \left(\frac{EA}{L}\right)\left[-\cos^2\varphi \quad -\sin\varphi\cos\varphi \quad \cos^2\varphi \quad \sin\varphi\cos\varphi\right]\begin{pmatrix}\delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{pmatrix}, \qquad (6.1.3.в)$$

$$Fy_2 = \left(\frac{EA}{L}\right)\left[-\sin\varphi\cos\varphi \quad -\sin^2\varphi \quad \sin\varphi\cos\varphi \quad \sin^2\varphi\right]\begin{pmatrix}\delta x_2\\ \delta y_2\\ \delta x_3\\ \delta y_3\end{pmatrix}, \qquad (6.1.3.г)$$

Одержані рівняння (6.1.3) запишемо у такому вигляді:

$$F^{e2} = \begin{pmatrix}Fx_1\\ Fy_1\\ Fx_s\\ Fx_l\end{pmatrix} = EA/L\begin{pmatrix}\cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi\\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi\\ -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi\\ -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_l\\ \delta y_l\\ \delta x_s\\ \delta y_l\end{pmatrix}$$

(6.1.4).

Рівняння (6.1.4) є матричне рівняння для елемента e_2 (узагальнений закон Гука) і його квадратна матриця коефіцієнтів з множником EA/L називається матрицею жорсткості K_2 даного елемента [15]. Аналогічні рівняння можуть бути отримані і для інших елементів.

Рівняння (6.1.4) може бути розширене так, щоб воно включало всі вузлові зміщення системи. Для цього необхідно розширити (проасамблювати) матрицю жорсткості з використанням необхідної кількості нулів. Порядок розширеної матриці K_2 дорівнює подвійному добутку кількості вузлів конструкції. Так для стержневої системи (рис. 6.1) розмірність розширеної матриці dim K=8*8.

В результаті маємо:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Fx_2 \\ Fy_3 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \delta x_4 \\ \delta y_4 \end{pmatrix}$$

(6.1.4.а)

Зовнішні сили R_1, R_2, R_3, R_4 виражаються через x, y - компоненти Rx_1, Ry_1, ... , Rx_4, Ry_4, а умова рівноваги в вузлових точках може бути визначена через ці компоненти. Наприклад, у вузлі 2 умова рівноваги в напрямку x має вигляд

$$Rx_2=Fx_2^{e1}-Fx_2^{e2}. \qquad (6.1.5)$$

Ясно, що вклад в праву частину (6.1.5) дають тільки ті елементи, які включають вузол 2, але зручно записати (6.1.5) в такому вигляді:

$$Rx_2=\sum_{e=1}^{4} Fx_2^e \qquad (6.1.5а)$$

Аналогічне співвідношення отримується для другої компоненти вектора R2:

$$Ry_2=\sum_{e=1}^{4} Fy_2^e \qquad (6.1.5б)$$

Рівняння (6.1.5,а) і (6.5.1,б) можна об'єднати в матричний запис:

$$R_2 = \begin{bmatrix} Rx_2 \\ Ry_2 \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^{4} F_2^e. \qquad (6.1.6)$$

Аналогічні рівняння можна записати і для інших вузлів. Підсумкова система рівнянь рівноваги запишеться так:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ R_4 \end{pmatrix} = \sum_{e=1}^{4} F_2^e. \qquad (6.1.7)$$

Підстановка виразів типу (6.1.4) в рівняння (6.1.7) дає

$$R = \sum_{e=1}^{4} K_e \cdot \delta = K \cdot \delta. \qquad (6.1.8)$$

де К - матриця жорсткості системи, δ - вектор вузлових зміщень системи .

Формула (6.1.8) дає можливість обчислити зміщення і реакції вузлів.

6.2 Стержневі системи

Деяка сукупність стержнів, які мають певні вузли, становить стержневу систему [6]. В інженерній практиці конструкторів завжди цікавить важливе питання: чи буде стержнева система в рівновазі. На це питання дає відповідь математична модель стержневої системи, яка будується на основі системного аналізу. Всі теоретичні положення будемо розглядати на основі стержневої системи, яка зображена на рисунку 6.2.

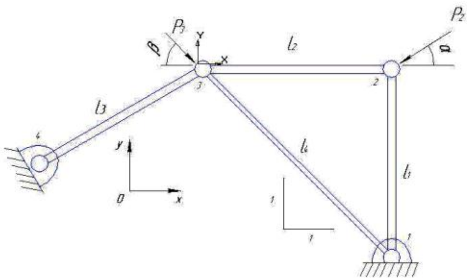


Рисунок 6.2

Система складається з чотирьох стержнів: L_1, L_2,L_3,L_4, які мають відповідно площі поперечного перерізу A_1, A_2, A_3, A_4. Стержні мають вузли , які ми занумерували вузлами:1, 2, 3 та 4 . Всі стержні виготовлені з одного матеріалу, модуль Юнга, якого - E.

Стержень L_1 перпендикулярний до осі OX, стержень L_3 $\frac{\pi}{3}$ утворює з віссю OX кут $\frac{3\pi}{4}$, а стержень L_4 утворює з віссю OX кут

Алгоритм формування математичної моделі даної системи такий:

1. Обчислюємо матриці жорсткості для кожного стержня за формулою (6.1.5).

а) СтерженьL_1 утворює з віссю OX кут φ=$\dfrac{\pi}{2}$.

$$\cos\frac{\pi}{2}=0;\ \ \sin\frac{\pi}{2}=1.\ \text{Маємо:}$$

$$K_1=\frac{EA_1}{L_1}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix} \qquad (6.2.1.а)$$

б) Стержень L_2 утворює з віссю OX кут 0.

$$K_2=\frac{EA_2}{L_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \qquad (6.2.1.в)$$

в) Стержень L_3 утворює з віссю OX кут φ = $\dfrac{\pi}{3}$. Маємо:

$$\hat{E}_3=\frac{EA_3}{L_3}\begin{pmatrix}0.25&0.433&-0.25&-0.433\\0.433&0.75&-0.433&-0.75\\-0.25&-0.433&0.25&0.433\\-0.433&-0.75&0.433&0.75\end{pmatrix} \qquad (6.2.1.c)$$

г) Стержень L_4 утворює з віссю OX кут φ= $\dfrac{3\pi}{4}$. Відомо, що

$$\cos\frac{3\pi}{4}=-\sqrt{2}/2;\quad \sin\frac{3\pi}{4}=\sqrt{2}/2.$$

Тоді за формулою (6.1.5) маємо:

$$K_4=\frac{EA_4}{L_4}\begin{pmatrix}1/2&-1/2&-1/2&1/2\\-1/2&1/2&1/2&-1/2\\-1/2&1/2&1/2&-1/2\\1/2&-1/2&-1/2&1/2\end{pmatrix}=\frac{EA_4}{2L_4}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix} \qquad (6.2.1,d)$$

2. Задаємо конкретні величини: $E=2\cdot10^{10}$ кГ/см^2; $A_1=A_2=A_3=A_4=0{,}5$ дм^2;
$L_1=L_2=L_3=10$ м; $L_4=14$ м. (округлено для спрощення подальших розрахунків). І підставляємо їх у формули 6.2.1.a,в,c,d.

3. Формуємо дві загальні матриці реакції та зміщення вузлів. Маємо 4 вузли. Отже, маємо 8 реакцій та 8 зміщень:

$$R=\begin{pmatrix} Rx_1 \\ Ry_1 \\ Rx_2 \\ Ry_2 \\ Rx_3 \\ Ry_3 \\ Rx_4 \\ Ry_4 \end{pmatrix} \qquad \Delta=\begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \delta x_4 \\ \delta y_4 \end{pmatrix} \qquad (6.2.2)$$

Найважливішою механічною властивістю стержневої системи є те, що поведінка системи описується узагальненим законом Гука:

$$R = K\Delta \qquad (6.2.3)$$

У формулі (6.2..3)dim R=8·1. Тоді виникає така розмірність

$$\dim K=8\cdot8 \qquad (6.2.4)$$

Тепер основна проблема полягає в тому щоб отримати матрицю K, знаючи 4 матриці K_1,K_2,K_3 та K_4. Цю проблему розв’язує процес ансамблювання матриць.

Запишемо формулу (6.2.3) в розгорнутому вигляді:

$$\begin{pmatrix} Rx_1 \\ Ry_1 \\ Rx_2 \\ Ry_2 \\ Rx_3 \\ Ry_3 \\ Rx_4 \\ Ry_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ & & & & & & & \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \delta x_4 \\ \delta y_4 \end{pmatrix} \qquad (6.2.5)$$

Формула (6.2.5) повинна співпадати з формулою(6.1.6) для стержня L_1. А це означає, перші чотири рядки матриці K_1 повинні залишатись без зміни, а решта елементів нулі. Аналогічно будемо міркувати для стержнів L_2, L_3 та L_4.

4. Ансамблювання матриць.

Для збереження закону Гука ми повинні зберегти матрицю K_1, а решту елементів прирівняти до нуля.

$$K_1 = 10^9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2.6.a)$$

Пунктиром окреслена матриця K_1. Матриця K_2 не містить вузла 1 та вузла 4.

Отже будемо мати:

$$K_2 = 10^9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2.6.b)$$

Матриця K_3 не містить вузла 1 та 2. Отже отримаємо:

$$K_3 = 10^9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.433 & -0.25 & -0.433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.433 & 0.749 & -0.433 & -0.749 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.433 & 0.25 & 0.433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.433 & -0.49 & 0.433 & 0.749 \end{pmatrix} \qquad (6.2.6.c)$$

Наголосимо, що стержень L_4 містить вузол 1 та 3, а не містить вузол 2 та 4. Вузлу 2 відповідають третій та четвертий рядки, які будуть нулями та 7 і 8 рядки – теж нулі. Маємо:

$$K_4 = 10^9 \begin{pmatrix} 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & -0.357 & 0.357 & 0 & 0 \\ -0.357 & 0.357 & 0 & 0 & 0.357 & -0.357 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.357 & 0.357 & 0 & 0 & 0.357 & -0.357 & 0 & 0 \\ 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & -0.357 & 0.357 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2.6.d)$$

5. Формування загальної матриці жорсткості стержневої системи відбувається за формулою (2.2.7):

$$R=\sum K_i, \qquad i=\overline{1, n} \qquad (6.2.7)$$

У формулі (2.2.7) K_i – ансамбльовані матриці. Для нашого прикладу маємо:

$$K=K_1+K_2\cdot\cdot K_3+K_4 \qquad (6.2.7.a)$$

Наголосимо, що при виконанні додавання перед дужкою у матрицях повинні бути однакові множники. Маємо:

$$K=10^9\begin{pmatrix} 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & -0.357 & 0.357 & 0 & 0 \\ -0.357 & 1.357 & 0 & -1 & 0.357 & -0.357 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.357 & 0.357 & -1 & 0 & 1.607 & 0.076 & -0.25 & -0.433 \\ 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & 0.076 & 1.106 & -0.433 & -0.749 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.433 & 0.25 & 0.433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.433 & -0.749 & 0.433 & 0.749 \end{pmatrix} \qquad (6.2.7.b)$$

6. Граничні умови. На рисунку 6.2 маємо:

1) Вузли 3 та 4 закріплені наглухо. Отже, $\delta x_1=\delta y_1=\delta x_4=\delta y_4=0$.
2) На вузол 3 діє сила P_2=1000 кг. під кутом $\alpha=\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$, а на вузол 3 діє сила P_3=2000 кг. під кутом $\beta=\mathrm{arctg}\frac{4}{3}$.

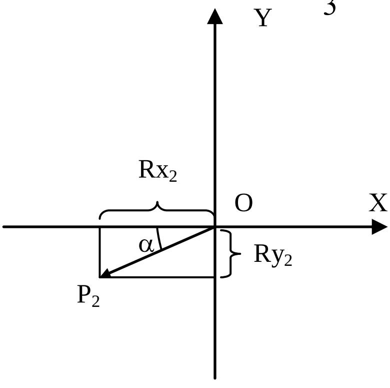


Рисунок 6.3

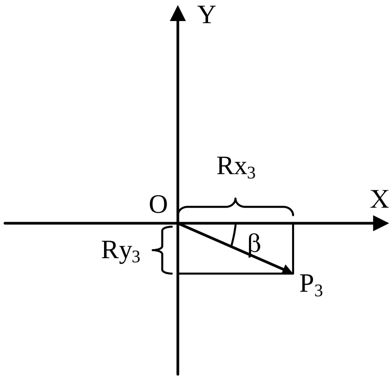


Рисунок 6.4

Цілком зрозуміло, що $\cos\beta=4/5$; $\sin\beta=3/5$.

Знаки проекцій вибираємо згідно рисунка 9 та 10. Маємо:

Rx_2 = -P2 $\cos\alpha$= -1000·3/5 = -600 (кГ.)

Ry_2 = -P2 $\sin\alpha$= -1000·4/5 = -800 (кГ.)

Rx_3 = +P3 $\cos\beta$= 2000·3/5 = 1200 (кГ.)

Ry_3 = -P3 $\sin\beta$= -2000·4/5 = -1600 (кГ.)

За формулою (6.2.5) формулюємо матричну модель стержневої системи, зображеної на рис.6.2.

$$\begin{pmatrix} Rx_1 \\ Ry_1 \\ \hline -800 \\ -600 \\ 1200 \\ -1600 \\ \hline Rx_4 \\ Rx_4 \end{pmatrix} = 10^9 \left(\begin{array}{cc|cccc|cc} 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & -0.357 & 0.357 & 0 & 0 \\ -0.357 & 1.357 & 0 & -1 & 0.357 & -0.357 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.357 & 0.357 & -1 & 0 & 1.607 & 0.076 & -0.25 & -0.433 \\ 0.357 & -0.357 & 0 & 0 & 0.076 & 1.106 & -0.433 & -0.749 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -0.25 & -0.433 & 0.25 & 0.433 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.433 & -0.749 & 0.433 & 0.749 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6.2.8)$$

Формула (2.2.8) становить математичну модель стержневої системи, зображеної на рис.6.2.

1) Нам відомі реакції вузла 2 та 3. Отже, нам потрібно розв'язувати систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 12 \\ -16 \end{pmatrix} \cdot 10^2 = 10^9 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1.607 & 0.076 \\ 0 & 0 & 0.076 & 1.106 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \end{pmatrix} \qquad (6.2.9)$$

4. Розглядаючи (6.2.9) як систему вигляду AX=B, та розв'язуючи її по методу Гауса маємо:

$\delta x_2=5.789\cdot10^{-7}$ (см).

$\delta y_2=-8\cdot10^{-7}$ (см).

$\delta x_3=1.179\cdot10^{-6}$ (см).

$$\delta y_3=-1.526\cdot 10^{-6} \text{ (см)}.$$

5. Враховуючи (6.2.10) обчислимо реакції нерухомих вузлів згідно формули (6.2.8).

а) Rx_1 знаходимо в першому порядку.

$Rx_1=-966.025$ (кГ.)

б) Ry_1 знаходимо в другому порядку.

$Ry_1=1766.025$ (кГ.)

в) Rx_4 знаходимо в сьомому порядку.

$Rx_4=366.025$ (кГ.)

г) Ry_4 знаходимо в восьмому порядку.

$Ry_4=633.975$ (кГ.)

6. Контроль.

7. Якщо знайдені розв'язки математичної моделі (6.2.8) вірно, то стержнева система повинна знаходитись у рівновазі.

Отже, повинно виконуватись дві рівності:

$$1.\Sigma\, Rx_i=0;$$

$$2.\Sigma\, Ry_i=0.$$

Перевірка:

а) $Rx_1+Rx_2+Rx_3+Rx_4=-966.025-600+1200+366.025=-3.411\cdot 10^{-13}$;

б) $Ry_1+Ry_2+Ry_3+Ry_4=1766.025-800-1600+633.975=-2.274\cdot 10^{-13}$.

Отже, для математичної моделі (6.2.8) знайдено правильні розв'язки:

$$1.\Sigma\, Rx_i=0;$$

$$2.\Sigma\, Ry_i=0.$$

7 ЕЛЕКТРИЧНІ СИСТЕМИ.

7.1. Основні положення.

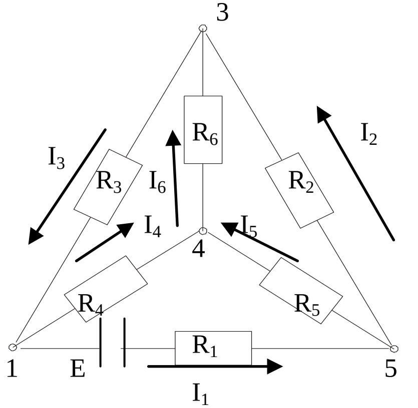


Рисунок 7.1

Електрична система складається з батареї з електрорушійною силою E, ребер провідників (провідників з опором R_k). По яких тече електричний струм Ik, та вузлів.

Приклад такої системи показано на рисунку 7.1[14]. Нумеруємо вузли. На ребрах довільним чином задаємо напрям електричних струмів I_k.

Для формування математичної моделі застосуємо два закони Кірхгофа, які виразимо мовою матричної алгебри. Відзначимо, що вони базуються на теорії графів, тобто залежать лише від способу з'єднання вершин ребрами і від напрямку стрілок, але не залежать від величин опору (або потужностей батарей) в контурі. Зв'язки між вершинами повністю описуються матрицею інцидентності графу цього контура, яка має рядок для кожної вершини або замкнутого контура і стовпець для кожного ребра.

В кожному стовпці цієї матриці два ненульових елемента +1 і -1 відмічають початкову і кінцеву вершину ребра.

Графом називають сукупність вершин (вузлів) і зв'язуючих їх ребер (ланок). Визначення графу може бути записане в такому вигляді:

$$Г = (У, Р, І),$$

де У - множина вершин; Р - множина ребер; І - інцидентор (показник способу з'єднання ребер одне з одним).

Якщо для ребер графу вказані конкретні напрямки, то граф називають направленим графом (орієнтованим або орграфом), ребра направленого графу називають дугами.

Маршрутом називають послідовність S ребер, в якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині. Термін "інцидентність" означає співвідношення об'єктів типу "проходить через..." або "знаходиться на...". На рис. 7.2 в графі послідовності (b,c,e,f,c,d) і (e,g) - маршрути, але (a,h) не маршрут, тому що ребра a і h інцидентні різним вершинам. Якщо в маршруті немає ребер, які повторюються, то маршрут називають ланцюгом. Якщо ланцюг починається і закінчується в одній і тій же самій вершині, то маємо цикл - контур. Кількість ребер в ланцюгові називають довжиною маршруту.

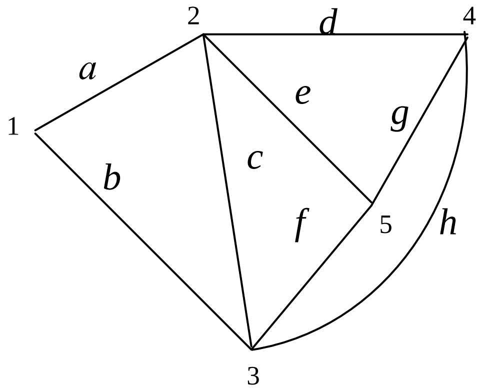


Рисунок 7.2.

Зв'язним графом називають граф, у якому можна вказати маршрут, що зв'язує будь-які вершини.

Деревом зв'язного графу називають зв'язний підграф без циклів.

За допомогою матриці інцидентності $A = [a_{i,j}]$ може бути виражена інформація, яка міститься у графі. В цій матриці β-1 рядків і α стовпців. Кожному вузлу за винятком одного, який приймається за базовий, в матриці відповідає один рядок; а кожному ребру один стовпець, В стовпці записуються одиниці на перетині з рядками тих вузлів, якому інцидентне ребро даного стовпця. Якщо граф направлений, то знаки одиниць вказують напрям дуг: +1 відповідає рядок вузла, до якого направлене ребро, -1 рядок другого вузла. В клітинках матриці, які залишилися, записуються нулі. Наприклад, матриця інцидентності для графу рис. 7.3 у випадку, коли базовим вузлом є вузол 4, представлена у таблиці 7.1.

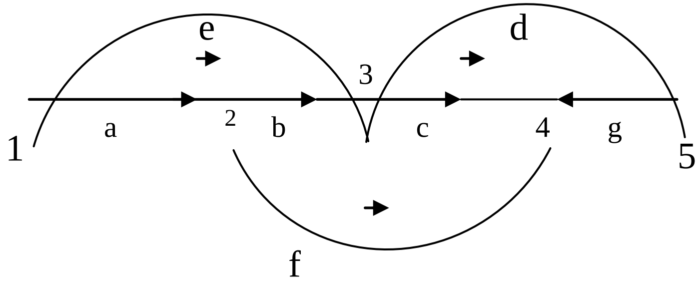


Рисунок 7.3

Таблиця 7.1

Вузл	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	0	0	0	-1	0	0
2	+1	-1	0	0	0	-1	0
3	0	+1	-1	-1	+1	0	0
4	0	0	+1	0	0	+1	+1
5	0	0	0	+1	0	0	-1

<u>ЗАКОН КІРХГОФА</u> для електричних струмів формулюється так:

алгебраїчна сума електричних струмів в кожному вузлі дорівнює нулеві.

Домовимось, що сила струму, що входить у вузол, має знак плюс, а сила струму, що виходить має знак мінус.

Наприклад для вузла 4 маємо: $I_4+I_5 – I_6=0$.

Перший закон Кірхгофа дає можливість застосування матриць інцидентності, які складаються лише з одиниць та нулів. Матриця інцидентності має стільки рядків, скільки електрична система має вузлів, а стовпців стільки, скільки ребер.

Так для електричної системи, зображеної на рисунку 7.1 матриця інцидентності буде мати 4 рядки та 6 стовпців.

Формується матриця інцидентності так:

$$\begin{array}{lrrrrrr}
 & I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 \\
1 \textit{вузол} & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
2 \textit{вузол} & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
3 \textit{вузол} & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
4 \textit{вузол} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1
\end{array}$$

Схема 1

Перший вузол: виходять струми I_1 та I_4,а входить струм I_3. Тому в схемі 1 ми фіксуємо проти I_3 одиницю, проти I_1 та I_4 – мінус одиницю, а решту місць заповнюємо нулями. Аналогічно заповнюємо схему 1 для решти вузлів. Тепер маємо таку систему чотирьох рівнянь, що містять 6 невідомих.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.1)$$

<u>ЗАКОН КІРХГОФА</u> для напруг формулюється так:

алгебраїчна сума напруг замкненого електричного кола дорівнює нулеві.

Наголосимо, що коли коло містить батарею, то сума напруг дорівнює ЕРС батареї.

Другий закон Кірхгофа дає можливість формування другої матриці інцидентності, яка має стільки рядків, скільки система має замкнених контурів, а стовпців, стільки система має ребер з напругою Ек.

Контури				*Напруги*					
				E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
1	2	4	1	1	0	0	−1	1	0
2	3	4	2	0	1	0	0	−1	−1
1	4	3	1	0	0	1	1	0	1
1	2	3	1	1	1	1	0	0	0

Схема 2.

Розглянемо на рис.7.1. контур 1241. Він містить 3 ребра: E_1, E_4 та E_5. Ми будемо обходити контур проти годинникової стрілки. Ясно, що E_1 має знак I_1; E_5 має знак I_5, а E_4 має знак мінус. Тому в схемі 2 проти цих величин пишемо 1, 1 та-1, а решту значень записуємо нулями. Аналогічно формуємо решту рядків схеми 2.

Можемо записати таку систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

Наголосимо, що контури 1241 та 1231 містять батарею, отже в системі (7.2) в правій частині є величина Е. Застосуємо закон Ома:

$$E_к = R_k \cdot I_k \qquad (7.3)$$

Множник R_k вносимо в матрицю інцидентності і система (7.2) запишеться так:

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & R_6 \\ R_1 & R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} \qquad (7.4)$$

Висновок.

Таким чином на основі першого закону Кірхгофа формуємо систему (7.1), на основі другого закону Кірхгофа – систему (7.2).

7.2 Математична модель електричної системи.

Як показано в монографії [16] система рівнянь (7.2), яка сформована для вузлів має завжди одне “зайве” рівняння (ранг системи на одиницю менший від кількості рівнянь).

Отже, ми візьмемо тільки перших три рівняння. Аналогічно система для напруг (3.1.3) має ранг на одиницю менший від кількості рівнянь. Отже, ми теж візьмемо тільки перших три рівняння, маємо таку математичну модель даної системи:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_5 & -R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.5)$$

Для отримання конкретних числових результатів візьмемо дані: R1=1; R2=2; R3=3; R4=4; R5=5; R6=6.

Отримуємо систему шести рівнянь, що містить шість невідомих:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (7.6)$$

Розв’язок цієї системи такий:

$I_1=\dfrac{133}{557}E$; $I_2=\dfrac{89}{557}E$; $I_3=\dfrac{82}{557}E$; $I_4=\dfrac{-51}{557}E$; $I_5=\dfrac{44}{557}E$; $I_6=\dfrac{-7}{557}E$.

Обчислимо напруги E1=(133/557)E; E2=(178/557)E ;E3 = (246/557)E :E_4 = (-204/557)E ; E5 = (22O/557)E ; E_6 = (-42/557)E .

Виконаємо першу перевірку для системи (7.6)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 133 \\ 89 \\ 82 \\ -51 \\ 44 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{557} = \frac{E}{557} \cdot \begin{pmatrix} -133 & 82 & 51 \\ 133 & -89 & -44 \\ 89 & -82 & -7 \\ -51 & 44 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Виконаємо другу перевірку для системи (7.6):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 133 \\ 178 \\ 246 \\ -204 \\ 220 \\ -42 \end{pmatrix} \cdot \frac{E}{557} = \frac{E}{557} \cdot \begin{pmatrix} 133 & 204 & 220 \\ 178 & -220 & 42 \\ 246 & -204 & -42 \\ 133 & 178 & 246 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix}$$

Розв’язки для електричної схеми, зображеної на рис. 7.1, обчислені правильно.

Зауваження. I_4 та I_6 мають знаки мінус. Це означає, що напрямки цих струмів треба змінити на протилежні.

8 Гідравлічні системи та приклад математичної моделі гідравлічної системи

Матричні рівняння для мережі взаємозв’язаних гідравлічних елементів аналогічні рівнянням будівельних конструкцій.

Розглянемо гідравлічну мережу, що зображена на рисунку 8.1. У випадку повільних (ламінарних) потоків потік Q через поперечний переріз
труби пропорційний різниці тисків на початку і в кінці труби, Зауважимо, що потік буде ламінарний, якщо число Рейнольда Re = ρvd/μ не перевищує 2000 (ρ – густина рідини, v – середня швидкість в погодженій системі координат, d – діаметр труби, μ – динамічна в’язкість).

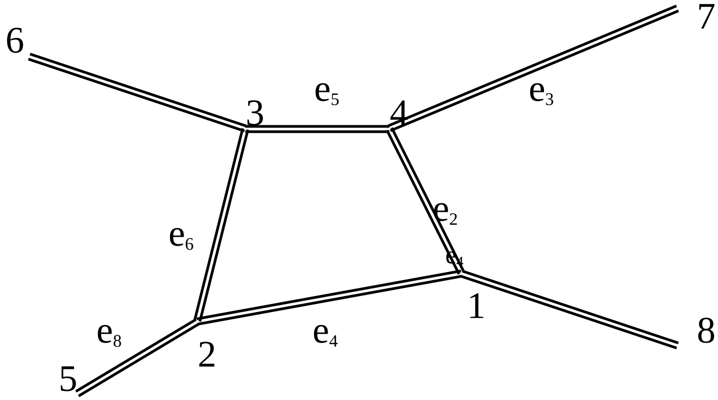


Рисунок 8.1

Для елемента e_6 (рис,8.2) потоки в цю трубу у вузлах 2 і 3 будуть (8.1) і (8.2) відповідно:

$$Q_2^{e_6} = c^{e_6}(p_2 - p_3),$$
$$Q_3^{e_6} = -c^{e_6}(p_2 - p_3),$$

де p_2 і p_3 - тиски в вузлах 2 і 3, Q_2 *і* Q_3 витрати потоків в тих же вузлах , а c - стала, яка залежить від властивостей рідини, діаметра і довжини труби.

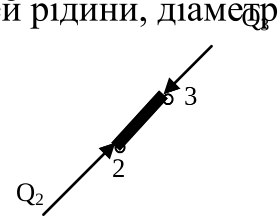


Рисунок 8.2

В матричній формі рівняння (8.1) набуде вигляду:

$$Q_{e_6} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{e_6} & -c^{e_6} \\ -c^{e_6} & c^{e_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = k^{e_6} \cdot p. \qquad (8.3)$$

Припустимо, що рідина надходить до мережі в вузлах 1,2, ..., 8 з витратами R_1 , R_2,...,R_8 відповідно.

Рівняння нерозривності для вузла 2 має вигляд .

$$R = \sum_{i=1}^{\infty} Q_2^{e_i} = 0 + 0 + 0 + Q_2^{e_4} + 0 + Q_2^{e_6} + 0 + Q_2^{e_8}. \qquad (8.4)$$

Система рівнянь типу (8.4) може бути записана таким чином

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ . \\ . \\ . \\ R_8 \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^{\infty} \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \\ . \\ . \\ . \\ Q_8^e \end{bmatrix} = \sum_{e=1}^{8} Q^e. \qquad (8.5)$$

З врахуванням (8.3) формула (8.5) запишеться у вигляді

$$R = к\ P. \tag{8.6}$$

Порівнюючи формулу (6.2.3.) узагальненого закону Гука для стержневих систем з формулою (8.6), отримуємо їх ідентичність.

Для заданих потоків, що підводяться, вузлові тиски можуть бути знайдені за допомогою рівняння (8.6). Після цього витрати через кожну трубу можна обчислити за допомогою рівняння (8.3).

Будемо розглядати гідравлічні системи, які складаються із трубопроводів, по яких тече рідина та газ або сипучі речовини.

Типова гідравлічна система зображена на рисунку 8.3. Із вузла 1 під тиском рухається рідина в кількості Qj .

Цю рідину отримують споживачі в кількості Q_5 та Q_3. Система складається із 6 трубопроводів та вузлів: 1,2,3,4,5 та 6. Наголосимо, що повинні бути задані довжини трубопроводів та їх діаметр. Для системи зображеної на рис.8.3. відомі такі дані:

Таблиця 8.1

Об’єм рідини, $см^3/с$	Довжина труби, м	Діаметр труби, см
1	2	3
Q_1	L_1=1000	D=3.07
Q_2	L_2=700	D=2.81
Q_3	L_3=800	D=2.21
Q_4	L_4=800	D=2.91
Q_5	L_5=700	D=3.34
Q_6	L_6=800	D=2.91

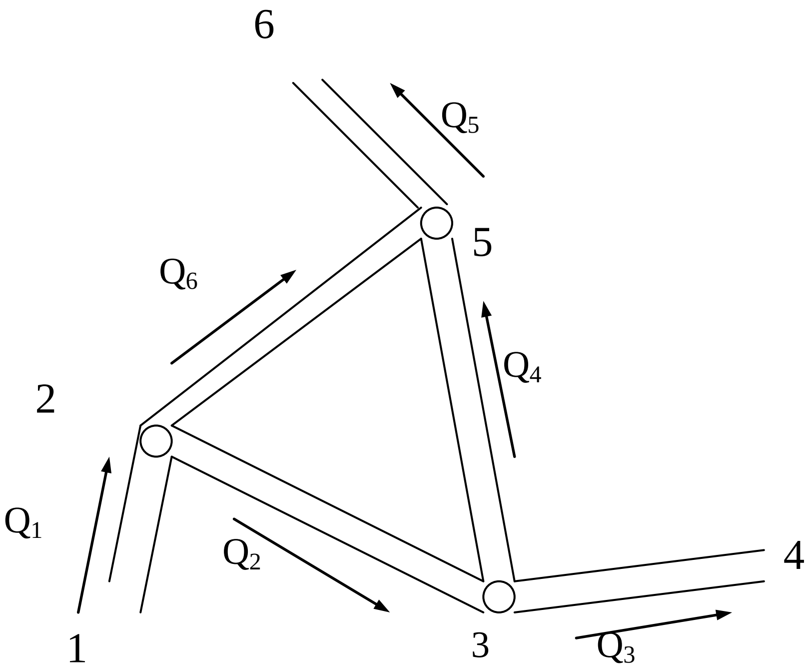


Рисунок 8.3

Оскільки між електричним струмом та рухом рідини є певна аналогія, то кажуть, що для вузлів гідравлічної системи справедливий перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума об’ємів рідин, що протікає через вузол, дорівнює нулеві.

Тепер розглянемо контури гідравлічної системи. Для контурів теж виконується закон Кірхгофа, тільки замість напруг розглядають перепади тисків. Розглянемо це питання детально. Для кожної труби справедлива формула Хазена-Паузейля [26]:

$$\Delta p = K_{ij} Q \qquad (8.7)$$

Яка стверджує, що перепад тиску ΔP пропорційний кількості рідини Q, що протікає через цю трубу. Для коефіцієнта K_{ij} існує [26] така залежність:

$$K_{ij}=\frac{128\mu L_s}{\pi \cdot d_s^4} \qquad (8.8)$$

Зауважимо, що L_s – довжина труби по якій протікає рідина Q; d_s – діаметр труби; μ - динамічна в’язкість рідини чи газу. Так для води $\mu=1{,}1\cdot10^{-8}$ кг·сек/см^2.

Цілком зрозуміло, що в формулі (8.8) L_s має розмірність в сантиметрах. Це ж стосується і діаметра труби d_s. Для гідравлічної системи, зображеної на рис.8.3 маємо:

$$K_{12}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot1.1\cdot10^{3}\cdot100}{3.14\cdot3.07^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

$$K_{23}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot700\cdot100\cdot1.1}{3.14\cdot2.81^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

$$K_{34}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot800\cdot100\cdot1.1}{3.14\cdot2.21^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

$$K_{35}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot800\cdot100\cdot1.1}{3.14\cdot2.91^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

$$K_{56}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot1.1\cdot700\cdot100}{3.14\cdot3.34^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

$$K_{25}=\frac{128\cdot10^{-8}\cdot800\cdot100\cdot1.1}{3.14\cdot2.91^4}\approx5\cdot10^{-4}$$

Зауважимо, що L1 - основний трубопровід, звідки під тиском p=2 атм.≈2 кГ/см^2 йде рух рідини. Користувачі отримують Q_3 та Q_5 рідини. Очевидно, що Q_i вимірюється в см^3/сек. Вузли 3 та 5 мають атмосферний тиск, тобто $p_{атм} \approx 1$ кГ/см^2.

Формуємо матрицю інцидентності для вузлів на основі першого закону Кірхгофа:

$$\begin{array}{c} \textit{Вузли} \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Отримали першу систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8.9)$$

Згідно рис.8.3 маємо 4 контури, для яких обчислюємо за законом Хазена-Паузеля перепади тиску:

Перепади тиску

Контури	ΔP_{12}	ΔP_{23}	ΔP_{34}	ΔP_{35}	ΔP_{25}	ΔP_{56}
1234	1	1	1	0	0	0
4356	0	0	−1	1	0	1
1256	1	0	0	0	1	1
2352	0	1	0	1	−1	0

Отримаємо другу систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta P_{12} \\ \Delta P_{23} \\ \Delta P_{34} \\ \Delta P_{35} \\ \Delta P_{25} \\ \Delta P_{56} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8.10)$$

Цілком зрозуміло, що за формулою (8.10) маємо:

$$\Delta P_{ij}=K_{ij}\cdot Q_s \tag{8.11}$$

Так, наприклад для трубопроводу L1 маємо:

$$\Delta P_{12}=K_{12}\cdot Q_1 \tag{8.12}$$

Значення коефіцієнтів Kij вносимо в матрицю інцидентності системи (8.10).

Отримаємо:

$$\begin{pmatrix} K_{12} & K_{23} & K_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{34} & K_{35} & K_{56} & 0 \\ K_{12} & 0 & 0 & 0 & K_{56} & K_{25} \\ 0 & -K_{23} & 0 & K_{35} & 0 & K_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.13}$$

Із системи (8.10) беремо два рівняння, а із системи (8.13) беремо три рівняння. Отримали математичну модель гідравлічної системи, зображеної на рис.8.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ K_{012} & K_{23} & K_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_{34} & K_{35} & K_{56} & 0 \\ K_{12} & 0 & 0 & 0 & K_{56} & K_{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.14}$$

Наголосимо, що Q1=1000 $см^3$/сек. Отже, система (4.1.8) містить п’ять рівнянь та п’ять невідомих. Розв’язуємо систему (4.1.8) за методом Гауса і отримаємо:

Q_1=400 $см^3$/сек;

Q_3=200 $см^3$/сек;

Q_4=200 $см^3$/сек;

Q_5=800 $см^3$/сек;

Q_6=600 $см^3$/сек;

Тепер за формулою (8.11) обчислимо перепади тисків:

$$\Delta P_{12}=5\cdot 10^{-4}\cdot 10^{3}=0{,}5;$$
$$\Delta P_{23}=5\cdot 10^{-4}\cdot 400=0{,}2;$$
$$\Delta P_{34}=5\cdot 10^{-4}\cdot 200=0{,}3;$$
$$\Delta P_{35}=5\cdot 10^{-4}\cdot 200=0{,}1;$$
$$\Delta P_{56}=5\cdot 10^{-4}\cdot 800=0{,}2;$$
$$\Delta P_{25}=5\cdot 10^{-4}\cdot 600=0{,}3.$$

Виконаємо перевірку системи (8.9):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 400 \\ 200 \\ 200 \\ 800 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000-400-600 \\ 400-200-200 \\ 200-800+600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Виконуємо перевірку системи (8.10):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5+0{,}2+0{,}3 \\ -0{,}3+0{,}1+0{,}3 \\ 0{,}5+0{,}2+0{,}3 \\ 0{,}2+0{,}1-0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже ми отримали правильні розв’язки.

9 СИСТЕМИ З КОМП'ЮТЕРНИМ КЕРУВАННЯМ.

9.1 Принципова схема системи з комп'ютером.

В 1956 році аерокосмічна компанія TRW в місті Порт-Артур (штат Техас) ввела в експлуатацію першу в світі автоматизовану систему керування комп'ютером агрегатом нафтопереробного заводу на базі комп'ютера RW-300.[17].

Система контролювала 26 матеріальних потоків, температуру в 72 точках, тиск в 3 точках та хімічний склад трьох сумішей. Її основні функції такі:

1.Мінімізація тиску в реакторі;
2. Оптимальний режим на виході п'яти реакторів;
3.Керування потоком гарячої води для каталізаторів;
4.Підтримка нормальної циркуляції в реакторі.

Успіх цієї першої автоматизованої системи з комп'ютером дав поштовх розвитку таких систем. Так в 1967 році у існувало 37 автоматизованих систем для керування енергетикою, прокатними станами, хімічними процесами.

У 1968 році таких систем було вже 159 [18]. Розглянемо принципову схему керування системою з допомогою комп'ютера.

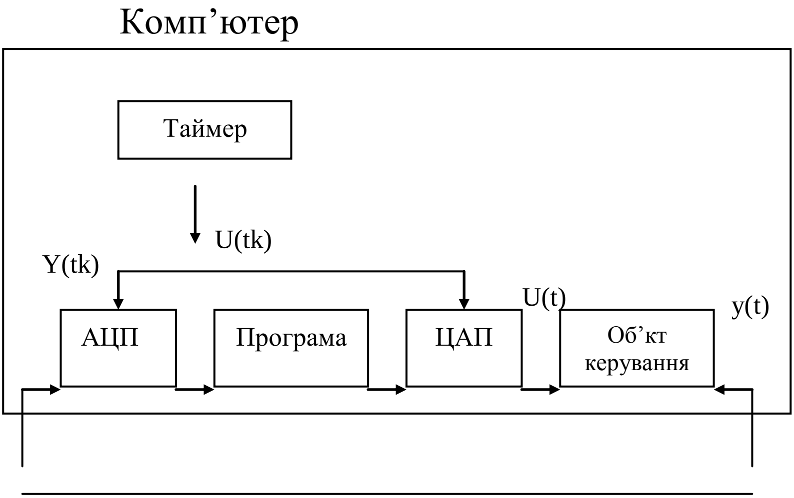


Рисунок 9.1

Система з комп’ютером працює так:

1. Об’єкт керування посилає неперервні сигнали y(t) на аналоговий цифровий перетворювач (АЦП).
2. АЦП перетворює неперервні сигнали в дискретні: $y(t) \rightarrow Y(t_k)$.
3. Програма, на основі якої працює комп’ютер, перетворює сигнали $Y(t_к)$ в сигнали $U(t_k)$.
4. Отримані дискретні сигнали цифрово-аналоговий перетворювач ЦАП перетворює в неперервні сигнали: $U(t_k) \rightarrow U(t)$.
5. Неперервні сигнали U(t) отримує об’єкт керування, аналізує ці сигнали та робить певну кореляцію сигналів Y(t), які направляє АЦП.

9.2 Математична модель технічного об'єкта із комп'ютерною системою управління

Введемо поняття матричної похідної:

$$\dot{X} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ : \\ dx_n/dt \end{pmatrix} \qquad (9.2.1)$$

Цілком зрозуміло, що dim dx/dt = n*1. Для схеми рис. 9.1 математична модель згідно монографії [17] має такий вигляд:

$$\frac{dy}{dt} = AY + BU \qquad (9.2.2)$$

Наголосимо, що залежність (9.2.2) являє собою матричну модель.

Матриці A та B мають своїми елементами функції або числа;

dim A=n*n; dim B=n*m; dim Y=dimY=n*1, dim U=m*1.

Ми будемо розглядати матриці A та B, елементами яких є дійсні числа.

На основі моделі (9.2.2) встановимо ряд факторів, які характеризують систему з комп'ютером.

9.2.1 Стійкі системи

Згідно теоретичних розрахунків [20], система є стійкою, якщо власні значення матриці A дійсні та від'ємні.

Приклад. Дана математична модель системи:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -8 & 6 & -6 \\ -40 & 28 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Встановити, чи дана система стійка.

Розв'язування.

Для матриці A формуємо характеристичне рівняння згідно формули (3.2).

Маємо: $\lambda^3+8\lambda^2+17\lambda+10=0$.

Корені даного рівняння: $\lambda_1=-5$; $\lambda_2=-2$; $\lambda_3=-1$. За формулами (3.7) обчислюємо три власних вектора матриці A:

$$\overrightarrow{a_1} = \{1;4;6\}.$$
$$\overrightarrow{a_2} = \{2;5;4\}.$$
$$\overrightarrow{a_3} = \{1;2;1\}.$$

Знаючи проекції векторів $\overrightarrow{a_1}$; $\overrightarrow{a_2}$; $\overrightarrow{a_3}$, за формулою (3.8) маємо загальний розв'язок системи (3.10):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-5t} \\ c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix} \qquad (9.2.4)$$

Оскільки $\lambda_1<0$; $\lambda_2<0$; $\lambda_3<0$, то система, яка описується моделлю (9.2.3), стійка.

9.2.2 Керовані системи.

Поняття керування системою є одним із основних, оскільки воно встановлює критерій того факту, що людина може керувати системою на основі співпраці з комп'ютером. Розглянемо алгоритм керованості Калмана [17].

1. Маємо математичну модель: $\dot{Y}$ =AY+BU.
2. Обчислюємо власні значення і власні вектори матриці A.
3. Формуємо матрицю V і для неї обчислюємо матрицю V^{-1}.
4. Обчислюємо добуток $V^{-1}B$.
5. Якщо матриця $V^{-1}B$ містить хоч один нульовий рядок, то система некерована.

Приклад. Система з комп'ютером має математичну модель:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2/3 & 4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \qquad (9.2.5)$$

Встановити:

1) Стійкість системи;
2) Керованість системи.

Розв'язування:

1) Складаємо характеристичне рівняння матриці A:

$$\lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6=0.$$

Використовуючи метод ітерацій для знаходження одного з коренів рівняння, а для інших за теоремою Безу ділимо характеристичне рівняння на двочлен $\lambda - \lambda_1$ і отримаємо квадратне рівняння розв'зком якого є корені λ_2 і λ_3. В результаті маємо:

$$\lambda_1=-3;\ \lambda_2=-2;\ \lambda_3=-1.$$

2) Обчислимо власні вектори матриці А:

$$\vec{a}_1 = \{1;\quad -6;\quad 3\}.$$
$$\vec{a}_2 = \{2;\quad 5;\quad 4\}.$$
$$\vec{a}_3 = \{1;\quad 4;\quad 6\}.$$

3) Обчислюємо обернену матрицю V:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -6 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

4) Формуємо обернену матрицю:

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -8 & 3 \\ 48 & 3 & -10 \\ -39 & 2 & 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{71}$$

5) Обчислюємо добуток матриць $V^{-1}B$. Маємо:

$$V^{-1}B = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 3 \\ 48 & 3 & -10 \\ -39 & 2 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 142/3 & 355/3 \\ -71/3 & -264/3 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

1)Система стійка , бо всі λ <0 ; (i = 1,3).

2)Система некерована, бо у $V^{1}B$ перший рядок - нулі.

10 ПЕРЕЛІК ВПРАВ-ЗАВДАНЬ ТА КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дослідити на екстремум функцію $y=(x-5)e^x$.
2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y=x\sqrt{1-x^2}$ в області її визначення.
3. Питома витрата газу густиною ρ з показником адіабати К в газовому струмені визначається за формулою $Q=\rho\nu(1-\nu^2/\nu^2_{max})^{1/(K-l)}$. При якій швидкості ν витрата газу буде максимальною.
4. Скласти блок-схему визначення найменшого значення функції на відрізку за допомогою методу загального пошуку.
5. Удосконалити алгоритм попередньої задачі шляхом повторного ділення звуженого інтервалу невизначеності.
6. Використовуючи метод золотого перерізу, знайти на відрізку [0,3] найменше значення функції

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2, & 0\le x<2; \\ x^2/(2x-1), & x>2. \end{cases}$$

7. Робота деформації рами визначається за формулою :

$$A = L3/2EI(4/3x^2-xy+y^2/3+px/3-py/4+p^2/10),$$

де Р навантаження, Х і У горизонтальна та вертикальна реакції опори, L - довжина, I- момент інерції. При яких значеннях Х і У робота буде мінімальною?
8. Спроектувати циліндричний котел ємністю 200 л таким чином, щоб на його виготовлення було затрачено якомога менше матеріалів.
9. Накреслити області, визначені системами нерівностей:

$$x \geq 0, y \geq 0,\ 2x+4 \leq 4$$
$$x-y \geq 0,\ x \leq 9, x+3y \geq 6$$

I0. Мінімізувати функцію $f=12x_1+4x_2$ при наявності обмежень

$$x_1+x_2 \geq 2,\ x_1>0.5,\ x_2 \leq 4,\ x_1-x_2 \geq 0.$$

11. Є два склади з сировиною. Щоденно вивозиться з першого складу 60т сировини, а з другого 80т. Сировина використовується двома заводами, причому перший завод отримує всього 50т, другий - 90т. Необхідно організувати оптимальну (найбільш дешеву) схему перевезень, якщо відомо, що доставка 1т сировини з першого складу на перший завод коштує 70 коп., а з першого складу на другий завод 90 коп., з другого складу на перший завод - 1 грн., а з другого складу на другий завод - 80 коп.

Контрольні запитання

1. Чим пояснити існування різних визначень системи? Яка сумісність справедливості кожного з них з тим, що вони різновидні?
2. Які ознаки повинна мати частина системи, щоб її можна було назвати елементом?
3. В чому полягає умова фізичної реалізації динамічної моделі?
4. Якими прийомами можна підвищити ступінь повноти змістовних моделей систем?
5. Чому цільовий характер штучних систем не дозволяє без перевірок перенести поняття системи на натуральні об'єкти?
6. Чи може інформація не мати матеріального носія?
7. За яких умов надлишок інформації корисний і за яких ні?

8. Що таке проблемна ситуація?
9. Що називається алгоритмом?
10. Які особливості мислення дозволяють стверджувати, що воно системне?
11. Що змушує нас користуватися моделями замість самих моделювальних об'єктів?
12. Які аргументи є у людини для побудови моделей?
13. Що необхідно для переходу від моделей в термінах натуральної мови до математичних моделей?
14. Що спільного між моделлю і оригіналом при непрямій подібності?
15. В якому випадку можна говорити про завершеність моделей?
16. Які причини того, що будь-яка модель з часом змінюється?
17. Що конкретно розуміється, коли говориться, що основою декомпозиції є змістовна модель цільової системи?
18. В чому полягає властивість систем, що називається емерджентністю?
19. Яка сукупність мов опису знань називається конфігуратором?
20. Чому класифікацію можна розглядати як агрегування?
21. Які аспекти системи підкреслюються при розгляді?
22. Чому будь-яку проблему не слід розглядати ізольовано від зовнішніх зв'язків з іншими проблемами та явищами?
23. Які відношення цілей та критеріїв для оцінки альтернатив?
24. Які причини звужують можливості оптимізації в

розв'язуванні реальних проблем?

25. Чому різні постановки задачі багатокритеріального вибору приводять в загальному випадку до різних розв'язків?
26. В чому полягає принцип Паррето?
27. Що означає "зробити вибір"?
28. В чому полягає умова фізичної реалізації динамічної моделі?
29. Яка головна різниця між пізнавальною та прагматичними моделями?
30. Які функції виконують моделі у цілеспрямованій діяльності? Чи можна створити таку діяльність без моделювання?

11 ЗАВДАННЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНИХ ТА ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Завдання 1.

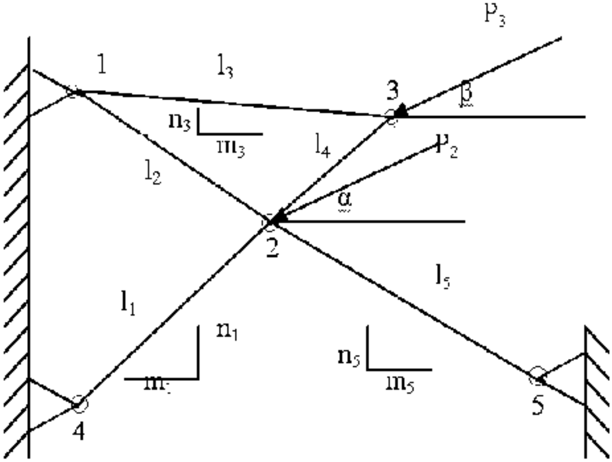


Рисунок 11.1

Скласти математичну модель для стержневої системи, зображеної на рисунку 11.1 та обчислити зміщення вузлів 2 та 3 і реакції вузлів при наступних даних: модуль Юнга E однаковий для всіх елементів і дорівнює 10^{12} кг/см^2.

L_1=2.1+n0.05 (м). A_1=1+n0.03 (дм2). m_1=4.5+n0.01

L_2=4.5+n0,03 (м). A_2=1.1+n0.02 (дм2). m_2=?

L_3=5.5+n0.02 (м). A_3=1,42+n0.01 (дм2). m_3=5.2+n0.02

L_4=? A_4=1,6+n0.04 (дм2). m_4=?

L_5=4.3+n0.01(м). A_5=1.45+n0.05(дм2). m_5=4.2+n0.05

n_1=3.4+n0.03 P_2=8425.6+n12.8(кг)

P_3=16895.9+n19.9(кг)

n_2=? α=0 +n (град)

n_3=6.3+n0.02 β=0+2n (град)

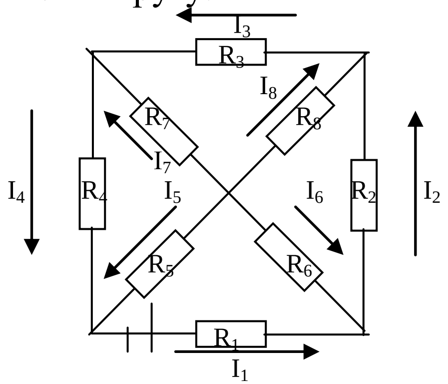
n_4=? n_5=2.5+n0.03

Увага! n -число, яке утворюють дві останні цифри Вашої залікової книжки.

Завдання 2.

Сформувати математичну модель для електричної системи, зображеної на рисунку 11.2 і визначити:

1. Силу струмів;
2. Напругу.



Для розрахунків взяти такі дані:

E=108,6+n5,52 (Вольт).
R_1=19.87+n0.02 (Ом).
R_2=32.44+n0.06 (Ом).
R_3=24.26+n0.07 (Ом).
R_4=38.82+n0.08 (Ом).
R_5=9.83+n0.09 (Ом).
R_6=24.32+n0.03 (Ом).
R_7=42.46+n0.01 (Ом).
R_8=54.62+n0.02 (Ом).

Завдання 3.

Скласти математичну модель гідравлічної системи, зображеної на рис. 11.3, яка є фрагментом водопостачання селища і розрахувати кількість води (динамічна в’язкість $\mu=1.1\cdot10^{-8}$ кг.сек/см^2) для споживачів, що розміщені у вузлах 6, 7, 8 та перевірити коректність передбачення про ламінарність потоків у трубах.

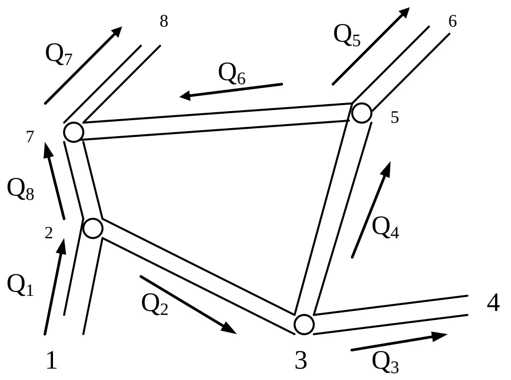


Рис.11.3

Для розрахунків дано:

$Q_1= 1000+5n$ (см^3/сек.);

$L_1=1200+50n$ (м); $d_1=2.84+n0.02$ (см);

$L_2=500+50n$ (м); $d_2=2.31+n0.01$ (см);

$L_3=400+20n$ (м); $d_3=2.82+n0.03$ (см);

$L_4=400+20n$ (м); $d_4=2.92+n0.07$ (см);

$L_5=400+30n$ (м); $d_5=3.02+n0.02$ (см);

$L_6=500+50n$ (м); $d_6=3,12+n0.03$ (см);

$L_7=400+40n$ (м); $d_7=3,18+n0.05$ (см);

$L_8=400+20n$ (м); $d_8=3,22+n0.02$ (см);

Завдання 4.

Складна система задана такою математичною моделлю:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33.4-2n & 3.7+0.2n & 7.6+0.3n \\ 3.7+0.2n & -44.5-3n & 5.42+0.4n \\ 7.6+0.3n & 5.42+0.4n & -55-4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3.2+0.2n & -4.7-0.3n \\ -4.3+0.3n & 3.2+0.1n \\ 9.36-0.4n & 7.48-0.5n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Встановити:

1. Стійкість системи;
2. Керованість системи.

Завдання 5

А. Транспортна задача

Фірма обслуговує об'єкти (магазини, заводи, райони). Причому будматеріали доставляються зі складів. Необхідно спланувати перевезення так, щоб їх загальна вартість була мінімальною.

Варіанти завдань:

1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} & & & & & & a_i \end{array} \\ C = & \left|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 8 & 2 & 3 & 4 & 1 & 30 \\ 4 & 7 & 5 & 1 & 6 & 8 & 50 \\ 5 & 3 & 4 & 4 & 7 & 9 & 20 \\ 6 & 3 & 5 & 9 & 5 & 3 & 15 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 & 6 & 25 \\ 9 & 8 & 2 & 8 & 7 & 2 & 20 \end{array}\right. \\ b_i & \begin{array}{cccccc} 15 & 15 & 40 & 30 & 10 & 50 \end{array} \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc|c} & & & & & & a_i \end{array} \\ C = & \left|\begin{array}{cccccc|c} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 & 3 & 40 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 & 5 & 30 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 & 2 & 35 \\ 1 & 8 & 5 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 9 & 4 & 7 & 9 & 3 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 7 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right. \\ b_i & \begin{array}{cccccc} 20 & 34 & 16 & 10 & 15 & 35 \end{array} \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & 8 & 60 \\
 & 2 & 3 & 9 & 4 & 9 & 4 & 70 \\
 & 3 & 4 & 22 & 5 & 3 & 6 & 20 \\
C = & 8 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 & 40 \\
 & 5 & 9 & 2 & 2 & 2 & 6 & 25 \\
 & 1 & 4 & 1 & 7 & 3 & 5 & 15 \\
b_i & 40 & 30 & 30 & 50 & 60 & 20 &
\end{array}$$

4.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 9 & 30 \\
 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 20 \\
 & 3 & 7 & 9 & 5 & 8 & 4 & 40 \\
C = & 1 & 2 & 2 & 7 & 9 & 7 & 50 \\
 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 & 8 & 70 \\
 & 3 & 8 & 5 & 7 & 2 & 1 & 60 \\
b_i & 35 & 20 & 55 & 30 & 60 & 70 &
\end{array}$$

5.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 4 & 5 & 5 & 7 & 3 & 1 & 100 \\
 & 8 & 7 & 5 & 4 & 5 & 9 & 120 \\
 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 4 & 150 \\
C = & 3 & 2 & 9 & 3 & 5 & 3 & 130 \\
 & 2 & 1 & 3 & 6 & 1 & 7 & 90 \\
 & 8 & 4 & 7 & 2 & 8 & 4 & 160 \\
b_i & 140 & 130 & 90 & 140 & 100 & 150 &
\end{array}$$

6.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & 8 & 60 \\
 & 2 & 3 & 9 & 4 & 9 & 4 & 70 \\
 & 3 & 4 & 22 & 5 & 3 & 6 & 20 \\
C = & 8 & 4 & 7 & 2 & 1 & 3 & 40 \\
 & 5 & 9 & 2 & 2 & 2 & 6 & 25 \\
 & 1 & 4 & 1 & 7 & 3 & 5 & 15 \\
b_i & 40 & 30 & 35 & 15 & 70 & 90 &
\end{array}$$

7.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 4 & 5 & 1 & 9 & 2 & 60 \\
 & 2 & 3 & 9 & 4 & 3 & 1 & 70 \\
 & 3 & 4 & 2 & 5 & 5 & 4 & 20 \\
C = & 5 & 1 & 7 & 2 & 1 & 5 & 55 \\
 & 6 & 3 & 6 & 8 & 4 & 3 & 25 \\
 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 9 & 30 \\
b_i & 40 & 30 & 30 & 50 & 45 & 65 &
\end{array}$$

8.

$$\begin{array}{r|cccccc|l}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 2 & 6 & 4 & 9 & 4 & 40 \\
 & 3 & 1 & 3 & 2 & 1 & 7 & 30 \\
 & 5 & 7 & 5 & 1 & 8 & 3 & 20 \\
C = & 6 & 3 & 1 & 6 & 5 & 8 & 60 \\
 & 2 & 9 & 6 & 3 & 4 & 2 & 55 \\
 & 1 & 7 & 4 & 2 & 7 & 4 & 25 \\
b_i & 30 & 25 & 18 & 20 & 57 & 80 &
\end{array}$$

9.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 8 & 4 & 3 & 2 & 4 & 7 & 60 \\
 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 5 & 65 \\
 & 5 & 4 & 1 & 5 & 2 & 4 & 70 \\
C = & 7 & 9 & 1 & 6 & 8 & 3 & 15 \\
 & 3 & 5 & 8 & 2 & 5 & 9 & 30 \\
 & 8 & 1 & 4 & 7 & 1 & 6 & 50 \\
b_i & 40 & 60 & 70 & 25 & 15 & 80 &
\end{array}$$

10.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 10 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 40 \\
 & 7 & 4 & 9 & 10 & 6 & 9 & 25 \\
 & 6 & 14 & 8 & 7 & 4 & 1 & 35 \\
C = & 5 & 9 & 2 & 3 & 6 & 7 & 55 \\
 & 8 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 & 15 \\
 & 1 & 9 & 3 & 8 & 6 & 2 & 70 \\
b_i & 15 & 40 & 30 & 15 & 75 & 65 &
\end{array}$$

11.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 3 & 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 50 \\
 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3 & 40 \\
 & 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 9 & 20 \\
C = & 3 & 9 & 4 & 7 & 8 & 2 & 70 \\
 & 9 & 2 & 6 & 5 & 3 & 9 & 35 \\
 & 5 & 7 & 1 & 3 & 4 & 1 & 15 \\
b_i & 30 & 25 & 35 & 20 & 70 & 50 &
\end{array}$$

12.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 8 & 12 & 4 & 9 & 10 & 4 & 60 \\
 & 7 & 5 & 15 & 3 & 6 & 7 & 40 \\
 & 9 & 4 & 6 & 12 & 7 & 1 & 100 \\
C = & 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 50 \\
 & 2 & 5 & 1 & 8 & 4 & 6 & 70 \\
 & 4 & 7 & 3 & 5 & 1 & 3 & 20 \\
b_i & 30 & 80 & 65 & 35 & 40 & 90 &
\end{array}$$

13.

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 10 & 130 \\
 & 8 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 90 \\
 & 7 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 & 80 \\
C = & 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 6 & 130 \\
 & 6 & 9 & 1 & 4 & 3 & 5 & 10 \\
 & 2 & 7 & 3 & 8 & 7 & 9 & 20 \\
b_i & 110 & 50 & 30 & 80 & 100 & 90 &
\end{array}$$

14

$$\begin{array}{r|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 18 & 2 & 9 & 7 & 7 & 3 & 68 \\
 & 30 & 4 & 1 & 55 & 1 & 2 & 55 \\
 & 6 & 4 & 8 & 3 & 5 & 4 & 40 \\
C = & 2 & 5 & 4 & 1 & 9 & 2 & 15 \\
 & 3 & 1 & 8 & 7 & 3 & 6 & 12 \\
 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 25 \\
b_i & 2 & 3 & 3 & 16 & 90 & 101 &
\end{array}$$

15.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 2 & 9 & 7 & 1 & 8 & 60 \\
 & 3 & 40 & 15 & 5 & 3 & 7 & 55 \\
C = & 6 & 4 & 8 & 3 & 9 & 1 & 40 \\
 & 24 & 3 & 3 & 1 & 4 & 2 & 35 \\
 & 7 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 25 \\
 & 1 & 5 & 3 & 5 & 2 & 4 & 20 \\
b_i & 70 & 5 & 45 & 70 & 30 & 15 &
\end{array}$$

16.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 3 & 9 & 7 & 1 & 8 & 20 \\
 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 & 9 & 16 \\
C = & 5 & 1 & 2 & 2 & 3 & 8 & 14 \\
 & 4 & 5 & 8 & 1 & 6 & 7 & 11 \\
 & 8 & 1 & 7 & 4 & 1 & 3 & 29 \\
 & 4 & 2 & 5 & 2 & 9 & 6 & 40 \\
b_i & 16 & 18 & 12 & 15 & 50 & 19 &
\end{array}$$

17.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 3 & 7 & 1 & 5 & 4 & 9 & 30 \\
 & 7 & 5 & 8 & 6 & 3 & 1 & 5 \\
C = & 6 & 4 & 8 & 3 & 2 & 4 & 45 \\
 & 3 & 1 & 7 & 4 & 2 & 5 & 70 \\
 & 4 & 3 & 6 & 9 & 4 & 2 & 15 \\
 & 7 & 9 & 1 & 6 & 8 & 5 & 5 \\
b_i & 10 & 35 & 15 & 25 & 35 & 50 &
\end{array}$$

18.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 9 & 130 \\
 & 10 & 3 & 2 & 3 & 15 & 1 & 90 \\
C = & 4 & 10 & 5 & 1 & 16 & 7 & 40 \\
 & 2 & 4 & 6 & 9 & 3 & 8 & 20 \\
 & 3 & 7 & 3 & 5 & 8 & 1 & 35 \\
 & 8 & 2 & 7 & 9 & 5 & 6 & 65 \\
b_i & 110 & 30 & 50 & 80 & 90 & 20 &
\end{array}$$

19.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 3 & 3 & 8 & 3 & 1 & 20 \\
 & 8 & 6 & 2 & 6 & 6 & 4 & 20 \\
C = & 7 & 7 & 3 & 8 & 5 & 9 & 40 \\
 & 5 & 2 & 4 & 5 & 7 & 5 & 45 \\
 & 4 & 9 & 2 & 6 & 1 & 8 & 5 \\
 & 2 & 8 & 5 & 7 & 3 & 6 & 20 \\
b_i & 25 & 30 & 40 & 15 & 30 & 10 &
\end{array}$$

20.

$$\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 & 1 & 45 \\
 & 6 & 1 & 2 & 5 & 9 & 8 & 35 \\
C = & 3 & 4 & 3 & 8 & 6 & 2 & 70 \\
 & 7 & 6 & 1 & 5 & 9 & 7 & 25 \\
 & 4 & 3 & 5 & 9 & 3 & 8 & 15 \\
 & 8 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 60 \\
b_i & 20 & 60 & 55 & 45 & 20 & 50 &
\end{array}$$

21.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 7 & 2 & 5 & 1 & 4 & 40 \\
 & 3 & 8 & 4 & 1 & 5 & 2 & 30 \\
 & 6 & 3 & 5 & 3 & 3 & 6 & 50 \\
C = & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 4 & 70 \\
 & 1 & 3 & 8 & 9 & 5 & 7 & 35 \\
 & 6 & 9 & 2 & 3 & 8 & 6 & 15 \\
b_i & 20 & 18 & 44 & 75 & 23 & 60 &
\end{array}
$$

22.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 2 & 7 & 3 & 6 & 1 & 2 & 30 \\
 & 9 & 4 & 5 & 7 & 4 & 6 & 70 \\
 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 50 \\
C = & 2 & 5 & 9 & 8 & 5 & 7 & 65 \\
 & 9 & 7 & 3 & 1 & 9 & 6 & 15 \\
 & 5 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 30 \\
b_i & 10 & 40 & 20 & 60 & 80 & 50 &
\end{array}
$$

23.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 9 & 7 & 2 & 5 & 2 & 30 \\
 & 3 & 1 & 5 & 5 & 8 & 1 & 40 \\
 & 6 & 8 & 3 & 4 & 3 & 4 & 70 \\
C = & 2 & 3 & 1 & 3 & 6 & 5 & 60 \\
 & 6 & 7 & 2 & 4 & 1 & 9 & 85 \\
 & 9 & 8 & 6 & 7 & 3 & 8 & 45 \\
b_i & 35 & 80 & 25 & 70 & 90 & 30 &
\end{array}
$$

24.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 3 & 3 & 8 & 1 & 8 & 10 \\
 & 8 & 6 & 2 & 6 & 4 & 6 & 20 \\
 & 4 & 7 & 7 & 3 & 2 & 1 & 35 \\
C = & 5 & 2 & 4 & 5 & 9 & 7 & 45 \\
 & 4 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & 68 \\
 & 3 & 8 & 3 & 9 & 6 & 1 & 32 \\
b_i & 25 & 30 & 40 & 15 & 55 & 45 &
\end{array}
$$

25.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 6 & 70 \\
 & 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 3 & 15 \\
 & 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 8 & 60 \\
C = & 7 & 3 & 7 & 9 & 1 & 2 & 45 \\
 & 4 & 7 & 3 & 8 & 4 & 7 & 30 \\
 & 5 & 6 & 4 & 9 & 1 & 5 & 40 \\
b_i & 30 & 40 & 55 & 80 & 45 & 10 &
\end{array}
$$

26.

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & & & & & & & a_i \\
 & 3 & 5 & 6 & 2 & 7 & 8 & 105 \\
 & 4 & 4 & 2 & 1 & 9 & 5 & 30 \\
 & 7 & 6 & 9 & 5 & 4 & 8 & 80 \\
C = & 12 & 10 & 4 & 3 & 9 & 6 & 20 \\
 & 5 & 3 & 8 & 4 & 2 & 7 & 20 \\
 & 1 & 9 & 3 & 6 & 4 & 2 & 15 \\
b_i & 80 & 53 & 10 & 47 & 50 & 30 &
\end{array}
$$

27.

$$C = \begin{array}{|cccccc|c} 5 & 1 & 8 & 1 & 7 & 4 & 50 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 5 & 5 & 40 \\ 6 & 8 & 6 & 8 & 3 & 8 & 15 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 4 & 2 & 25 \\ 8 & 6 & 5 & 6 & 2 & 1 & 50 \\ 9 & 3 & 5 & 2 & 7 & 8 & 20 \end{array} \; a_i$$

b_i 45 45 25 35 20 30

28.

$$C = \begin{array}{|cccccc|c} 4 & 8 & 2 & 7 & 7 & 1 & 15 \\ 8 & 5 & 3 & 5 & 6 & 6 & 25 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 4 & 4 & 40 \\ 3 & 4 & 9 & 1 & 2 & 3 & 20 \\ 6 & 9 & 6 & 3 & 8 & 5 & 45 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 9 & 4 & 15 \end{array} \; a_i$$

b_i 60 10 40 20 15 15

29.

$$C = \begin{array}{|cccccc|c} 1 & 8 & 8 & 7 & 7 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 6 & 5 & 5 & 5 & 25 \\ 5 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 & 15 \\ 4 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 20 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 4 & 3 & 25 \\ 8 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 15 \end{array} \; a_i$$

b_i 25 15 20 15 20 15

30

$$C = \begin{array}{|cccccc|c} 4 & 4 & 7 & 4 & 2 & 5 & 20 \\ 5 & 6 & 9 & 6 & 1 & 6 & 35 \\ 6 & 2 & 5 & 8 & 6 & 2 & 25 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 8 & 4 & 50 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 7 & 3 & 20 \\ 5 & 5 & 9 & 8 & 4 & 1 & 25 \end{array} \; a_i$$

b_i 25 50 25 30 25 20

де a_i - запаси товарів на складах;

b_i - потреби в товарах;

С – вартість перевезення 1т матеріалу (в грн) з баз на об’єкти;

Б. Задача про ресурси

Виробничий кооператив має такі ресурси:

100 n кг металу, $\frac{200\cdot(m+5)}{n+10}$ м^2 скла, 160 n людино-годин робочого часу. Бригаді доручено виготовити два вироби із назвами **А і В**.

Ціна одного виробу **А** n+m грн., для його виготовлення необхідно m кг металу, 2 n м^2 скла і n людино-годин робочого часу.

Ціна одного виробу **В** n + 2m грн., для його виготовлення необхідно m + n кг металу , n м^2 скла і 3n людино - годин робочого часу.

Необхідно спланувати об'єм випуску продукції так, щоб прибуток від її випуску був максимальним.

(n - номер групи ; m - номер прізвища за списком).

Завдання 6

Мінімізувати функцію

$$f(x_1, x_2) = \sin\frac{\pi a x_1}{2} + \cos\frac{\pi \ln^2(c+d)}{3} + e^{b x_2^2}$$

методом градієнтного спуску.

№ варі-анта	a	b	c	d	№ варі-анта	a	b	c	d
1	1.0	-	0.0	0	16	16	0.0	1.9	0.
2	2.0	-	0.0	0.1	17	17	0.1	2.5	0.
3	3.0	-	0.0	0.1	18	18	0.2	2.8	0.
4	4.0	-	0.1	0.1	19	19	0.3	3.2	0.
5	5.0	-	0.2	0.1	20	20	0.4	3.8	0.
6	6.0	-	0.3	0.1	21	21	0.5	4.0	0.
7	7.0	-	0.4	0.1	22	22	0.6	5.0	0.
8	8 0	-	0.6	0.1	23	23	0.7	4.8	0.
9	9.0	-	0.8	0.1	24	24	0.8	5.2	0.

10	10.	-	0.9	0.2	25	25	0.9	5.7	0.
11	11.	-	1.	0.2	26	26	1.0	6.2	0.
12	12.	-	1.	0.2	27	27	1.1	6.7	0.
13	13.	-	1.	0.2	28	28	1.2	6.9	0.
14	14.	-	1.	0.2	29	29	1.3	7.2	0.
15	15.	-	1.	0.	30	30	1.4	8.4	0.

12 ЛІТЕРАТУРА

1. Станфорд Л., Оптнер Г. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. - М.: Советское радио, 1969. -216 с.
2. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. - М.. Наука, 1981.-488 с.
3. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. - Киев: Наукова думка, 1968. - 88 с.
4. Геминтерн ВИ., Штильман М.С. Оптимизация в задачах проектирования. Серия математика и кибернетика. - М.: Наука,1982.-№6.-63 с.
5. Попов Ю. П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. Серия математика и кибернетика, № 11. - М.: Наука, 1983. - 63 с.
6. Карманов В.Г. Математическое программирование. - М.: Наука, 1975.-272 с.
7. Моисеев Н.Н. Математик задает вопросы. - М.: Знание, 1975. - 190 с.
8. Основы моделирования сложных систем. Под общей ред. д.т.н., проф. И.В. Кузьмина. - Киев : Вища школа, 1981.   359 с.
9. Бойчук Л.М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. - М.: Энергия, 1971. - 112 с.
10. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. -М.: Высшая школа, 1989. - 367 с.
11. Дружинин В.В., Конторов Д.С. Системотехника. - М.: Радио и связь, 1995.-236 с.
12. Хорафас Д.Н. Системы и моделирование. - М.: Мир, 1967. 348 с.

13. Советов В.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. - М.: Наука, 1984.-212 с.
14. Методичні вказівки та завдання для виконання контрольних робіт з дисципліни "Вступ до системного аналізу" студентами-заочниками будівельних спеціальностей/ Уклад. А.І. Білецький. Рівне: РДТУ, 1999. 48 с.
15. Зндрюс Дж., Мак-Лодс Р. Математическое моделирование. - М.: Мир, 1980. -267 с.
16. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение. – М.: Мир, 1980. – 346 с.
17. Острбм К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЗВМ. - М.: Мир, 1979. -198 с.
18. Сахад Д. Технический прогресс: концепции, модели, оценки. - М.: Наука, 1977.-243 с.
19. Волков Е.А. Численные методы. - М.: Наука, 1982. - 254 с.
20. Понтрягин Л.С. Дифференциальные управления в их приложении. - М.: Наука, 1988. - 208 с.
2І. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - К.: Техника, 1977.-766 с.
22. Грузман М.З. Эвристика в информатике. Винница: Арбат, 1998. - 308 с.
23. Бондарев В.М., Рублицкий В.И., Качко Е.Г. Основы программирования. - Харьков: Фолио, 1997 - 368 с.
24. Глушик М.М., Копич І.М., Пенцак О.С., Сороківський В.М. Математичне програмування: Навчальний посібник.- Львів: «Новий світ 2000», 2005 – с.216

25. Акулич И.А. Математическое программирование в примерах и задачах.– М.: Высшая школа, 1986.- 327с.
26. Константінов Ю.М., Гіжа О.О. Технічна механіка рідин і газів: Підручник.- К.: Вища шк.,2002,-277с.

13 СЛОВНИК ТЕРМІНІВ З СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ

АВТОМАТ (automatic machine від грецького "самодійний") - прилад, що самостійно виконує деякий процес згідно з закладеною у нього програмою. Програма може фіксуватися або безпосередньо в пристрої автомата, або на носії, що вводиться в автомат.

АВТОМАТИЗАЦІЯ (automatic) - впровадження автоматів у практичну діяльність (наприклад, автоматизація керування, нафтовидобування, медичної діагностики, навантажувальних робіт і т.п.).

АГРЕГАТ (aggregate, від лат. "приєднувати") - будь-яка виділена сукупність, від неструктурованої (безліч, конгломерат) до високоорганізованої системи.

АГРЕГАЦІЯ (aggregation) - 1) операція утворення агрегату;
2) перетворення багатовимірної моделі в модель меншої розмірності.

АЛГОРИТМ (algorithm, від імені узбецького математика IX ст. Альм-хорезми) - 1) повний опис послідовності дій, виконання яких наприкінці послідовності приводить до досягнення мети; 2) кінцевий текст, записаний алгоритмічною мовою. Першопочатково сугубо математичне поняття алгоритму в даний час розширено: допускається включення в алгоритм і вказівок на не формалізовані дії, аби вони правильно розуміти і виконувалися людьми (наприклад, алгоритм винаходу). Алгоритм, сприйнятий і виконуваний автоматом, називається програмою.

АЛГОРИТМІЗАЦІЯ (algorithmization) - 1) складання алгоритму для проектованого процесу (наприклад, алгоритмізація рішення задачі); 2) виявлення алгоритму, формалізація існуючого процесу (зазвичай з метою його вивчення, чи удосконалювання автоматизації).

АЛЬТЕРНАТИВА (alternative) - варіант, одна з двох чи більше можливостей; те що можна мати, використовувати і т.п. замість чогось ще. Із багатьох альтернатив здійснюється вибір

АНАЛІЗ (analysis, від грецького "розчленовування") - 1) уявний чи реальний поділ цілого на частині (наприклад, хімічний аналіз речовини, декомпозиція глобальної мети і тп.); 2) донедавна - синонім наукового дослідження взагалі "піддати аналізу" значить "вивчити"); 3) метод пізнання, оснований на 1),

Пізнання не зводиться до аналізу; тільки в поєднанні, переплетінні, єдності із синтезом стає можливим пізнання реальності.

ВИБІР (choice) - 1) операція, що входить у будь-яку цілеспрямовану діяльність і, що складається в цільовому звуженні безлічі альтернатив (звичайно, якщо дозволяють умови однієї альтернативи); 2) прийняття рішення.

ВИМІР (measurement) дія з зіставлення певного стану явища, що спостерігається, або об'єкта з вибраною для реєстрації цього стану шкалою; результатом виміру с символ (приналежний вибраній шкалі), що позначає стан, який спостерігається.

ВИХІД (СИСТЕМИ) (output) - 1) зв'язок системи з навколишнім середовищем виражає вплив системи на середовище і спрямована від системи до середовища; 2) продукт системи; те, у що перетворяться входи; може мати як реальний характер (наприклад, матеріальна продукція), так до абстрактного (наприклад, задоволення потреби).

ВЛАСТИВІСТЬ (property) 1) якість, постійно властива об'єкту; 2) абстракція відносин даного об'єкта з іншими, "згорнуте відношення", модель відносин.

ВХІД (СИСТЕМИ) (input) - 1) зв'язок системи з навколишнім середовищем, спрямоване від середовища в систему, тобто виражає вплив середовища на систему; 2) те, що перетвориться системою у вихід.

ГІПОТЕЗА (hypothesis) - 1) припущення; твердження, що вимагає доведень чи перевірки; 2) форма розвитку науки.

ГОЛОСУВАННЯ (vote) - спосіб вираження колективної думки, винесення колективного рішення, здійснення колективного рішення.

ГРАНИЦЯ СИСТЕМИ (boundary of system) поверхня в просторі опису ситуації, що розділяє саму систему і зовнішній простір.

ГРАФ (graph, від грецького "записувати") - 1) символічна діаграма, що складається з безлічі вершин і ребер (дуг), що з'єднують деякі з них (чи усі); 2) графічна модель структури.

ГРАФІК (graphic) I) зображення з допомогою ліній різних моментів якогось процесу в їх залежності; 2) план роботи з точним показником норм і часу їх виконання.

ДЕКОМПОЗИЦІЯ (decomposition) - 1) операція поділу цілого на частини зі збереженням ознаки підпорядкованості, приналежності; 2) такий повторний чи багаторазовий поділ, у результаті чого виходять деревоподібні ієрархічні структури .

ЕКСПЕРТНІ МЕТОДИ (expert methods) - методи системного аналізу, у яких для виконання тих чи інших неформалізованих операцій використовуються знання, досвід, інтуїція, винахідливість, інтелект експертів, фахівців у потрібній галузі.

ЕМЕРДЖЕНТНІСТЬ (emergence, від англ. "раптова поява") –
1) властивість орієнтації і самоорганізації системи, коли із множини хаотично взаємодійних елементів непередбачуваним способом виникають великі когерентні структури із функціями і властивостями, яких не було у їх складових компонентів; 2) зріст ефективності діяльності в результаті з'єднання, інтеграції, злиття окремих частин системи в єдину систему за рахунок, так званого, системного або синергетичного ефекту.

ЕНТРОПІЯ (entropy, від грецького "перетворення") - міра невизначеності випадкового об'єкта

ЗНАК (sign) - I) сигнал, що має конкретне (одиночне, елементарне) значення, що сприймається людиною (наприклад, дорожній
знак, знаки відмінності, математичні знаки, умовні

жести і т.п.);
2) реальна модель абстрактного поняття.

ІНГЕРЕНТНІСЇЬ (inherence) 1) погодженість моделі з оточуючим її культурним середовищем; приналежність моделі цьому середовищу; 2) умова, яка необхідна для прояву або реалізації модельних властивостей моделі.

ІНТЕЛЕКТ (intellect, від лат. "розум") 1) інтелект природний, внутрішня здатність до абстракції;. зовнішня здатність орієнтуватися в незнайомих умовах і знаходити рішення недостатньо формалізованих задач; 2) інтелект штучний технічна імітація певних можливостей природного інтелекту (наприклад, дізнавання, утворення понять, прийняття рішень, синтез речових та естетичних сигналів тощо).

ІНФОРМАТИКА (informatics, computer science) - 1) наука про наукову і технічну інформацію і її циркуляцію в суспільстві; 2) з останні роки інформатикою називали науковий напрямок, акцентуючи увагу на використанні ЕОМ у найрізноманітніших галузях людської діяльності.

ІНФОРМАЦІЯ (information) - І) у повсякденній мові - будь-які зведення, звістки, повідомлення, новини і т.п.; 2) у науково-технічних додатках - те, що несе на собі сигнал; 3) як філософська категорія загальна властивість матерії, що є аспектом властивості відображення, яка допускає кількісний опис.

КІБЕРНЕТИКА (cybernetics, від грецького "керувати") - наука про керування в системах довільної природи; найбільш повними й загальними означеннями кібернетики в сучасному понятті визнаються означення, дані А.І. Бергом і А.Н. Колмогоровим.

КІЛЬКІСТЬ ІНФОРМАЦІЇ (quantity of information) - числова міра інформації, що міститься в одному випадковому об’єкті про інший випадковий об'єкт. Визначається як деякий функціонал від відповідних розподілів ймовірностей (наприклад, за Шенноном, за
Фішером, за Кульбаком-Лейблером й ін.) або як обсяг обчислень, необхідних для алгоритмічного визначення стану об'єкта (за Колмогоровим).

КЛАСИФІКАЦІЯ (classification) система розподілу предметів, явищ або понять на класи і групи за спільними ознаками, властивостями.

КОД (code) - сукупність умов і правил утворення сигналу, використання яких на передавальному і на прийомному кінцях дозволяє передавати й одержувати інформацію за допомогою сигналу.

КОНФІГУРАТОР (configurator від англ., "формирователь") набір різних мов опису досліджуваної системи, достатній для проведення системного аналізу дійсної проблеми. Визначається природою систем, які містять утворювальну і вирішувальну проблему, з метою аналізу.

КРИТЕРІЙ (criterion) - 1) засіб для винесення судження; стандарт для порівняння; правило для оцінки; 2) міра ступеня близькості до мети.

МЕТА (goal, end, рифове) 1) образ бажаного майбутнього (суб'єктивна мета); 2) майбутня реальність стан (об'єктивна мета).

МОДЕЛЬ (model, від лат. "зразок") - відображення: цільове; абстрактне чи реальне, статичне чи динамічне; інгерентне: кінцеве, спрощене, наближене; що має поряд з безумовно дійсним умовно дійсне, завбачливо дійсне та помилкове за змістом, яке реалізується і розвивається в процесі його практичного використання.

МОДЕЛЬ АБСТРАКТНА (abstract model) - ідеальна конструкція; модель, побудована засобами мислення, свідомості (зокрема - мовна модель).

МОДЕЛЬ ДИНАМІЧНА (dynamic model) - модель, що відображає процеси, що відбуваються в системі згодом; зокрема, моделі функціонування і розвитку.

МОДЕЛЬ ЗНАКОВА (signary model) - реальна модель, що має абстрактний зміст; модель, умовно подібна до оригіналу і призначена для безпосереднього використання людиною.

МОДЕЛЬ ІНГЕРЕНТНА (inherent model) - модель, погоджена з навколишнім культурним середовищем, що входить у неї не як відчужений їй елемент, а як її природна частина.

МОДЕЛЬ КЛАСИФІКАЦІЙНА (classificatory model) - найпростіший вид моделі, у якій фіксуються тільки відносини чи тотожності розходження.

МОДЕЛЬ МАТЕМАТИЧНА (mathematical model) - абстрактна чи знакова модель, побудована засобами математики (наприклад у вигляді системи рівнянь графа, логічної формули тощо).

МОДЕЛЬ МОДЕЛЕЙ (model of models) -

ієрархія моделей; багаторівнева абстракція; число рівнів в ієрархії моделей вважається пов'язаним із розвиненістю інтелекту.

МОДЕЛЬ ПІЗНАВАЛЬНА (cognitive model) - форма організації і представлення знань; засіб з'єднання нових знань з набутими.

МОДЕЛЬ ПРАГМАТИЧНА (pragmatic model) - засіб керування, організації практичних дій; зразок, еталон правильних дій (наприклад, алгоритм) чи їхнього результату (наприклад, модель мети).

МОДЕЛЬ РЕАЛЬНА (РЕЧОВИННА, ФІЗИЧНА, ПРЕДМЕТНА) (substantional model) - модель, побудована з реальних об'єктів; подібність реальної моделі й оригіналу може бути прямою, непрямою і умовною.

МОДЕЛЬ СКЛАДУ СИСТЕМИ (partition model) - модель, що описує, з яких підсистем і елементів складається система.

МОДЕЛЬ СТАТИЧНА (static model) - модель, у якій відсутній часовий параметр.

МОДЕЛЬ СТРУКТУРИ СИСТЕМИ (structural model) - модель, що описує відносини (зв'язки) між елементами моделі складу системи.

МОДЕЛЬ ФУНКЦІОНАЛЬНА (model of functioning) - модель, що описує процеси, що характеризують систему як частина більш загальної, що охоплює її системи, тобто зв'язані з призначенням даної системи.

МОДЕЛЬ "ЧОРНОГО ЯЩИКА" (black-box-model) - модель, що описує тільки входи і виходи системи, але не внутрішній устрій системи.

Наприклад, математична модель "чорного ящика" - це просто сукупність безлічі X та Y (X відповідає входам, Y - виходам); якщо оператор F, що зв'язує їх (У =F(X)), передбачається існуючим, то він вважається невідомим .

МОДЕЛЬ МОВНА (conversational, or linguistic model) - 1) - будь-яка конструкція природною мовою, розглянута як опис чого-небудь (наприклад, визначення, як модель означеного; ім'я, назва як позначення названого тощо).

МОЗКОВИЙ ШТУРМ (brain-storming) - метод, призначений для неформального колективного генерування якомога можливо більшого числа альтернатив; основні ідеї цього методу: а) повна заборона критики на стадії генерування; б) заохочення і провокування асоціативного .мислення на всіх стадіях; в) на стадії оцінки ціль складається не у відкиданні "поганої" альтернативи, а в пошуку раціонального зерна в ній.

МОРФОЛОГІЧНИЙ АНАЛІЗ (morphological analysis) - формальний метод генерування альтернатив за допомогою перерахування всіх можливих поєднань значень заданих параметрів альтернативи.

НАДМІРНІСТЬ (redundancy) - властивість сигналів і систем, що забезпечує їхню стійкість проти руйнівного впливу перешкод, шумів, відмов елементів, непередбачених обставин тощо.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ (uncertainty) - неоднозначність будь-якого походження в описі системи.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ РОЗПЛИВЧАСТА (fuzzynes) - невизначеність, що була пов'язана з порушенням аксіом тотожності неоднозначності класифікації. Описується за допомогою функції приналежності; характерна для мовних моделей, неможлива в будь-яких шкалах.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ СТОХАСТИЧНА (randomnes) - невизначеність, описувана розподілом ймовірностей на безлічі можливих станів розглядуваного об'єкта; випадковість.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ ЧАСТОТНО-ТИМЧАСОВА (time-and-frequency uncertainty) - властивість функцій часу, що характеризується неможливістю необмеженого зменшення добутку їхньої тривалості на ширину їхнього спектра; існує лише деяка мінімальна межа цього добутку яку можна досягти вибором спеціальної форми сигналу.

НЕТРАНЗИТИВНІСТЬ ГОЛОСУВАННЯ (vote nontransitivity) - одна з властивостей колективного вибору, що полягає в існуванні набору альтернатив, на яких вибір єдиної альтернативи методом голосування зроблений бути не може; зокрема результат вибору може залежати від послідовності пред'явлення альтернатив.

НАВКОЛИШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ (environment) - те, що знаходиться поза межами системи і взаємодіє з нею. Структурність навколишнього середовища може виражатися з різним ступенем деталізації; як мінімум, у виді входів і виходів системи.

ОПТИМАЛЬНИЙ (optimal) - найкращий у заданих умовах. Якість оцінюється за допомогою критерію оптимальності, а умови задаються у виді обмежень на додаткові критерії. Оптимізація - центральна ідея кібернетики.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ (decision making) - цільовий вибір на множині альтернатив, методи прийняття рішень, що є різноманітні в залежності від типу невизначеності й інших умов вибору.

ПРОБЛЕМА (problem, від грец. "задача") - 1) проблема розвитку незадовільного стану системи, зміна якого на краще є непростого справою; 2) проблема функціонування - задовільний стан системи, збереження якого вимагає постійних і непростих зусиль (наприклад, проблема виживання).

ПРОБЛЕМАТИКА (mess) - сплетений клубок проблем, що тісно пов'язані з проблемою, яка підлягає розв'язанню. Необхідність розгляду проблематики замість окремої проблеми випливає з того, що система, яка мас проблеми, сама складається з підсистем і входить у надсистему, а усунення поставленої проблеми вимагає врахування наслідків для усіх них.

ПРОБЛЕМНА СИТУАЦІЯ (problem situation) - така ситуація, коли незадовільність існуючого стану усвідомлена, але неясно, як його змінити.

ПРОПУСКНА ЗДАТНІСТЬ КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ (channel capacity) - максимальна швидкість передачі інформації з каналу, при якій ще можлива передача без втрати інформації (при як завгодно малій імовірності помилок).

РАНГ (rank) - I) номер деякого об'єкта в упорядкованому по деякому ознаці ряду об'єктів; 2) елемент порядкової (рангової) шкали.

РЕГУЛЮВАННЯ (regulation, adjustment) - спосіб керування із зворотним зв'язком, оснований на виявленні відходу об'єкта з програмної траєкторії і виробленні регулювального впливу для повернення об'єкта на цю траєкторію.

РОЗМИТА (РОЗПЛИВЧАСТА) МНОЖИНА (fuzzy set) - множина, що містить хоча б один такий елемент, про який не можна однозначно сказати, належить він чи не належить цій множині (математична модель розпливчастої невизначеності). Ступінь упевненості виражається функцією приналежності, що приймає значення з інтервалу [0,1].

СЕМАНТИКА (semantics, від грецького "позначення") - розділ семіотики, що вивчає відношення між знаками і тим, що вони позначають.

СЕМІОТИКА (semiotics, від грецького "знак") - наука, що досліджує знаки і знакові системи.

СИГНАЛ (signal, від лат. "знак") - матеріальний носій інформації.

СИНЕКТИКА (synectics) - метод генерування альтернатив, оснований на здогадках за асоціаціями, що виникають у групи експертів, спеціально підготовлених для пошуку аналогій, зокрема аналогій із рухомим відчуттям.

СИНТЕЗ (synthesis, від грецького "з'єднання") - 1) уявне чи реальне з'єднання частин у єдине ціле; 2) метод пізнання, оснований на 1). Пізнання є поєднанням, сполученням аналізу і синтезу.

СИСТЕМА (system) - засіб досягнення мети; основні особливості систем: цілісність, відносна відособленість від навколишнього середовища, наявність зв'язків із середовищем, наявність частин і зв'язків між ними (структурованість), підпорядкованість всієї організації системи деякій меті.

СИСТЕМА ВЕЛИКА (large-scale system) - система, для актуалізації моделі якої, з метою управління, бракує матеріальних ресурсів (часу, ємності пам'яті, інших матеріальних засобів моделювання).

СИСТЕМА ПРИРОДНА (natural system) - система (тобто багатокомпонентний об'єкт, який має всі ознаки системи), що виникла в природі в результаті природних процесів.

СИСТЕМА ШТУЧНА (artificial, man-made system) - система, що створена людиною як засіб досягнення поставленої мети.

СИСТЕМА ПРОБЛЕМОВИРІШУЮЧА (problem-solving system) - система, що володіє можливостями (ресурсами, компетенцією тощо), необхідними для ліквідації проблеми.

СИСТЕМА ПРОБЛЕМОСТВОРЮВАЛЬНА (problem-containing system) - система, у якій виникла проблема, що підлягає вирішенню; звичайно ця система є ініціатором і замовником проведення системного аналізу.

СИСТЕМА СКЛАДНА (complex system) - система, модель якої, що використовується для керування системою, є неадекватною відносно заданої мети.

СИСТЕМА СОЦІОТЕХНІЧНА (socio-technical

system) -система, у складі якої є люди та колективи, інтереси яких істотно пов'язані з функціонуванням системи.

СИСТЕМА ЦІННОСТЕЙ (values system) - ідеологічна основа для постановки цілей соціотехнічних систем; об'єкт системного аналізу на етапі виявлення дійсних цілей людей, причетних до розв'язуваної проблеми.

СИСТЕМНІСТЬ (systematisity) - I) володіння всіма признаками системи; 2) загальна властивість матерії, форма її існування, і, відповідно, невід'ємна властивість людської практики, включаючи мислення.

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ (systems analysis) - 1) із практичної сторони системний аналіз є система методів дослідження або проектування складних систем, пошуку1, планування та реалізації змін, призначених для ліквідації проблем; 2) з методологічної сторони системний аналіз є прикладною діалектикою, тому що реалізує ідеї матеріалістичної діалектики стосовно конкретних практичних задач, особливість яких полягає в необхідності з'ясування причин їхньої складності і усунення цих причин; 3) з методичної сторони системний аналіз відрізняється міждисциплінарним і наддисциплінарним характером, залученням у роботу як неформальних, евристичних, експертних методів, так і емпіричних експериментальних методів, а таксис при можливості і необхідності чітких формальних математичних методів.

СИСТЕМНИЙ ПІДХІД (systems approach) - у даний час розглядається або як одна з ранніх форм системного аналізу, або як початкова фаза сучасного системного аналізу, етап первісного, якісного аналізу проблеми і постановки задач.

СКЛАДНІСТЬ (complexity) - властивість деякого явища (об'єкта, процесу, системи), що виражається в несподіванці, непередбачуваності, нез'ясовності, випадковості, "інтуїтивності" його поводження.

СТРУКТУРА (structure, від лат. "будівля") - сукупність зв'язків між частинами системи.

СТРУКТУРНА СХЕМА СИСТЕМИ (structural scheme) - конструкція системи; об'єднання моделей "чорного ящика", складу і структури.

СЦЕНАРІЙ (scenario) - уявлювана, але правдоподібна послідовність дій і подій, що випливають з них, що можуть проявитись в майбутньому з досліджуваною системою; модель майбутнього після прийняття рішення, яка представлена до його прийняття.

ФУНКЦІЯ ВИБОРУ (choise function) - найбільш загальна математична модель вибору; відображення сукупності множин у сукупність їхніх підмножин без поелементного відображення однієї множини на іншу і без відображення множин на числову вісь.

ФУНКЦІЯ КРИТЕРІАЛЬНА (criterion function) - функція від позначення альтернатив, значення якої упорядковані в такій же послідовності, що і переваги альтернатив.

ФУНКЦІЯ ВТРАТ (loss function) - функція, що виражає втрати, які змушений нести користувач статистичного рішення, а також відрізняється від істинного судження.

ФУНКЦІЯ ПРИНАЛЕЖНОСТІ (memberschip function) -функція, що характеризує розпливчасту множину і приймає для кожної альтернативи значення з інтервалу [0,1], що виражає ступінь приналежності даного елемента цій розпливчастій множині.

ФУНКЦІЯ ВИРІШАЛЬНА (decision function) - функція, що відображає кожну вибірку в простір статистичних рішень.

ШКАЛИ ВИМІРЮВАЛЬНІ (measurement scales) - множина позначень, використовуваних для реєстрації стану об'єкта спостереження; в залежності від введених відносин у цій множині шкали відрізняються за їхньою силою; сила вимірювальної шкали повинна узгоджуватись з природою явища, яке спостерігається.

Навчальне видання

В. І. Риндюк, І. В. Коц, В. О. Приятельчук

Математичне моделювання в системному аналізі. Приклади та завдання

Навчальний посібник