УДК 512. 53

В. Д. Дереч, к. ф-м. н., доц.

ПРО РАНГ ЕЛЕМЕНТА НАПІВГРУПИ

Вступ.

В статті на мові решітки ідеалів визначається ранг елемента напівгрупи S. Основним результатом роботи є теорема п. 3, в якій знайдено необхідні і достатні умови для того, щоб бієктивне перетворення напівгрупи S зберігало ранг елемента. В останньому пункті статті загальна теорема ілюструється, зокрема, для випадку, коли S — напівгрупа всіх квадратних матриць над довільним полем.

1. Як відомо (див., наприклад, [1], стор. 86), ідеали напівгрупи $M_n(K)$ — всіх квадратних матриць над довільним полем K, вичерпуються ідеалами виду $I_k = \{A \in M_n(K) | r(A) \le k\}$, де $r(A)$ — ранг матриці A. З цієї теореми безпосередньо випливає, що ранг матриці A дорівнює довжині ідеала, породженого матрицею A, в лінійно впорядкованій решітці ідеалів напівгрупи $M_n(K)$.

Ранг довільної прямокутної матриці (за означенням) — це ранг квадратної матриці, яку ми одержали з матриці, дописуючи нулі в рядках або стовпцях.

Добре відомо, що для будь-яких матриць A і B має місце нерівність $r(A \cdot B) \le \min\{r(A), r(B)\}$. Ця властивість покладена в основу загального визначення рангу елемента напівгрупи (див., наприклад, [2], стр. 337).

Отже, нехай S — довільна напівгрупа. Функцію $r : S \to N_0$ називають ранговою на напівгрупі S, якщо для будь-яких a і b виконується нерівність $r(a \cdot b) \le \min\{r(a), r(b)\}$.

Як визначити рангову функцію на напівгрупі S? Класичний підхід — за допомогою представлень. А саме. Нехай $\varphi : S \to M_n(K)$ — гомоморфізм напівгрупи S в напівгрупу $M_n(K)$ — всіх квадратних матриць над полем K. За означенням $r(a) = \dim \operatorname{Im} \varphi(a)$. Аналогічне означення і у випадку, коли $\varphi : S \to T_n$ — гомоморфізм напівгрупи S в навпівгрупу T_n — всіх перетворень n-елементної множини.

Розглянемо ще одну можливість означення рангової функції на напівгрупі. Для цього спочатку введемо деяку термінологію.

Рангові функції r_1 і r_2, що визначені на напівгрупі S, назвемо *еквівалентними,* якщо множини $r_1(S)$ і $r_2(S)$ — рівнопотужні. Зрозуміло, що будь-яка рангова функція еквівалентна ранговій функції r_0 такій, що $r_0(S)$ — лівий відрізок впорядкованої (звичайний порядок) множини N_0. Лише такі рангові функції ми будемо розглядати надалі.

Тепер зазначимо, що існує цілком природна відповідність між ранговими функціями і ланцюжками ідеалів. А саме. Нехай $r : S \to N_0$ — рангова функція на напівгрупі S. Легко перевірити, що множина $I_k = \{a \in S | r(a) \le k\}$, де $k \in r(S)$ є ідеалом напівгрупи S. Отже, ранговій функції r відповідає ланцюжок (скінченний або нескінченний) ідеалів $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$. Зрозуміло, що об'єднання всіх ідеалів такого ланцюжка дорівнює S. Навпаки. Нехай

$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_n \subset \ldots$ — деякий ланцюжок (скінченний або нескінченний) ідеалів, причому об'єднання всіх ідеалів цього ланцюжка дорівнює S.

Нехай $a \in I_k / I_{k-1}$ (k = 1, 2,...). Тоді, **за означенням**, $r(a) = k$. Якщо ж $a \in I_0$, то, за означенням, $r(a) = 0$.

Лема. *Щойно визначена функція $r : S \to N_0$ є ранговою.*

Доведення. Нехай a і b — довільні елементи напівгрупи S, причому $r(a) = k$ і $r(b) = m$. Для визначеності, нехай $k \le m$, тоді $I_k \subset I_m$. Отже, $a \cdot b \in I_k$. Тому $r(a \cdot b) \le k \le m$, тобто, $r(a \cdot b) \le \min\{r(a),\ r(b)\}$.

Таким чином, ми дали означення рангової функції в термінах решітки ідеалів напівгрупи S.

2. Напівгрупу S назвемо напівгрупою скінченного рангу, якщо існує натуральне число m таке, що для будь-якої рангової функції r має місце нерівність $|r(S)| \le m$.

Теорема. *Напівгрупа є напівгрупою скінченного рангу тоді і тільки тоді, коли кількість її ідеалів скінченна.*

Доведення. Нехай S — напівгрупа скінченого рангу. За означенням, існує натуральне число M таке, що для будь-якої рангової функції r виконується нерівність $|r(S)| \le M$. Розглянемо довільний ланцюжок ідеалів, в склад якого входить і напівгрупа S. Довжина його не може перевищувати числа M, оскільки в протилежному випадку виконуватиметься нерівність $|R(S)| > M$, де R — рангова функція, що відповідає цьому ланцюжку ідеалів.

Таким чином, решітка ідеалів напівгрупи S має скінченну довжину. Крім того, вона дистрибутивна. Відомо (див., наприклад, [3], стр. 131), що дистрибутивна решітка скінченної довжини — скінченна.

Навпаки. Нехай кількість ідеалів напівгрупи S — скінченна. Позначимо через K довжину решітки ідеалів напівгрупи S. Нехай r — довільна рангова функція на S. Цій функції відповідає ланцюжок рангових ідеалів. Але довжина будь-якого ланцюжка ідеалів напівгрупи не перевищує числа K, тому $|r(S)| \le K$.

3. В цьому пункті ми розглянемо бієктивні перетворення напівгрупи, які зберігають ранг.

Насамперед зазначимо, що автоморфізми скінченої лінійно впорядкованої множини, очевидно, вичерпуються тотожним автоморфізмом.

Далі, якщо S — напівгрупа скінченного рангу і r — фіксована рангова функція на ній, то будемо казати, що бієкція f на напівгрупі S зберігає ранг r, якщо для будь-якого $a \in S$ виконується рівність $r(a) = r(f(a))$.

Ідеал напівгрупи S виду $I_k = \{s \in S | r(s) \le k\}$ назвемо ранговим.

Теорема. *Нехай S — напівгрупа скінченного рангу і r — довільна рангова функція на ній. Бієкція f на множині S зберігає ранг r тоді і тільки тоді, коли для будь-якого рангового ідеалу I_k множина $f(I_k)$ — теж ранговий ідеал.*

Доведення. Оскільки, за умовою, S — напівгрупа скінченного рангу, то кількість її ідеалів скінченна, а тому і ланцюжок рангових ідеалів скінченний. За умовою бієкція f переводить ранговий ідеал в ранговий ідеал. Отже, $I_k \mapsto f(I_k)$ є автоморфізмом лінійно впорядкованої множини рангових ідеалів і, як ми вже зазначили, цей автоморфізм є тотожним т. б. для будь-якого рангового ідеалу $f(I_k) = I_k$.

Нехай тепер a — довільний елемент, ранг якого дорівнює k. Це означає, що $a \in I_k / I_{k-1}$. Нехай $f(a) \in I_{k-1}$. Оскільки $f(I_{k-1}) = I_{k-1}$, то знайдеться елемент $b \in I_{k-1}$ такий, що $f(a) = f(b)$. Звідси $a = b$. Протиріччя. Таким чином, $f(a) \in I_k / I_{k-1}$. А це означає, що $r(f(a)) = r(a)$.

ISSN 1997-9266. Вісник Вінницького політехнічного інституту. 2004. № 4

Тепер нехай f — бієкція, яка зберігає ранг r. Для будь-якого рангового ідеалу I_k має місце включення $f(I_k) \subset I_k$. Дійсно, якщо $a \in I_k$, то $r(a) \le k$, тому і $r(f(a)) \le k$. Тобто $f(a) \in I_k$.

Покажемо тепер, що $I_k \subset f(I_k)$. Дійсно, нехай $c \in I_k$, тоді $r(c) \le k$. Оскільки f — бієкція, то існує елемент m такий, що $f(m) = c$. Припустимо що $m \notin I_k$, тоді $r(m) > k$, а, отже, і $r(f(m)) > k$ тобто $r(c) > k$. Протиріччя. Таким чином, $m \in I_k$, а, отже, $I_k \subset f(I_k)$. Оскільки $f(I_k) \subset I_k$, то $f(I_k) = I_k$.

4. Застосування. В цьому пункті покажемо конкретні застосування теореми попереднього пункту.

Отже, нехай S — напівгрупа з одиницею, всі ідеали якої утворюють скінченний ланцюжок. До таких напівгруп, зокрема, належить напівгрупа всіх квадратних матриць над довільним полем, всі види симетричних напівгруп на скінченній множині, напівгрупа всіх ендоморфізмів скінченної лінійно впорядкованої множини і т. ін. Далі будемо розглядати лише рангову функцію, яка відповідає ланцюжку всіх ідеалів. Легко перевірити, що будь-який автоморфізм чи антиавтоморфізм напівгрупи S ідеал переводить в ідеал. Отже, за теоремою попереднього пункту, будь-який автоморфізм або антиавтоморфізм зберігає ранг елемента.

Розглянемо, зокрема, напівгрупу $M_n(K)$ — всіх квадратних матриць над довільним полем K. Оскільки бієктивне перетворення $A \mapsto {}^tA$ (де ${}^tA$ — транспонована матриця) напівгрупи $M_n(K)$ є антиавтоморфізмом (для будь-яких матриць A і B виконується тотожність ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$, то одержуємо добре відомий результат про те, що ранг матриці дорівнює рангу транспонованої матриці або іншими словами — ранг по рядках дорівнює рангу по стовпцях.

Аналогічний відомий результат ми одержимо для матричної напівгрупи $M_n(C)$ (де C — поле комплексних чисел) якщо розглянемо перетворення $A \mapsto A^*$ (де A^* — матриця спряжена до матриці A). Оскільки це бієктивне перетворення є антиавтоморфізмом (для будь-яких матриць A і B має місце рівність $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$), то робимо висновок — ранг матриці дорівнює рангу спряженої матриці.

Якщо елемент g належить групі оборотних елементів напівгрупи S, то, очевидно, $x \mapsto gxg^{-1}$ є автоморфізмом. Отже, $r(x) = r\left(gxg^{-1}\right)$. Зокрема, для напівгрупи $M_n(K)$ це твердження формулюється так: ранг матриці дорівнює рангу подібної матриці.

Оскільки суперпозиція автоморфізму і антиавтоморфізму є антиавтоморфізм, то ми можемо одержати цілий ряд аналогічних тверджень.

Далі, нехай g — оборотний елемент напівгрупи S. Розглянемо бієктивне перетворення $\lambda_g : x \mapsto gx$. Легко перевірити, що для будь-якого ідеалу A напівгрупи S має місце рівність $\lambda_g(A) = gA = A$. Аналогічне твердження виконується і для бієктивного перетворення $\rho_g : x \mapsto xg$. Тому, за теоремою попереднього пункту, робимо висновок, що $r(x) = r(gx) = r(xg) = r(axb)$, де a, b, g — оборотні елементи напівгрупи S. Конкретизуючи останнє твердження для напівгрупи $M_n(K)$ ми одержуємо добре відомий результат — ранг матриці дорівнює рангу еквівалентної до неї матриці.

Оскільки кожне з елементарних перетворень матриці можна реалізувати в формі $X \mapsto BX$, де B — невироджена матриця, то робимо висновок — ранг матриці не змінюється під час елементарних перетворень.

Таким чином, ми одержали загальний підхід, який дозволяє, так би мовити, поштучні доведення, що стосуються рангу елемента напівгрупи (в тому числі рангу матриці) і які слабо ідейно пов’язані між собою, охопити єдиним методом. При такому підході нібито не дуже проста теорема про те, що ранг матриці дорівнює рангу транспонованої матриці стає такою ж тривіальною, як і, скажімо, теорема про те, що ранг матриці не змінюється, якщо деякий її рядок помножити на число відмінне від нуля.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2-х т. М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 286 с.
2. Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения. — М.: Мир, 1985. — 439 с.
3. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1970. — 147 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики

Надійшла до редакції 26.12.03
Рекомендована до друку 27.01.04

Дереч Володимир Дмитрович — доцент кафедри вищої математики.
Вінницький національний технічний університет