УДК 681.5.023+681.5.015+62—83:629.433

Б. І. Мокін, д. т. н., проф.;
О. Б. Мокін, асп.

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЕЛЕКТРОПРИВОДА ТРАМВАЯ ПРИ ЙОГО СТАЛОМУ НАВАНТАЖЕННІ

1. Вихідні передумови та постановка задачі

Основними функціональними елементами електропривода трамвая є чотири електричні двигуни постійного струму з послідовним збудженням, які попарно підключені під напругу контактної мережі.

В процесі роботи трамвая на маршруті двигуни його електропривода споживають значну кількість електричної енергії, тож трамвайний парк міста є одним із найбільших її споживачів.

В зв'язку з цим актуальною є задача оптимізації режиму роботи електропривода трамвая за критерієм мінімуму втрат електричної енергії в якірних колах їх електричних двигунів.

В роботі [1] задача оптимізації за критерієм

$$Q = \int_{o}^{\tau_k} i^2 \, d\tau \tag{1}$$

режиму роботи за програмою

$$\beta = \int_{0}^{\tau_k} \nu \, d\tau \tag{2}$$

електропривода з електродвигуном послідовного збудження, динаміка якого описується рівнянням

$$i\phi = \dot{\nu} + \mu_0 , \tag{3}$$

доведена до рівняння

$$\frac{2i}{\phi + i\dfrac{d\phi}{di}} = \lambda_0 \tau + C, \tag{4}$$

для розв'язання якого відносно струму якоря електродвигуна необхідно задати в аналітичній формі залежність робочого магнітного потоку цього електродвигуна від струму збудження, який для цього класу електродвигунів є одночасно і струмом збудження якоря.

В формулах (1)÷(4): i – струм якоря, ϕ – робочий магнітний потік, ν – кутова швидкість, $\dot{\nu}$ – її похідна, μ_0 – момент навантаження на валу ротора, τ – час — задані у відносних одиницях:

$$\mu = \frac{M}{M_H}; \; i = \frac{I_Я}{I_H}; \; \phi = \frac{\Phi}{\Phi_H}; \; \nu = \frac{\omega}{\omega_H}; \; \tau = \frac{t}{T_M}, \tag{5}$$

де M_H, I_H, Φ_H, ω_H – номінальні значення відповідно моменту, струму, магнітного потоку та кутової швидкості, а T_M – механічна стала, яка визначається як

$$T_M = \frac{J\omega_H}{M_H}, \qquad (6)$$

де J – приведений до вала електродвигуна момент інерції махових мас електропривода.

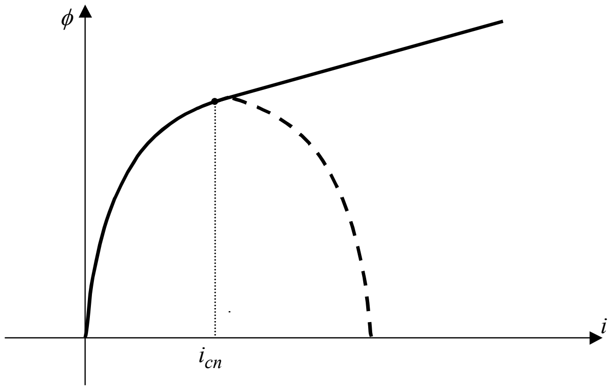

Рис. 1. Графік характеристики намагнічування $\phi(i)$ електричного двигуна при використанні моделі (7)

В роботі [2] побудована зручна для використання при розв'язанні задачі оптимізації математична модель характеристики намагнічування $\phi(i)$ (рис. 1) у вигляді:

$$\phi(i) = \begin{cases} -a_2 i^2 + b_2 i, \ \_ \ i \in [0,\ i_{cn}), \\ a_1 + b_1 i, \ \_ \ i \in [i_{cn},\ \infty), \end{cases} \qquad (7)$$

де
$$i_{cn} = \frac{b_2 - b_1}{2a_2}. \qquad (8)$$

Виходячи із співвідношень (1)÷(8), побудуємо такі моделі для струму якоря i та кутової швидкості обертання ротора ν, які забезпечують мінімум функціонала (1).

Зрозуміло, що реалізація цих моделей під час керування електроприводом трамвая приведе до мінімізації втрат електроенергії за час роботи цього трамвая на маршруті.

2. Побудова математичних моделей для визначення оптимальних законів зміни струму якоря та кутової швидкості обертання вала ротора електродвигуна

В момент пуску електродвигуна $(\tau = 0)$ е. р. с. обертання його якоря дорівнює нулю, тому прикладена напруга контактної мережі урівноважується лише падінням напруги від струму якоря на якірному колі, звідки пусковий струм можна визначити як

$$i_n = \frac{u}{r_Я}, \qquad (9)$$

де $u = \dfrac{U}{U_H}$ — відносне, по відношенню до номінального U_H, значення напруги контактної мережі для якоря електродвигуна, а

$$r_Я = \frac{\sum R_Я}{R_H} = \frac{\sum R_Я I_H}{U_H} \ — \qquad (10)$$

відносне значення опору якірного ланцюга.

Оскільки для електропривода трамвая завжди

$$i_n > i_{cn}, \qquad (11)$$

то в режимі розгону трамвая електродвигун працює на лінійному відрізку кривої намагнічування, тобто

$$\phi(i) = a_1 + b_1 i, \qquad (12)$$

а
$$\frac{d\phi}{di} = b_1. \qquad (13)$$

Підставляючи (12) і (13) у (4), отримаємо

$$\frac{2i}{a_1 + 2b_1 i} = \lambda_0 \tau + C. \qquad (14)$$

Із (14) знайдемо, що

$$i = \frac{a_1\left(C+\lambda_0\tau\right)}{2\left(1-b_1\left(C+\lambda_0\tau\right)\right)}. \tag{15}$$

Підставляючи (12) і (15) у (3), матимемо

$$\dot{\nu} = \frac{a_1^2\left(C+\lambda_0\tau\right)}{2\left(1-b_1\left(C+\lambda_0\tau\right)\right)} + \frac{a_1^2 b_1\left(C+\lambda_0\tau\right)^2}{4\left(1-b_1\left(C+\lambda_0\tau\right)\right)^2} - \mu_0\,. \tag{16}$$

Інтегруючи (16), отримаємо

$$\nu = \frac{a_1^2}{4\lambda_0 b_1}\left(\frac{1}{b_1\left(1-b_1\left(C+\lambda_0\tau\right)\right)} - \frac{1}{b_1} - \left(C+\lambda_0\tau\right)\right) - \mu_0\tau + C_1. \tag{17}$$

Стала C, що входить у моделі (15) і (17), легко знаходиться з використанням початкової умови для струму якоря —

$$\begin{cases}\tau = 0,\\ i = i_n,\end{cases} \tag{18}$$

та моделі (15), оскільки, підставляючи (18) у (15), матимемо

$$i_n = \frac{a_1 C}{2\left(1-b_1 C\right)}, \tag{19}$$

звідки —

$$C = \frac{2i_n}{a_1 + 2b_1 i_n}. \tag{20}$$

Сталі C_1 та λ_0 знайдемо з граничних умов для швидкості:

$$\begin{cases}\tau = 0,\\ \nu = 0,\end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases}\tau = \tau_k,\\ \nu = 0.\end{cases} \tag{22}$$

Підставляючи (21) і (22) у (17), матимемо

$$0 = \frac{a_1^2}{4\lambda_0 b_1}\left(\frac{1}{b_1\left(1-b_1 C\right)} - \frac{1}{b_1} - C\right) + C_1, \tag{23}$$

$$0 = \frac{a_1^2}{4\lambda_0 b_1}\left(\frac{1}{b_1\left(1-b_1\left(C+\lambda_0\tau_k\right)\right)} - \frac{1}{b_1} - \left(C+\lambda_0\tau_k\right)\right) - \mu_0\tau_k + C_1. \tag{24}$$

Із (23) отримаємо залежність сталої C_1 від λ_0 у вигляді

$$C_1 = \frac{a_1^2}{4\lambda_0 b_1}\left(C + \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_1\left(1-b_1 C\right)}\right), \tag{25}$$

а, підставляючи (25) у (24), — рівняння для знаходження сталої λ_0 у вигляді

$$\lambda_0^2 + \frac{2a_1^2 C - a_1^2 b_1 C^2 - 4\mu_0 + 8\mu_0 b_1 C + C}{\tau_k\left(a_1^2 - a_1^2 b_1 C + 4\mu_0 b_1\right)}\lambda_0 + \frac{C_1^2}{\tau_k^2\left(a_1^2 - a_1^2 b_1 C + 4\mu_0 b_1\right)} = 0. \tag{26}$$

А тепер розглянемо роботу електропривода трамвая в усталеному режимі, для якого виконується нерівність

$$i < i_{cn}. \tag{27}$$

В цьому випадку електродвигун працює на параболічному відрізку кривої намагнічування, тобто

$$\phi(i) = -a_2 i^2 + b_2 i, \tag{28}$$

а

$$\frac{d\phi}{di} = -2a_2 i + b_2. \tag{29}$$

Підставляючи (28) і (29) у (4), отримаємо

$$\frac{2i}{-3a_2 i^2 + 2b_2 i} = C + \lambda_0 \tau. \tag{30}$$

Оскільки для електродвигуна з послідовним збудженням завжди виконується умова

$$i \neq 0, \tag{31}$$

дивись, наприклад, [3], то з (30) знайдемо, що

$$i = \frac{2}{3a_2}\left(b_2 - \frac{1}{C + \lambda_0 \tau}\right). \tag{32}$$

Підставляючи (28) і (32) у (3), матимемо

$$\dot{\nu} = -\frac{8}{27a_2^2}\left(b_2 - \frac{1}{C + \lambda_0\tau}\right)^3 + \frac{4b_2}{9a_2^2}\left(b_2 - \frac{1}{C + \lambda_0\tau}\right)^2 - \mu_0. \tag{33}$$

Інтегруючи (33), отримаємо

$$\nu = \frac{4}{27a_2^2\lambda_0}\left(b_2^3\left(C + \lambda_0\tau\right) + \frac{3b_2}{C + \lambda_0\tau} - \frac{1}{\left(C + \lambda_0\tau\right)^2}\right) - \mu_0\tau + C_2. \tag{34}$$

Для визначення сталої C_2 спочатку знайдемо момент τ_{cn} досягнення струмом якоря значення i_{cn}, яке нам відоме з (8).

Підставляючи τ_{cn} та значення i_{cn} із (8) у (15), отримаємо рівняння

$$\frac{b_2 - b_1}{2a_2} = \frac{a_1\left(C + \lambda_0\tau_{cn}\right)}{2\left(1 - b_1\left(C + \lambda_0\tau_{cn}\right)\right)}, \tag{35}$$

з одним невідомим — τ_{cn}, значення якого і знаходиться з цього рівняння.

Підставляючи знайдене значення τ_{cn} в рівняння (17), знайдемо значення кутової швидкості ν_{cn} в цей момент.

В свою чергу, підставляючи значення ν_{cn} і τ_{cn} в рівняння (34), знайдемо сталу C_2 у вигляді

$$C_2 = \nu_{cn} + \mu_0\tau_{cn} - \frac{4}{27a_2^2\lambda_0}\left(b_2^3\left(C + \lambda_0\tau_{cn}\right) + \frac{3b_2}{C + \lambda_0\tau_{cn}} - \frac{1}{\left(C + \lambda_0\tau_{cn}\right)^2}\right). \tag{36}$$

Оскільки квадратне рівняння (26) має два корені λ_{01} і λ_{02}, то і значень τ_{cn}, які знаходяться з рівняння (35), теж буде два (τ_{cn1} та τ_{cn2}). Одне із цих значень τ_{cn} характеризує перехід струму якоря з лінійної ділянки характеристики намагнічування на параболічну в режимі розгону (внаслідок збільшення е. р. с. обертання і зменшення струму якоря електродвигуна), а друге — перехід струму якоря з параболічної ділянки характеристики намагнічування на лінійну в режимі гальмування.

Те, що (15), (17) та (32), (34) забезпечують саме мінімум функціоналу (1) доведено в роботі [1] для довільного закону зміни i та ν, аби лише його було отримано з рівняння (4), тож на доведеннях достатніх умов екстремуму функціоналу (1) ми зупинятись не будемо.

3. Висновки

Для того, щоб електропривод трамвая витрачав мінімальну кількість електроенергії під час руху по маршруту від однієї зупинки до наступної, необхідно підтримувати значення струму в якорях його електродвигунів та кутову швидкість обертання валів цих електродвигунів у відповідності з моделями (15), (17) та (32), (34).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Петров Ю. П. Вариационные методы оптимального управления. — Л.: Энергия. — 1965. — 220 с.

2. Математична модель кривої намагнічування електричного двигуна постійного струму з послідовним збудженням для задач оптимізації / Б. І. Мокін, О. Б. Мокін // Вісник ВПІ. — 2004. — № 1. — С. 45—47.

3. Вольдек А. И. Электрические машины. Учебник для студентов высш. техн. учебн. заведений. — 3-е изд., перераб. — Л.: Энергия, 1978. — 832 с.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації

Надійшла до редакції 26.12.03
Рекомендована до друку 24.03.04

Мокін Борис Іванович — завідувач кафедри; ***Мокін Олександр Борисович*** —аспірант

Кафедра моделювання і моніторингу складних систем, Вінницький національний технічний університет