

УДК 621.391:519.2

С. М. Москвіна к. т. н., доц.;

Д. О. Ковалюк, асп.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ РИЗИКУ В СИСТЕМАХ УПРАВЛІННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИМ ПРОЦЕСОМ

Розглядається задача прийняття рішень в умовах ризику в системах управління технологічним процесом. Проведено аналіз наявних моделей прийняття рішень в умовах ризику, запропоновано математичну модель та алгоритм прийняття рішень на основі логіко-імовірнісних моделей, які були використані для керування роботою печі по виробництву вапна.

Вступ

В системах управління технологічними процесами (СУТП) існують проблеми, пов'язані з розв'язанням задач оцінки ефективності управління такими системами з врахуванням характеристик надійності, стійкості, робастності об'єктів управління, які звичайно задаються як статистичні, імовірнісні та інтервальні оцінки. Розв'язання таких задач відносять [1] до задач прийняття рішень в умовах ризику.

В теперішній час задача управління технологічними процесами є актуальною, оскільки розвиток вимірювальної, мікропроцесорної техніки та комп'ютерних технологій дозволяють підвищити їх ефективність і економічність. Разом з тим прийняття рішень в СУТП ускладнене через відсутність єдиного трактування поняття ризику і методів його оцінки. Останнім часом з'явився ряд робіт [2, 3], присвячених проблемам прийняття рішень в умовах ризику, проте на сьогодні не існує моделей, методів і алгоритмів прийняття рішень з урахуванням ризику, пов'язаного з оцінками характеристик об'єктів управління, представлених як статистичні, імовірнісні та інтервальні.

Аналіз проблеми

Задачі прийняття рішень в умовах ризику активно розроблялися для економічних моделей, що було зумовлено потребою враховувати непередбачувані фактори, відсутністю статистичної інформації про ті чи інші явища та тенденції економіки, а також потребою в управлінні фінансовим та інвестиційним капіталом. Орієнтування задач прийняття рішень в умовах ризику на економіку зумовило створення спеціальних математичних моделей, які придатні в більшості для розв'язання економічних задач.

Аналіз найпоширеніших моделей прийняття рішень в умовах ризику [4], дозволяє зробити висновок, що в загальному випадку задачу прийняття рішень в умовах ризику можна представити як класичну задачу умовної оптимізації, але в більшості цих моделей не враховується параметр ризику. Розглянемо моделі прийняття рішень в умовах ризику, в яких ризик враховується безпосередньо в математичних моделях. До таких моделей можна віднести відомі моделі, що використовуються в економіці: моделі Марковиця, Шарпа, імунізації, імовірнісні.

В моделях Марковиця і Шарпа [5] для розв'язання задачі, яка розглядається, ризик враховується як стандартне відхилення (або дисперсія) прибутковості портфеля інвестиційних активів

$$\min_x \left\{ \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \right\}, \text{ де } \sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\varepsilon i}^2, \quad (1)$$

а залишковий ризик i -го активу $\sigma_{\varepsilon i}$ — враховується як вагові коефіцієнти. Але використання цих моделей переважно обмежується інвестиційними економічними задачами.

В моделі імунізації [6] в якості показника ризику використовується *тривалість* портфеля

$$\max_x \sum_{i=1}^n r_i d_i x_i, \quad (2)$$

де $d = \{d_j\}_{j=1,n}$ — вектор показників тривалості активів. Тривалість відображає середньозважений за сумами виплат проміжок часу до погашення, і відображає *процентний ризик* фінансового інструмента, оскільки характеризує мінливість ціни активу в результаті коливань процентних ставок. Як функцію корисності зазвичай вибирають функцію з постійною абсолютною несхильністю до ризику

$$u(w) = -e^{-kw}, \quad (3)$$

де коефіцієнт k відображає степінь несхильності до ризику.

В імовірнісних моделях [6] значення ризику розраховується статистичним шляхом. Грунтуючись на імовірнісній функції розподілу, вибирається значення змінної (звичайно за допомогою генератора випадкових чисел), яка є одним з факторів, що впливає на цільову функцію. Згенеровані значення результату використовуються для побудови щільності розподілу з заданим математичним сподіванням і стандартним відхиленням, за якими обчислюється коефіцієнт варіації і потім оцінюється індивідуальний ризик.

Таким чином, в вищерозглянутих моделях прийняття рішень в умовах ризику, ризик розглядається як ваговий коефіцієнт і розраховується як дисперсія, процент вкладу, або коефіцієнт варіації.

На наш погляд, такий підхід для прийняття рішень в умовах ризику в технічних системах для задач управління є досить спрощеним, тому що в таких системах, як системи діагностування, системи передачі даних, системи автоматичного керування, системи управління технологічними процесами про об'єкти ризику відомі не тільки статистичні дані, але й інформація про стан системи в різні моменти часу. Зазначимо також, що застосування моделей прийняття рішень в умовах ризику для економічних задач практично неможливе в СУТП, оскільки розрахунок показника ризику часто ускладнений або неможливий через складну взаємозалежність від різних наборів значень факторів. Крім того прийняття рішень в системах, що розглядаються часто повинно прийматись в реальному масштабі часу, що вимагає створення відповідних моделей.

Метою даної роботи є підвищення ефективності прийняття рішень в системах управління технологічними процесами на основі застосування математичної моделі, що враховує величину ризику як сукупність внесків подій—ознак і подій—градацій в ризик об'єкта управління.

Математична модель ризику на основі ЛП-моделі

Одним з підходів, що дозволяє враховувати інформацію про об'єкт ризику та інформацію про стан системи в різні моменти часу є логіко-імовірнісна теорія ризику неуспіху (ЛП-теорія).

Предметом імовірнісної логіки [7] є оцінка істинності гіпотез, а обчислення імовірності складних гіпотез у всіх системах імовірнісної логіки здійснюється за допомогою традиційного математичного апарата обчислення ймовірностей.

Під ризиком в ЛП-теорії розуміється ймовірність неуспіху, яка визначається через ймовірності факторів (ознак), які призвели до цього неуспіху.

Об'єкт ризику описується ознаками, кожна з ознак має декілька градацій. Ознакам і градаціям відповідають випадкові події, які призводять до неуспіху. Події-ознаки пов'язані логічними зв'язками. Події-градації для кожної ознаки утворюють групу несумісних подій.

Бінарна логічна змінна X_j , дорівнює 1 з ймовірністю P_j , якщо j -та ознака призвела до неуспіху, і дорівнює 0 з ймовірністю $Q_j = 1 - P_j$ в протилежному випадку

Інформація про об'єкт ризику задається базою даних у вигляді таблиці «об'єкт — ознаки», в рядках якої знаходяться об'єкти, в стовпчиках — ознаки, а в комірках — градації ознак. Вектор $X(i) = (X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$ описує i -й об'єкт з таблиці «об'єкт—ознаки».

Кожній події ставиться у відповідність випадкова величина або логічна змінна. Л-функція неуспіху будується за сценарієм ризику або структурою моделі неуспіху (рис. 1).

Рис. 1 Структурна модель ризику типу «вузол» і «міст»

Наприклад для структурної моделі ризику типу «вузол» (рис. 1а) стрілки означають логічні зв'язки «OR», подія-ознака X_1 має три події-градації X_{11} , X_{12} , X_{13} , які утворюють групу несумісних подій. Це означає, що для цієї ознаки в конкретному об'єкті використовується тільки будь-яка одна градація. Структурна модель ризику неуспіху може бути еквівалентна реальній системі (наприклад електричній), бути асоціативною, або змішаною. Структурним схемам ризику неуспіху відповідають Л-функції різної складності із зв'язками AND, OR, NOT, з циклами і повторними елементами.

Якщо логічну функцію ризику неуспіху об'єкта представити як сукупність факторів, що призводять до неуспіху

$$Y = Y(X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_n), \quad (4)$$

то ймовірність неуспіху об'єкта (В-функція), заданого вектором $X(i)$, можна записати

$$P_i\{Y = 1 | X(i)\} = \Psi(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n), \quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

тоді логічна модель (Л-модель) ризику неуспіху типу «вузол» [8] записується як

$$Y = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_j \vee \dots \vee X_n, \quad (6)$$

тобто ризик неуспіху виникає, якщо відбувається будь-яка одна, будь-які дві, ..., або всі ініціювальні події.

Враховуючи правила виконання операцій в ЛІ-моделях, величина ризику завжди знаходиться в межах $[0, 1]$ за будь-яких значень ймовірностей ініціювальних подій, а вираз (6) запишеться у такій формі

$$P = 1 - Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \dots \cdot Q_n, \quad (7)$$

де $Q_i = 1 - P_i$ — ймовірність того, що i -й фактор не вплинув на кінцевий результат.

Якщо В-модель ризику навчена і відомі ймовірності подій-градацій P_{jr} , визначимо внески подій-ознак і подій-градацій в ризик об'єкта, а також в точність ЛІ-моделі ризику і середній ризик об'єктів.

Враховуючи вищевикладене, внесок ознаки (всіх градацій ознаки) в ризик i -го об'єкта можна представити як

$$dP_j = P(i) - P(i) |_{P_j=0}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (8)$$

внесок ознаки в середній ризик \bar{P} множини об'єктів

$$\overline{dP_j} = \bar{P}_j - \bar{P}_j |_{P_j=0}, \quad j = \overline{1, n}; \quad (9)$$

внесок ознаки в цільову функцію F_{\max}

$$dF_j = F_{\max} - F_j |_{P_j=0}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Обчислення внесків подій-ознак і подій-градацій є основою структурної ідентифікації ЛП-моделей ризику, яка полягає в зміні Л-функції, а також основою для зміни числа ознак і градацій в ознаках. Це дозволяє вирішувати практично важливі задачі керування ризиком.

Відмітимо, що для обчислення коефіцієнта неуспіху в ЛП-моделі ризику використовується лише ймовірність градацій по кожному фактору. На нашу думку, необхідно враховувати не лише ймовірність неуспіху кожної градації, але й вагу даних градації факторів, що дасть змогу підвищити точність моделі.

Метод прийняття рішень в умовах ризику на основі ЛП-моделі

Як показано в [8], ЛП-моделі характеризуються чітко визначеною послідовністю кроків, а рішення в таких моделях приймається за величиною ризику (ймовірності неуспіху). Такий підхід найбільше підходить до задач класифікації та ідентифікації, проте прийняття рішень в СУТП зводиться до управління певним об'єктом. В цьому випадку обчислення коефіцієнта неуспіху є явно недостатнім, тому пропонується на основі вдосконаленої ЛП-моделі ризику створити метод, який враховує наслідки (втрати) від прийнятого рішення, і включає в себе значення параметрів керування об'єктом.

Для визначення оптимальних параметрів управління об'єктом, на наш погляд, в цільову функцію крім оцінки ризику необхідно ввести функцію втрат, яка враховує ступінь впливу факторів (ознак, які змінюють стан об'єкта управління) технологічного процесу та значення параметрів об'єкта управління. В цьому випадку метод прийняття рішень в умовах ризику на основі ЛП-моделей на відміну від наявних буде містити такі етапи:

1. *Експертний ризик-аналіз.* На цьому етапі відбираються фактори-ознаки, які впливають на стан об'єкта управління, для побудови математичної моделі ризику, а також визначаються ймовірності неуспіху градацій кожного фактора.
2. *Аналіз чутливості.* В процесі проведення аналізу чутливості визначається вага градацій кожного фактора на кінцевий результат.
3. *Побудова ЛП-моделі.* Вибирається вид моделі типу «вузол» або «міст».
4. *Математичне моделювання.* За вхідними даними об'єкта управління обчислюються ймовірності неуспіху для кожного фактора і розраховується коефіцієнт ризику неуспіху, який характеризує відхилення отриманого результату від оптимального.
5. *Оцінка ризику.* Визначається значення функції втрат.
6. *Прийняття рішень.* За вхідними даними, коефіцієнта ризику та значенню функції втрат уточнюються параметри управління об'єктом та проводиться аналіз результату управління і уточнення ймовірностей неуспіху градацій.

Алгоритм прийняття рішень в умовах ризику на основі ЛП-моделі

Розглянемо модель ризику типу «вузол» з факторами $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$, що можуть впливати на кінцевий результат. Кожен з факторів має декілька градацій (значень), які з певною ймовірністю (відносною частотою) впливають на відхилення отриманого результату від оптимального (неуспіх).

Крок 1. Обчислення відносної частоти градації для кожного фактора. Відносна частота j -ї градації для i -го фактора P_{ij} може задаватися експертним шляхом, або розраховуватись статистично за вибіркою попередніх даних за формулою

$$P_{ij} = \frac{n}{N}, \quad (11)$$

де n — кількість випадків, в яких j — та градація i -го фактора призвела до неуспіху, N — загальне число випадків.

Крок 2. Обчислення ваг градацій. Вагові коефіцієнти (ваги) градацій W_j розраховуються експертним шляхом з урахуванням значущості (впливу) кожного фактора на загальний результат. Для визначення цих ваг використовуємо метод ранжування.

Крок 3. Обчислення ймовірностей неспіху для кожного фактора. Ймовірності неспіху знаходимо як середнє зважене вагових коефіцієнтів і відносної частоти кожної градації даного фактора

$$\bar{P}_i = \sum_{j=1}^{N_j} W_{ij} \cdot P_{ij}, \quad (12)$$

де N_j — кількість градацій для i -го фактора.

Крок 4. Обчислення ризику неспіху. Оскільки логічна модель (Л-модель) ризику неспіху типу «вузол» записується як

$$Y = X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_j \vee \dots \vee X_n, \quad (13)$$

то ризик неспіху виникає, якщо відбувається будь-яке одне, будь-які два, ..., або всі ініціювальні події, а вираз (13) перепишемо у такій формі:

$$P = 1 - Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \dots \cdot Q_n \quad (14)$$

Крок 5. Мінімізація втрат. Для прийняття оптимального рішення необхідно щоб відхилення між оптимальним і отриманим результатом було мінімальним. Щоб кількісно оцінити це відхилення необхідно обчислити функцію втрат, яка в загальному вигляді може бути записана так:

$$f(P, k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (15)$$

де P — ймовірність неспіху (відхилення від оптимального результату), k_1, k_2, \dots, k_n — контрольовані параметри керування.

Тоді прийняття оптимального рішення буде полягати у виборі таких параметрів керування k_1, k_2, \dots, k_n , за яких виконується умова

$$\min f(P, k_1, k_2, \dots, k_n). \quad (16)$$

Крок 6. Аналіз результату і уточнення ймовірностей неспіху градацій На цьому кроці здійснюється аналіз результату. Якщо результат є успішним, то збільшується число загальних подій, якщо результатом є неспіх, то визначаються градації факторів, що спричинили це, і уточнюються (перераховуються) ймовірності цих градацій.

Приклад використання математичної моделі в СУТП виготовлення вапна

Застосування запропонованої моделі розглянемо на прикладі системи управління роботою печі для випалювання вапна, яка широко використовується на цукрових заводах.

Як показано в [9], зі зміщенням зони горіння по висоті печі утворюється «недопал» вапна, кількість якого за нормативами не повинна перевищувати 5—10 % від маси вапняку. В даному процесі під ризиком розуміються втрати — відхилення маси отриманого вапна від оптимального результату, а неспіхом виступає подія, коли кількість отриманого недопалу перевищує 10 %.

В процесі випалювання вапна було виділено три основних фактора, які негативно впливають на процес і зумовлюють відхилення отриманого результату від оптимального: співвідношення розмірів кусків вапняку між собою, співвідношення розмірів кусків палива між собою, дозування палива.

В результаті оброблення статистичних даних за формулою (11), було визначено ймовірності неспіху для кожної градації фактора, які показані в таблиці.

Основні фактори та їх ймовірності неспіху

Фактор	№	Градація	Ймовірність
Співвідношення розмірів фракції вапняку	1	1:2,5	0,1
	2	1:3,5	0,15
	3	1:5	0,20
Співвідношення розмірів кусків палива між собою (мм)	4	20—40	0,175
	5	40—60	0,275
Дозування палива у відсотках від маси вапняку	6	6,5—7,0	0,075
	7	7,0—7,5	0,15
	8	7,5—8,0	0,225

Вагові коефіцієнти, визначені методом ранжування, дорівнюють

$$W_1 = \frac{1}{84}; \quad W_2 = \frac{2}{84}; \quad W_3 = \frac{6}{84}; \quad W_4 = \frac{10}{84}; \quad W_5 = \frac{11}{84}; \quad W_6 = \frac{17}{84}; \quad W_7 = \frac{21}{84}; \quad W_8 = \frac{16}{84} \cdot 0$$

Робота печі продуктивністю 100 т на добу характеризується такими параметрами:

1. Паливо — антрацит з тепловою здатністю $Q_H^p = 6400$ ккал/кг.
2. Витрати антрациту на 1 т вапна $x/Q_H^p = 171$ кг.
3. Подача повітря в піч здійснюється з надлишком повітря в 10 % $\alpha = 1,1$.
4. Розкид кусків у фракції вапняку 1:3,5.
5. Розмір кусків палива 20—40 мм.
6. Паливо у кількості 7,2 % до маси вапняку.
7. Температура відкачуваних газів $t = 160$ °С.

Коефіцієнт ризику визначається за допомогою формули (14) і дорівнює $P = 0,062$.

Регулювання роботою печі здійснюється за допомогою кількості повітря, що відкачується з печі. Залежність між кількістю газів, що необхідно відкачати за хвилину і температурою цих газів буде [9]

$$W_0 = \frac{Q}{24 \cdot 60} \left[(0,3 + 7,0 \alpha) \frac{x}{Q_H^p} + 0,4 \right] (1,0 + 0,00367 t). \tag{17}$$

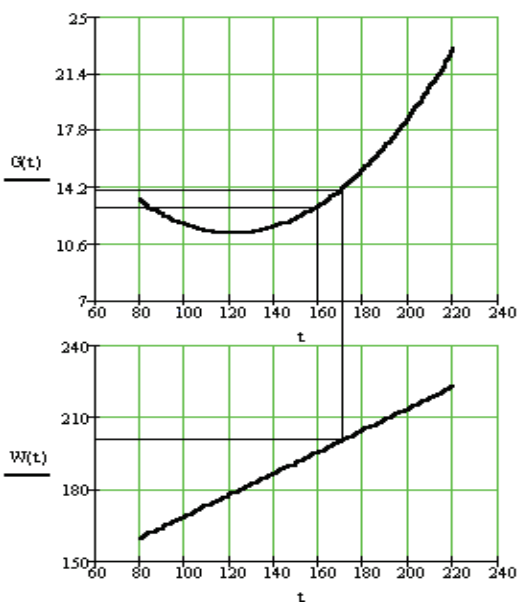


Рис. 2. Вплив коефіцієнту неспіху на загальні втрати

Апроксимуючи експериментальні дані методом найменших квадратів, було визначено функцію втрат

$$G = 0,0012t^2 - 0,292t + 29 \tag{18}$$

Тоді з урахуванням коефіцієнта неспіху цільова функція прийме вигляд

$$G = (1 + p)(0,0012t^2 - 0,292t + 29) \tag{19}$$

За температурою газів було визначено уточнений рівень втрат G' , а потім уточнену температуру (рис. 2).

Підставляючи отримане в процесі моделювання значення температури $t = 168$ ° у формулу (17) розраховано оптимальний об'єм газу, який становить 200 м³/хв, зі значенням коефіцієнта ризику $P = 0,062$.

Як видно з вищевикладеного, застосування запропонованої моделі дозволяє визначити оптимальні параметри управління (об'єм газу) для різних комбінацій градацій відібраних факторів ризику.

Висновки

Проведено аналіз відомих моделей прийняття рішень в умовах ризику, з якого випливає обмеженість їх застосування для задач прийняття рішень в СУТП.

Пропонується модель і алгоритм прийняття рішень, які основані на використанні ЛП-моделей та експертних методів.

Показано переваги застосування запропонованої моделі для управління технологічним процесом виробництва вапна.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Репин В. Г., Тартаковский Г. П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М.: Советское радио, 1977. — 432 с.
2. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука, 1981. — 208 с.
3. Louis Eeckhoudt Risk and Medical Decision Making (Studies in Risk and Uncertainty) Kluwer Academic Publishers, 2002. — 144 p.
4. Hertz D. D. Risk Analysis and its Applications. — New York: John Wiley&Sons, 1982. — 456 p.
5. Ковалюк Д. О., Москвіна С. М. Алгоритм прийняття рішень в умовах ризику в великих системах // Проблеми автоматизації та управління. — К.: НАУ. — 2004. — № 11 — С. 135—138.
6. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. — М.: Мир, 1984. — 430 с.
7. Рябинин И. А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 7. — С. 178—185.
8. Соложенцев Е. Д. Особенности логико-вероятностной теории риска с группами несовместных событий // Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 7. — С. 187—203.
9. Крам А. С. Интенсификация обжига извести в шахтных пересыпных печах. — М.: Госстройиздат, 1958. — 169 с.

Рекомендована кафедрою комп'ютерних систем управління

Надійшла до редакції 18.11.04
Рекомендована до друку 24.11.04

Москвіна Світлана Михайлівна — доцент кафедри комп'ютерних систем управління; **Ковалюк Дмитро Олександрович** — аспірант.

Кафедра комп'ютерних систем управління, Вінницький національний технічний університет