

ДОСЛІДЖЕННЯ БЕЗКОНТАКТНОГО МЕТОДУ ВИМІРЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ В ОБ'ЄМАХ СУЦІЛЬНИХ ТІЛ

Вступ

Температура є одним з найважливіших параметрів технологічних процесів. Їй притаманні деякі принципові особливості, які обумовлюють необхідність застосування великої кількості різноманітних методів та технічних засобів для її вимірювання. Потреба у швидкому безконтактному контролі та вимірюванні температури постійно зростає. Сканувальні оптико-електронні системи контролю та вимірювання температурних полів мають широкі функційні можливості, що дозволяють набагато підвищити якість та швидкість аналізу стану різних теплоенергетичних систем [1].

Сьогодні у багатьох галузях науки і техніки таких як: медицина, дефектоскопія, металургія, військові та космічні системи, авіація, машинобудування, є потреба вимірювати та контролювати температуру тіл не тільки у вигляді інтегральної оцінки, а і розподіл температури як на зовнішній поверхні, так і в середині, бажано безконтактними методами вимірювання. Велика кількість наявних на цей час методів вимірювання температури дають змогу вимірювати її у будь-якій точці, якщо використовується контактний метод вимірювання. У разі застосування безконтактного методу вимірювання, є можливість отримання значень температури лише на поверхні тіла дослідження або у верхніх його шарах. Таким чином виникає потреба дослідження безконтактного методу вимірювання температури, який би давав змогу визначати її не тільки на поверхні тіла або у верхніх його шарах, а і у будь-якій його точці у всьому об'ємі.

Теорії і практики безконтактного вимірювання температури суцільних тіл у будь-якій точці його внутрішнього об'єму сьогодні ще не існує, вона знаходиться у початковій стадії розвитку [1]. Тому дана робота спрямована на розроблення математичної моделі та прикладу її застосування, що дозволяє оцінити достовірність досліджуваного методу.

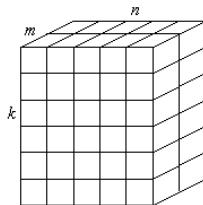


Рис. 1. Просторова матриця розмірами $k \times n \times m$

Опис математичної моделі

Розглянемо суцільне тіло, яке має закон розподілу температури в об'ємі, що виражається функцією $R = T[K(x, y, z)]$, де T — абсолютне значення температури, $K(x, y, z)$ — координата точки тіла зі значенням температури T [2].

Тіло дослідження умовно розіб'ємо на дискретні області таким чином, щоб утворилась просторова матриця розмірами $k \times n \times m$ (рис. 1).

При цьому

$$k_i - k_{i-1} = n_j - n_{j-1} = m_l - m_{l-1} = q, \quad (1)$$

де q — крок просторової дискретизації; $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$; $l = \overline{1, m}$, при $u, v, w \in N$; N — множина натуральних чисел.

За допомогою безконтактного первинного вимірювального перетворювача (ПВП), наприклад тепловізора, досліджуваний об'єкт сканується. Результатом сканування є двовимірна матриця (рис. 2).

У відповідності з напрямком сканування, математично кожний елемент матриці $T_{K(x,y,z)}$ представляє собою векторну суму

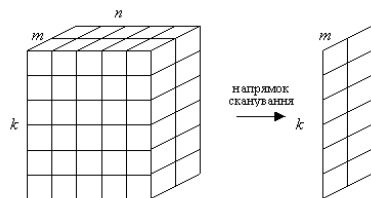


Рис. 2. Просторова матриця розмірами $k \times n \times m$ та її сканована проекція у вигляді двовимірної матриці $k \times m$

елементів матриці $k \times n \times m$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_{111} + \bar{a}_{121} + \dots + \bar{a}_{1j1} = \bar{s}_{11}; \\ \bar{a}_{211} + \bar{a}_{221} + \dots + \bar{a}_{2j1} = \bar{s}_{21}; \\ \dots\dots\dots \\ \bar{a}_{i11} + \bar{a}_{i21} + \dots + \bar{a}_{ij1} = \bar{s}_{i1}; \\ \bar{a}_{112} + \bar{a}_{122} + \dots + \bar{a}_{1j2} = \bar{s}_{12}; \\ \bar{a}_{212} + \bar{a}_{222} + \dots + \bar{a}_{2j2} = \bar{s}_{22}; \\ \dots\dots\dots \\ \bar{a}_{i12} + \bar{a}_{i22} + \dots + \bar{a}_{ij2} = \bar{s}_{i2}; \\ \dots\dots\dots \\ \bar{a}_{11l} + \bar{a}_{12l} + \dots + \bar{a}_{1jl} = \bar{s}_{1l}; \\ \bar{a}_{21l} + \bar{a}_{22l} + \dots + \bar{a}_{2jl} = \bar{s}_{2l}; \\ \dots\dots\dots \\ \bar{a}_{i1l} + \bar{a}_{i2l} + \dots + \bar{a}_{ijl} = \bar{s}_{il}, \end{array} \right. \quad (2)$$

де \bar{a}_{ijl} — елемент просторової матриці $k \times n \times m$; \bar{s}_{il} — векторна сума елементів \bar{a}_{ijl} .

Значення векторних сум \bar{s}_{il} будуть залежати від закону розподілу $f(i, j, l)$, який характеризується властивостями і типом ПВП. Це пояснюється тим, що потужності прийнятих сигналів під час сканування елементів $a_{i,j,l}$ і $a_{i+1,j,l}$, якщо вони навіть і рівні між собою, в умовах реальних вимірювань будуть відрізнятися одне від одного. Це відбувається через те, що інфрачервоне випромінювання, що розповсюджується у тілі дослідження, здатне відбиватись, заломлюватись, терпіти дифракцію, інтерференцію і поляризацію. Тому для отримання дійсних значень температур елементів a_{ijl} , необхідно ввести допоміжний коефіцієнт λ_{ijl}

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{111} \cdot a_{111} + \lambda_{121} \cdot a_{121} + \dots + \lambda_{1j1} \cdot a_{1j1} = s_{11}; \\ \lambda_{211} \cdot a_{211} + \lambda_{221} \cdot a_{221} + \dots + \lambda_{2j1} \cdot a_{2j1} = s_{21}; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{i11} \cdot a_{i11} + \lambda_{i21} \cdot a_{i21} + \dots + \lambda_{ij1} \cdot a_{ij1} = s_{i1}; \\ \lambda_{112} \cdot a_{112} + \lambda_{122} \cdot a_{122} + \dots + \lambda_{1j2} \cdot a_{1j2} = s_{12}; \\ \lambda_{212} \cdot a_{212} + \lambda_{222} \cdot a_{222} + \dots + \lambda_{2j2} \cdot a_{2j2} = s_{22}; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{i12} \cdot a_{i12} + \lambda_{i22} \cdot a_{i22} + \dots + \lambda_{ij2} \cdot a_{ij2} = s_{i2}; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{11l} \cdot a_{11l} + \lambda_{12l} \cdot a_{12l} + \dots + \lambda_{1jl} \cdot a_{1jl} = s_{1l}; \\ \lambda_{21l} \cdot a_{21l} + \lambda_{22l} \cdot a_{22l} + \dots + \lambda_{2jl} \cdot a_{2jl} = s_{2l}; \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_{i1l} \cdot a_{i1l} + \lambda_{i2l} \cdot a_{i2l} + \dots + \lambda_{ijl} \cdot a_{ijl} = s_{il}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Значення λ_{ijl} буде залежати від функції $f(i, j, l)$. Для фіксованих значень i та l

$$\lambda_{ijl} = f(i), \quad (4)$$

де N – функція, що характеризує значення λ_{ijl} зі збільшенням значення n та фіксованих значеннях i та l , причому $f(1) = 1$.

Отже

$$T_{K(x,y,z)}^* = T_{K(x,y,z)} \cdot f(i, j, l), \tag{5}$$

де $T_{K(x,y,z)}^*$ — значення температури T елемента a_{ijl}^* , яке отримується під час сканування; $T_{K(x,y,z)}$ — дійсне значення температури T елемента a_{ijl} .

Тоді з системи рівнянь (3):

$$a_{ijl} = \frac{a_{ijl}^*}{\lambda_{ijl}}, \tag{6}$$

де a_{ijl} — елемент матриці $k \times n \times m$ з дійсним значенням температури $T_{K(x,y,z)}$; a_{ijl}^* — елемент матриці $k \times n \times m$ з дійсним значенням температури $T_{K(x,y,z)}^*$.

Суть методу безконтактного вимірювання температури в об'ємі тіл полягає в розв'язанні такої задачі: за відомими значеннями векторних сум \vec{s} , отриманих в результаті сканування тіла з різних напрямків (під різними кутами), необхідно знайти елементи a_{ijl} просторової матриці з розмірністю $k \times n \times m$.

Як відомо, система алгебричних рівнянь буде мати розв'язок, якщо кількість невідомих значень N буде більшою або дорівнювати кількості складених рівнянь N^* , що входять в цю систему.

Під час сканування просторової матриці $k \times n \times m$, будемо отримувати її проекції у вигляді двовимірної матриці $k \times m$. Тобто для того, щоб кількість невідомих значень N була більшою або дорівнювала кількості N^* рівнянь, необхідно і достатньо щоб кількість двовимірних матриць дорівнювала значенню n .

Кількість елементів просторової матриці розмірами $k \times n \times m$ визначається за формулою

$$N = knm. \tag{7}$$

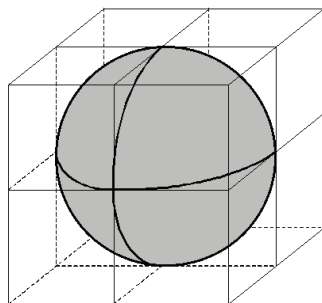


Рис. 3. Тіло дослідження, обмежене уявним кубом

Розглянемо частину простору, обмежену уявним кубом, в середині якого знаходиться досліджуване тіло (рис. 3).

Математично, ця частина простору буде описуватися матрицею з розмірністю $k \times n \times m$, причому $k = n = m$. Отже, якщо цю частину простору сканувати по трьох осях декартової системи координат, то отримані проекції математично будуть відповідати трьом матрицям з розмірностями $k \times n$, $k \times m$ та $n \times m$, причому кожний елемент отриманих матриць у відповідності з системою рівнянь (3) буде зв'язаний з елементами просторової матриці $k \times n \times m$ алгебричними рівняннями. Співвідношення між кількістю отриманих таким чином рівнянь і кількістю невідомих елементів просторової матриці буде залежати від порядку самої просторової матриці. Відповідні співвідношення для порядків матриці

зведені в таблицю.

Співвідношення для різних порядків матриці

Порядок матриці	2	3	4	5	6	7
N	8	27	64	125	216	343
N*	12	27	48	75	108	147

З таблиці видно, що зі збільшенням порядку матриці кількість рівнянь N^* буде меншою за кількість невідомих значень N (рис. 4) [3].

Тоді постає необхідність отримання додаткових рівнянь для розв'язку системи. Додаткові рівняння системи отримуються завдяки скануванню тіла дослідження під різними кутами. Сканування матриці $k \times n \times m$ проводиться n разів під кутами, які відрізняються між собою.

Після сканування матриці $k \times n \times m$ під кутами α і β , координати елементів матриці, що сканувалася під кутом α , будуть не співпадати з координатами елементів матриці, що сканувалася під кутом β . Але для отримання результативних рівнянь, необхідно, щоб координати елементів матриці, що сканувалися під різними кутами, співпадали.

Для цього необхідно визначити координати елементів еталонної матриці $k \times n \times m$, за якою складаються рівняння. Еталонною матрицею може бути матриця, що сканувалася перший раз під «нульовим» кутом сканування α (наприклад, в напрямку осі OX). Інші матриці, що скануються під кутами відносно еталонної матриці будемо називати допоміжними.

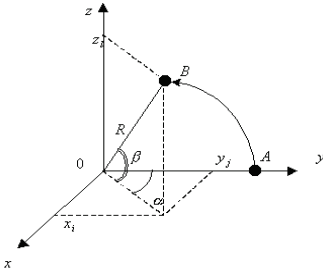


Рис. 5. Нові координати одного з елементів матриці, зі зміною кута сканування

Далі визначаються координати елементів допоміжної матриці, які змінили своє положення зі зміною кута сканування (рис. 5).

На рис. 5 точкою $A(x_j; y_j; z_l)$ позначені початкові координати одного з елементів еталонної матриці, а точкою $B(x_i^*; y_j^*; z_l^*)$ — нові координати цього ж елемента в допоміжній матриці. Кут α характеризує кут сканування у площині xu , кут β — кут, який перпендикулярний площині сканування xu . Тоді нові координати елемента a_{ijl} допоміжної матриці будуть визначатись так:

$$x_i^* = R \cos(90^\circ - \beta) = R \sin \beta,$$

$$y_j^* = R \cos \beta \cdot \sin \alpha,$$

$$z_l^* = R \cos \beta \cdot \cos \alpha,$$

де R — відстань від точки B до центру обертання тіла дослідження зі скануванням його під різними кутами.

Після того, як стали відомі координати точок A і B , проводиться така операція. Від координат елементів допоміжної матриці виділяють деяку область, об'єм якої дорівнює кроку дискретизації у

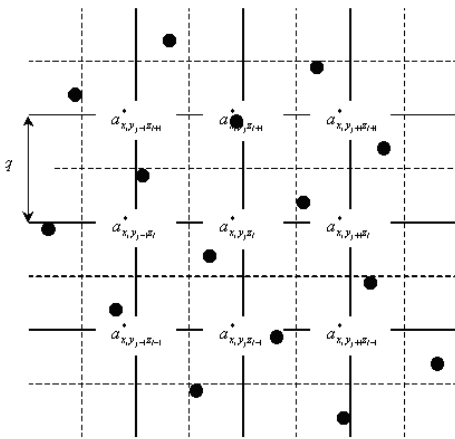


Рис. 6. Розташування координат кожного з елементів еталонної матриці стосовно допоміжної матриці

кубі — q^3 (рисунок 6). Далі перевіряються розташування координат кожного з елементів еталонної матриці стосовно допоміжної матриці. Елементи еталонної матриці на рисунку 6 мають вигляд чорних точок.

Якщо елемент допоміжної матриці з координатами $x_i^*; y_j^*; z_l^*$ розташований в деякій області з координатами $x_j; y_j; z_l$, то значенню елемента з координатами $x_i^*; y_j^*; z_l^*$ допоміжної матриці привласнюють значення елемента з координатами $x_j; y_j; z_l$ еталонної матриці

$$\begin{cases} x_i^* - \frac{q}{2} \leq x_j \leq x_i^* + \frac{q}{2}; \\ y_j^* - \frac{q}{2} \leq y_j \leq y_j^* + \frac{q}{2}; \\ z_l^* - \frac{q}{2} \leq z_l \leq z_l^* + \frac{q}{2} \end{cases} \quad (11)$$

і елемент a_{ijl}^* допоміжної матриці з координатами $x_j; y_j; z_l$ заноситься в систему рівнянь.

Можливі випадки, коли в одній області або зовсім немає елементів еталонної матриці, або він є один, або їх декілька:

а) якщо в області елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці зовсім немає елементів еталонної матриці, то значенню елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці привласнюють нульове значення;

б) якщо в області елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці є один елемент еталонної матриці, то значенню елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці привласнюють значення елемента a_{ijl} еталонної матриці;

в) якщо в області елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці є декілька елементів еталонної матриці, то значенню елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці привласнюють значення елемента a_{ijl} еталонної матриці, який знаходиться на найменшій відстані від елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці.

Ця операція необхідна для зберігання постійних значень координат елементів еталонної матриці.

Далі розв'язують отриману систему рівнянь. Результатом її розв'язування є значення елементів a_{ijl} матриці $k \times n \times m$. Фізично це відповідає значенням температур в усіх точках тіла, що розташовані у відповідних координатах.

Похибки вимірювання

Як зазначалось вище, під час сканування просторової матриці розмірами $k \times n \times m$, ПВП буде відображати $T_{K(x,y,z)}^*$ – значення температури T елемента a_{ijl}^* , яке отримується в процесі сканування [2]. З формули (5) видно, що значення температури $T_{K(x,y,z)}^*$ залежить від функції $f(i, j, l)$, яка характеризує коефіцієнт λ_{ijl} . Функція $f(i, j, l)$ різна для кожного матеріалу. Від точності закону розподілу цієї функції буде залежати точність значень коефіцієнтів λ_{ijl} системи рівнянь (3), які, в свою чергу, характеризують значення векторів сум \vec{s}_{ijl} . Загальна похибка Δs_{ijl} сум, сканованої проєкції, буде залежати від суми похибок коефіцієнтів λ_{ijl}

$$\Delta s_{ijl} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \Delta \lambda_{ijl}, \quad (12)$$

де $\Delta \lambda_{ijl}$ – похибка визначення значення коефіцієнту λ_{ijl} .

Похибка, яка залежить від розташування координат елементів $x_i; y_j; z_l$ еталонної матриці відносно координат елементів $x_i^*; y_j^*; z_l^*$ допоміжної матриці назовемо похибкою привласнення. Зрозуміло, що значення температур елементів з координатами $x_i; y_j; z_l$ будуть відрізнятися від значень температур елементів з координатами $x_i^*; y_j^*; z_l^*$ і визначатись законом розподілу температури, що виражається функцією $R = T[K(x, y, z)]$. Тобто похибка привласнення $\delta_{a_{ijl}}$ буде визначатись

$$\delta_{a_{ijl}} = T_{K(x_i^*; y_j^*; z_l^*)} - T_{K(x_i; y_j; z_l)}, \quad (13)$$

де $T_{K(x_i^*; y_j^*; z_l^*)}$ — значення температури елемента a_{ijl}^* допоміжної матриці; $T_{K(x_i; y_j; z_l)}$ — значення температури елемента a_{ijl} еталонної матриці.

Окрім розглянутої похибки привласнення методу властива інструментальна похибка, пов'язана з чисельними методами розв'язку систем рівнянь. Чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь поділяють на точні та наближені (ітераційні) [4]. До точних відносять такі методи, які, враховуючи відсутність округлення, дають точний розв'язок системи після останнього числа арифметичних та логічних операцій. До наближених відносяться методи, що дозволяють

отримувати значення вектора розв'язку системи з заданою точністю у вигляді границі послідовності деяких векторів. Процес побудови такої послідовності називають ітераційним. До точних методів належать метод Крамера, метод Гауса і його модифікації. До наближених методів відносяться метод простої ітерації (метод Якобі), метод Гауса-Зейделя, метод поверхневої релаксації та ін.

Розглянемо оцінку похибки процесу Зейделя. Якщо \bar{x} – точне значення кореня лінійної системи, $\bar{x}^{(k)}$ – k -те наближення, обчислене за методом Зейделя, то для оцінки похибки цього метода використовується формула

$$\|x - x^{(k)}\|_1 \leq \frac{\|\alpha\|_1^{(k)}}{1 - \|\alpha\|_1} \cdot \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_1. \tag{14}$$

В залежності від властивостей тіла дослідження, його параметрів таких як: розміри $k \times n \times m$, маса M , об'єм V , форма, температура, тиск, щільність, однорідність середовища його внутрішнього об'єму — буде визначатись закон розподілу температури $R = T[K(x, y, z)]$ цього тіла. Точність визначення температури тіла дослідження у будь-якій точці його об'єму також буде залежати від точності ПВП. Усі ці фактори будуть визначати граничні умови застосування методу, який досліджується.

Практичне застосування методу

Розглянемо приклад практичного застосування методу, який досліджується. Знайдемо невідомі значення температур, що відповідають елементам a_{ijl} матриці $k \times n \times m$, якою розбивається тіло дослідження, за отриманими значеннями температур сканованих проєкцій [2].

Нехай тіло дослідження має форму кулі і закон розподілу температури, який виражається функцією

$$R = \frac{1}{V}, \tag{15}$$

де $V = V_{T_0} - V_{T_{K(x,y,z)}}$ – відстань від джерела розповсюдження температури, з координатами $x_j; y_j; z_l$.

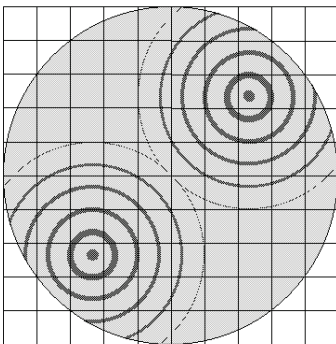


Рис. 7. Закон розподілу температури у тілі дослідження

Розіб'ємо тіло дослідження (рис. 7) просторовою матрицею розмірами $k \times n \times m$, де $k = n = m = 11$. Ця матриця має $N = 11 \times 11 \times 11 = 1331$ невідомих елементів a_{ijl} , значення яких чисельно дорівнюють значенням температури тіла дослідження в областях, центрами яких є координати $x_j; y_j; z_l$ цих невідомих елементів a_{ijl} .

Тобто, для знаходження невідомих значень елементів a_{ijl} просторової матриці необхідно отримати 1331 рівняння. Ці рівняння можна отримати під час сканування тіла дослідження 11 разів під різними кутами.

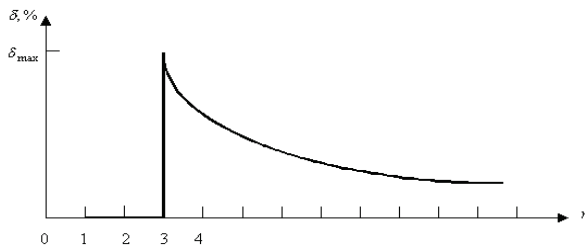
Тіло дослідження має два точкових джерела розповсюдження зі значеннями температур $T_0 = 100$ °C.

Для того, щоб достовірно визначити значення елементів s_{ijl} , сканованої проєкції, необхідно визначити значення елементів a_{ijl} . Згідно закону розподілу R розповсюдження температури всередині тіла дослідження, була використана програма, розроблена у математичному пакеті Maple 6, яка теоретично, з високою точністю визначає значення температур елементів a_{ijl} [5].

За допомогою програми обчислення систем лінійних алгебричних рівнянь знаходяться корені системи рівнянь [6].

Після отримання значень температури елементів a_{ijl} просторової матриці $k \times n \times m$, обчислюються абсолютні та відносні значення похибки отриманих результатів [7].

В результаті обчислень були отримані абсолютні та відносні похибки, середнє значення яких не перевищує 1%. Похибки елементів a_{684} і a_{648} , координати яких збігаються з центрами точкових джерел розповсюдження температури, сягають 30,3300223 °C і 30,33002226% відповідно. Це пояснюється тим, що закон розподілу температури $R = T[K(x, y, z)]$ вибраний таким чином, що у цих областях з мінімальною зміною значень координат $K(x, y, z)$ температура суттєво змінює своє значення. Звідси, для того щоб отримати значення температур з мінімальною заданою похибкою, необхідно збільшити крок просторової дискретизації q і досліджувати тіло, розбиваючи його умовно на дискретні області таким чином, щоб утворилась просторова матриця більшого порядку ніж матриця, яка обчислювалась у даному прикладі.

Рис. 8. Графік залежності $\delta(n)$

Залежність значення відносної похибки від порядку просторової матриці з тим самим законом розподілу температури показаний на рис. 8.

Наведений приклад, який містить результати обчислень невідомих значень елементів a_{ijl} та їх похибок, має дуже великий текстовий обсяг. Тому цей приклад в даній статті не друкується.

Висновки

В результаті виконаної роботи була розроблена математична модель методу безконтактного вимірювання температури в об'ємі суцільних тіл та наведений приклад застосування математичної моделі, який доводить доцільність застосування даного підходу.

В ході дослідження з'ясувалось, що абсолютні та відносні значення похибок залежать від кроку дискретизації, а саме — порядку просторової матриці, яка характеризує тіло дослідження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Полежаев В. К., Полинов П. Р. Моделирование процессов тепло- и массообмена. — М.: Высшая школа, 1986. — 256 с.
2. Макаренко А. Г., Шабатура Ю. В. Дослідження безконтактного методу вимірювання температури суцільних тіл / Тези студентських доповідей. — Вінниця: ВДТУ, 2003.
3. Дьяконов В. П., Аброменкова И. В. Mathcad 8 Pro в математике, физике и Internet. — М.: Нолидж, 1999. — 512 с.
4. Методичні вказівки до лабораторних робіт з курсу «Обчислювальні методи та застосування ЕОМ для бакалаврів за фахом 21.01: Частина 1 / Укл.; С. М. Москвіна, В. Д. Дель, А. І. Яковенко. — Вінниця: ВПІ, 1992. — 68 с.
5. Дьяконов В. П. Maple 6. — М.: Нолидж, 1999. — 487 с.
6. Геберт Шилдт. С для профессиональных программистов. — М.: Высшая школа, 1989. — 307 с.
7. Володарський Е. Т., Кухарчук В. В., Поджаренко В. В., Сердюк Г. Б. Метрологічне забезпечення вимірювань і контролю. Навчальний посібник. — Вінниця: ВДТУ, 2001. — 219 с.

Рекомендована кафедрою метрології та промислової автоматики

Надійшла до редакції 5.07.03
Рекомендована до опублікування 24.11.03

Шабатура Юрій Васильович — доцент кафедри метрології та промислової автоматики; **Макаренко Андрій Геннадійович** — студент Інституту автоматики, електроніки та комп'ютерних систем управління Вінницького національного технічного університету.